

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K , L , M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x \right) + \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right) = \cos 10x$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = \sin \left(10x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$n \in \mathbb{Z} !$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = 2 \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\textcircled{1} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos 2x = \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{7}{2}x + \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$\textcircled{2} \sin \left(-\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\textcircled{3} \cos \left(\frac{7}{2}x + \frac{3\pi}{8} \right) = 0$$

$$\text{из } \textcircled{1} : 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad x = \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n \right)$$

$$\text{из } \textcircled{2} : -\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi n \quad x = -\frac{2}{3} \left(\pi n - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{из } \textcircled{3} : \frac{7}{2}x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad x = \frac{2}{7} \left(\pi n + \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} ; -\frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12} ; \frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{28} ; \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

№1.

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

В составе 8-значного числа могут быть набор чисел:

а) из 4-ех "5", 3-ех "3" и одной "1"

$$N_A = \frac{8!}{4! \cdot 3!}$$

б) из 4-ех "5", одной "3", одной "1" и одной "9".

$$N_B = \frac{8!}{4!}$$

$$N = N_A + N_B = \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8} + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 280 + 210 \cdot 8 = 280 + 1680 = 1960$$

Ответ: 1960

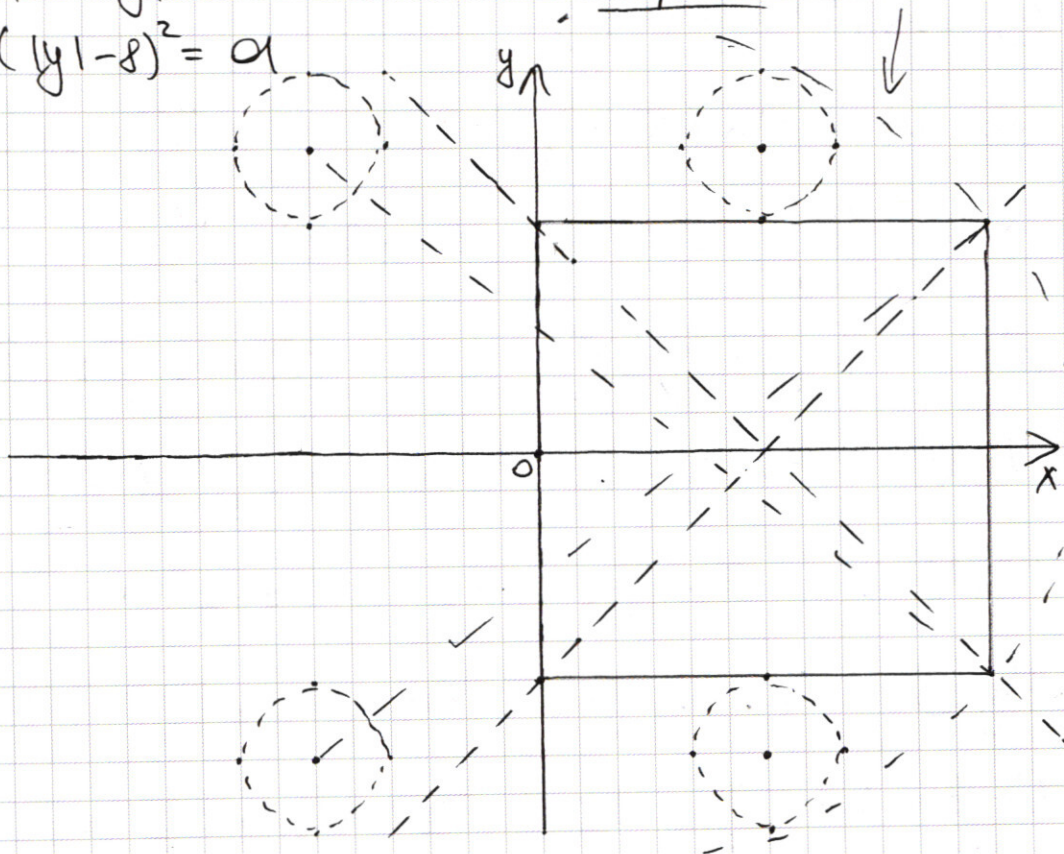
№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases}$$

2 реш.

это КВАДРАТ

По ходу реш.
будем пользо-
ваться графиком.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

Строим фигуру на графике

$$a) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y < 0 \Rightarrow y < 6-x \end{cases}$$

$$x-6-y < 0 \Rightarrow y < 6-x$$

$$x-6-y-x+6-y=12 \Rightarrow -2y=12 \Rightarrow y=-6$$

$$b) \begin{cases} x-6-y < 0 \Rightarrow y > x-6 \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x \end{cases}$$

$$x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x$$

$$y-x+6+x-6+y=12 \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow y=6$$

$$b) \begin{cases} x-6-y < 0 \Rightarrow y > x-6 \\ x-6+y < 0 \Rightarrow y < 6-x \end{cases}$$

$$x-6+y < 0 \Rightarrow y < 6-x$$

$$y-x+6-x+6-y=12 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$$

$$2) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x \end{cases}$$

$$x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq 6-x$$

$$x-6-y+x-6+y=12 \Rightarrow 2x=24 \Rightarrow x=12$$

$$2) (x-6)^2 + (y-6)^2 = a$$

Имеем 4 окруж. с $R = \sqrt{a}$ (центры отмечены на рисунке точками)

a) Строим, когда реш. 2, отмечены на рисунке.

b) $R=2$ ($a=4$) - 2 реш.

b) $R = \sqrt{14^2 + 18^2}$ ($a = 14^2 + 18^2 = 520$) - 2 реш.

Ответ: $a = 4; 520$.

N3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y \neq 0 \quad y > 0 \\ -xy > 0 \Rightarrow xy < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x < 0$$

$$1) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

Возведем в квадрат обе части

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{2\lg y} = (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{4\lg y} = (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{(x^2)^{4\lg y}}{y^{4\lg y}} = (x^2)^{\lg(-xy)} \quad | : (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{(x^2)^{4\lg y - \lg(-xy)}}{y^{4\lg y}} = 1 \Rightarrow (x^2)^{4\lg y - \lg(-xy)} = y^{4\lg y}$$

$$(x^2)^{\lg y^4 - \lg(-xy)} = y^{4\lg y}$$

$$(x^2)^{\lg\left(\frac{y^4}{-xy}\right)} = (x^2)^{\lg\left(\frac{y^3}{-x}\right)} = y^{4\lg y}$$

$$\log_{x^2} y^{4\lg y} = \lg\left(\frac{y^3}{-x}\right) = 3\lg y - \lg(-x)$$

$$2 \frac{\lg y}{\lg(-x)} \cdot \lg y = \lg \frac{y^3}{-x} \quad || \cdot \lg(-x) \quad | : \lg y \quad (\text{если } y \neq 1)$$

$$2 \lg y = \frac{\lg\left(\frac{y^3}{-x}\right)}{\lg y} \quad || \cdot \lg y$$

$$2 \log_{-x} y = \log_y \left(\frac{y^3}{-x}\right)$$

$$\frac{2}{\log_y(-x)} = \log_y y^3 - \log_y(-x) = 3 - \log_y(-x)$$

$$t = \log_y(-x)$$

$$\frac{2}{t} = 3 - t$$

$$\frac{t^2 - 3t + 2}{t} = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \{2; 1\}$$

$$\frac{(t-2)(t-1)}{t} = 0$$

$$t=1 \vee t=2 \Rightarrow \log_y(-x) = 1 \Rightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow \log_y(-x) = 2 \Rightarrow -x = y^2 \quad (\text{не подходит})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) а) $y = -x$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \textcircled{X}$$

$$x = -2 \Rightarrow \textcircled{V} \Rightarrow y = 2$$

б) $-x = y^2$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \quad | :y$$

$$6y + y^2 - y^3 - 8 = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \{1, -2\}$$

$$y = -2 \Rightarrow \textcircled{X}$$

$$y = 2 \Rightarrow \textcircled{V} \Rightarrow x = -4$$

$$y = 1 \Rightarrow \textcircled{V} \Rightarrow x = -1$$

3) В ~~данном~~ пункте 1 мы применим, что $y \neq 1$ и $x \neq -1$. В пункте 2 мы также проверим вар. с этими значениями.

Ответ: $(-2; 2); (-4; 2); (-1; 1)$.

N7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \\ y < 85 + (3^8 - 1)x \end{cases}$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$3^{81} \cdot 4 + 3^x \leq y < 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$3^{81} \cdot 4 + 3^x < 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

Пусть $f_1(x) = 3^{81} \cdot 4 + 3^x$, а $f_2(x) = 85 + 3^{81} \cdot x - x$

$$f_1'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 0 \quad f_2'(x) = 3^{81} - 1 > 0$$

Судя по производным, можно спланировать построение график.

Максимумы при двух значениях x между функ. выполняется равенство.

Сразу замечаю, что первое знач. $\Rightarrow x=4$

Выбираем второе

$$x=81 \Rightarrow 5 \cdot 3^{81} < 81 \cdot 3^{81} + 4$$

...

$$x=84 \Rightarrow 31 \cdot 3^{81} < 84 \cdot 3^{81} + 1$$

$$x=85 \Rightarrow 85 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81} + 0 \Rightarrow \text{втор. знач.} \Rightarrow x=85$$

Таким образом $4 < x < 85$. ($5 \leq x \leq 84$)

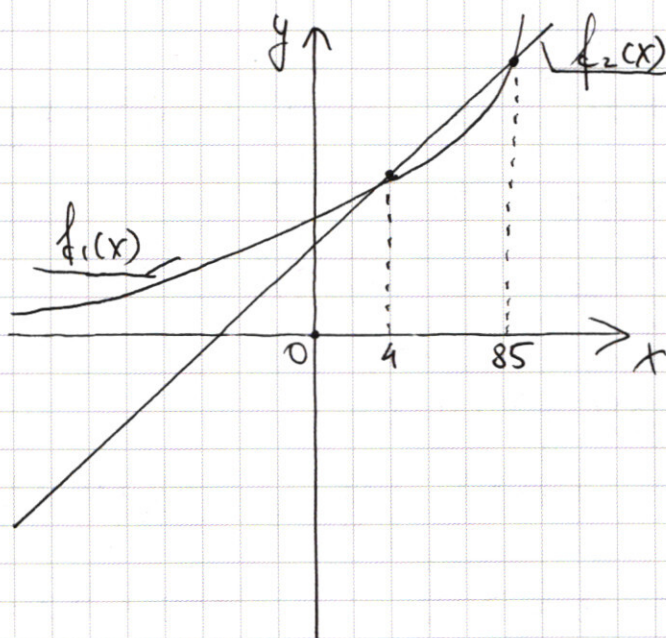
$$f_2(x) - f_1(x) = (85-x) + 3^{81}(x-4) - 3^x$$

$$(85-5) + \dots + (85-84) = 1 + \dots + 80 = \frac{1+80}{2} \cdot 80 = 81 \cdot 40$$

$$3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84} = 3^5 \cdot \frac{(3^{84-5+1}) - 1}{2} = 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2}$$

$$3^{81} \cdot (5-4) + 3^{81} \cdot (6-4) + \dots + 3^{81} \cdot (84-4) = 3^{81} \cdot 1 + 3^{81} \cdot 2 + \dots + 3^{81} \cdot 80 =$$

$$= 3^{81} \cdot \left(\frac{1+80}{2} \cdot 80 \right) = 3^{81} \cdot 81 \cdot 40$$

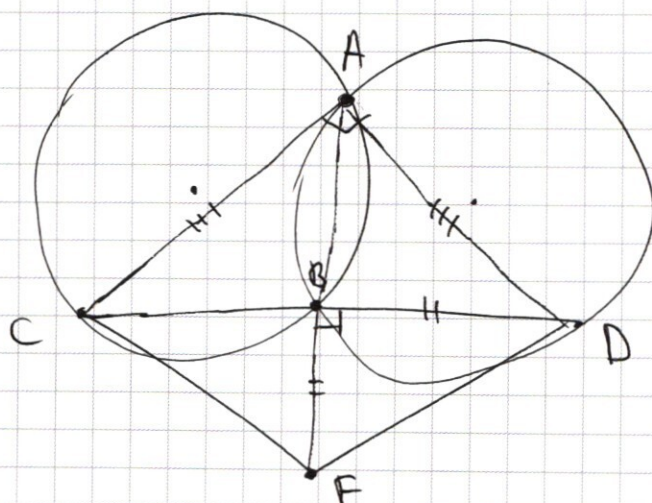


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & (f_2(5) - f_1(5)) + (f_2(6) - f_1(6)) + \dots + (f_2(84) - f_1(84)) = \\
 & = 81 \cdot 40 + 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2} - 3^{81} \cdot 81 \cdot 40 = \\
 & = 3240(1 - 3^{81}) + 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ: $3240(1 - 3^{81}) + \frac{243}{2} \cdot (3^{80} - 1)$.

№ 6.



Дано:

см. рис. +

+ $R = 13$

Найти:

a) $CF = ?$

b) $S_{ACF} = ?$ при $BC = 10$

Решение:

a) $\triangle CAB$: $\frac{AC}{\sin \angle CBA} = 2R$ $\triangle BAD$: $\frac{AD}{\sin (180^\circ - \angle CBA)} = 2R$

$\sin (180^\circ - \angle CBA) = \sin \angle CBA \Rightarrow AC = AD$

$\triangle CAD \sim \triangle FBD \Rightarrow \frac{BF}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{FD}{CD}$

$BD = 0,5 AC \Rightarrow BF = 0,5 CD$

$CF = \sqrt{(0,5 CD)^2 + (0,5 CD)^2} = 0,5 CD \cdot \sqrt{2}$

$$CD = 2R = 26$$

$$CF = 13\sqrt{2}$$

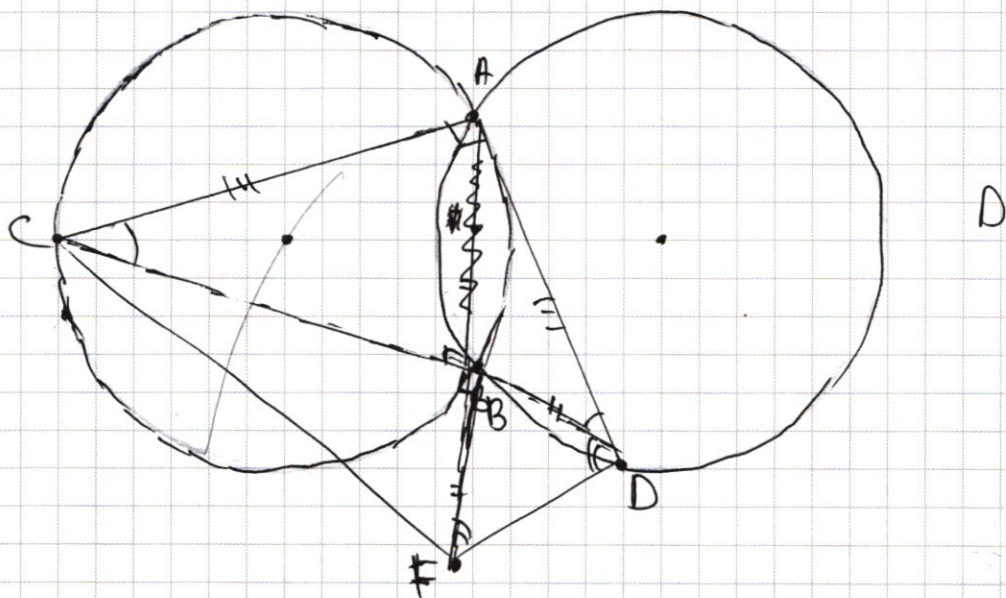
Ответ: а) $CF = 13\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

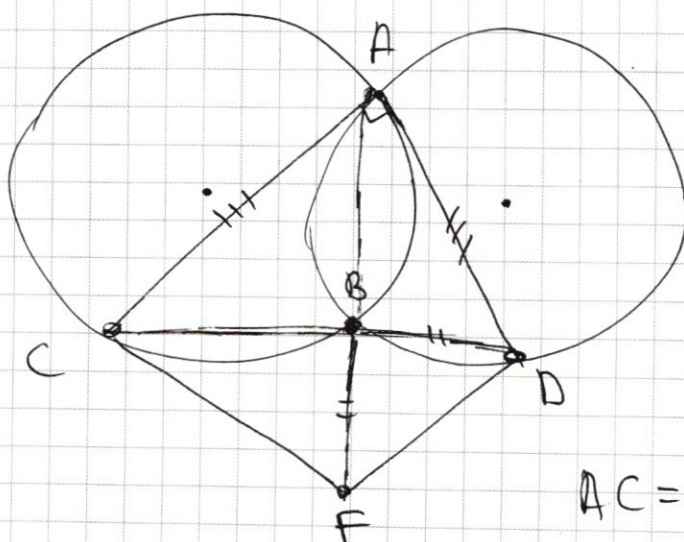
№ 6.

$$R = 13$$

CF = ?



$$\frac{AD}{\sin \angle \gamma} = 2R \quad \frac{AC}{\sin \angle \gamma} = 2R \Rightarrow AD = AC$$



CF = ?

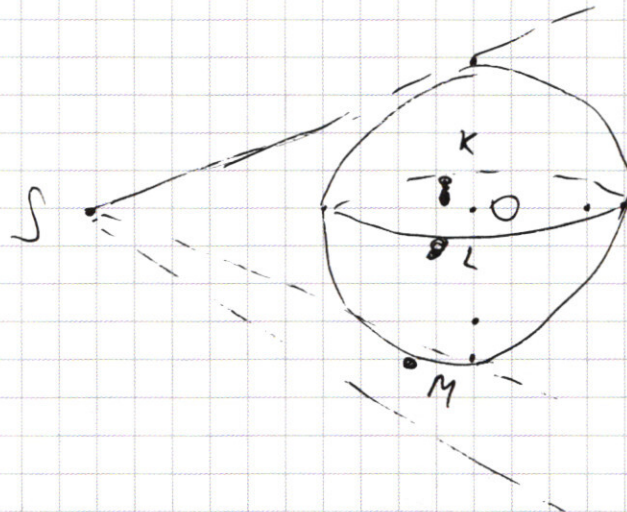
$$AC = AD = 2R = 26$$

$$BC = 13$$

$$BF = 13$$

$$CF = \sqrt{169 \cdot 2} = 13\sqrt{2}$$

N4.



N1.

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 8 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 16875 \quad | \quad 5 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -15 \\ \hline 32 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \quad | \quad 5 \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \quad | \quad 5 \\ -5 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \quad | \quad 5 \\ -10 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 27 \end{array}$$

5 5 5 5 3 3 3 8

$$N = \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 1!} \pm \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 280 + 210 \cdot 8 = 280 + 1680 = \boxed{1960}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

пусть $a = 64 = 8^2$

$$x = -2 \Rightarrow 16 + (y-8)^2 = 64$$

$$(y-8)^2 = 48 \quad |y| = \pm 4\sqrt{3} + 8 \approx 14,8, 1,2$$

$$y = \pm 14,8 \pm 1,2$$

~~$$x = -3 \Rightarrow 9 + (y-8)^2 = 64$$~~

$$(y-8)^2 = 55 \quad |y| = \pm \sqrt{55} + 8$$

$$(x-6-y) \vee 0 \quad y \vee (x-6)$$

$$(x-6+y) \vee 0 \quad y \vee (6-x)$$

$$1) x-6-y - x+6-y = 12 \Rightarrow y = -6$$

$$2) y-x+6+x-6+y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$3) y-x+6-y+x+6 = 12 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$4) x-6-y+x-6+y = 12$$

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12$$

кор $cR = \sqrt{a}$

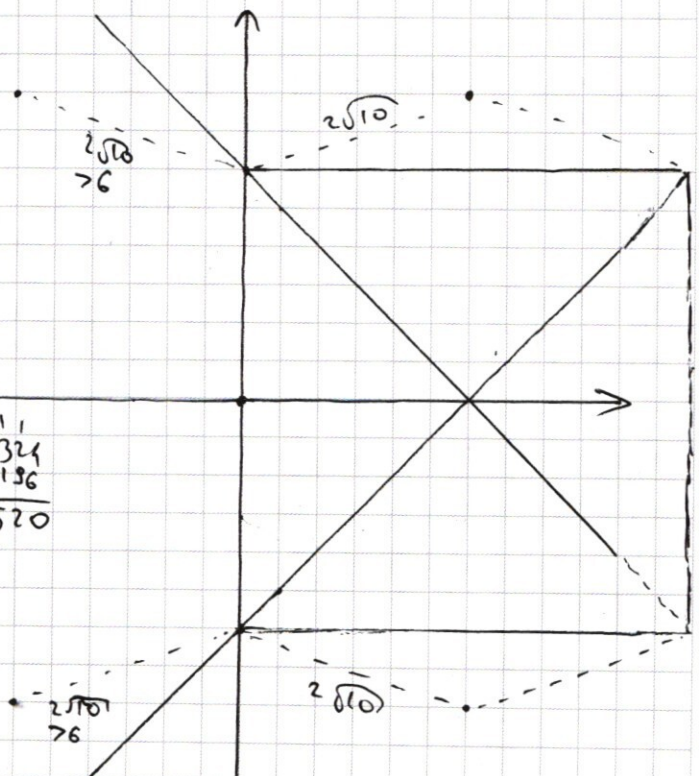
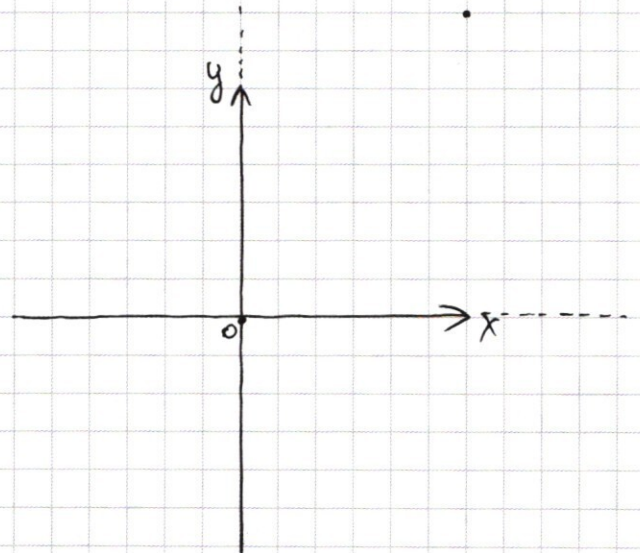
$$a = 4 \Rightarrow 2 \text{ реш.}$$

$$a > 2\sqrt{10} \quad \sqrt{14^2 + 6^2} = \sqrt{196 + 36} = \sqrt{232}$$

$$14^2 + 18^2 = 520$$

Ответ: $a = 4; 520$.

2 реш.



№2. (н.р.р.)

$$\sin\left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\textcircled{2} \sin\left(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\textcircled{3} \cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

№3. (н.р.р.)

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$(x^2)^4 \lg y - \lg(-xy) = y^4 \lg y$$

$$(x^2)^4 \lg y - \lg(-xy) = y^4 \lg y$$

$$(x^2)^4 \lg \frac{y^4}{xy} = (x^2)^4 \lg \left(\frac{y^3}{x}\right) = y^4 \lg y$$

$$\lg_{x^2} y^4 \lg y = \lg\left(\frac{y^3}{x}\right) = 3 \lg y - \lg(-x)$$

$$\frac{4}{2} \lg_{(-x)} y \cdot \lg y = 2 \lg_{(-x)} y \cdot \lg y = 3 \lg y - \lg(-x)$$

$$2 \frac{\lg y}{\lg(-x)} = 3(\lg y - \lg(-x)) \cdot \lg(-x)$$

$$2 \lg y = 3 \lg(-xy) - 6 \lg(-x) = 3 \cdot \lg\left(\frac{+xy}{+x^3}\right) = 3 \lg\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$3 \lg\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2 \lg y = 0 \quad \lg\left(\frac{y^3}{x^6}\right) - \lg y^2 = 0$$

$$\lg\left(\frac{y^3}{x^6} \cdot \frac{1}{y^2}\right) = \lg\left(\frac{y}{x^6}\right) = 0 \quad y = x^6$$

$$\lg_{(-x)}\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \quad (x=1) - \text{н.р.р.}$$

$$\lg_{(-x)} x^4 - \lg_{(-x)} y^2 = \lg(-xy)$$

$$4 = \frac{\lg y^4}{\lg(-x)} \cdot (\lg(-x) + \lg(y)) = \lg y^2 + \frac{\lg y^2}{\lg(-x)} \cdot \lg(y)$$

$$4 = \lg y^2 \left(1 + \frac{\lg y}{\lg(-x)}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \frac{\lg y}{\lg(-x)} = \frac{\lg\left(\frac{y^3}{-x}\right)}{\lg y} \quad 2 \log_{-x} y = \log_y \left(\frac{y^3}{-x}\right)$$

$$\frac{2}{\log_y(-x)} = \log_y y^3 - \log_y(-x) = 3 - \log_y(-x)$$

$$t = \log_y(-x) \quad \frac{2}{t} = 3 - t \quad \frac{2 - 3t + t^2}{t} = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1 \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \{2; 1\}$$

$$\frac{(t-1)(t-2)}{t} = 0 \quad t=1 \quad t=2$$

✓ 7.

3 → 8 → 29 →
→ 81 → 243

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$3^{81} \cdot 4 + 3^x \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x \quad (\text{т.е. } 85 + 3^{81} \cdot x - x)$$

$$3^{81} \cdot 4 + 3^x \leq y < 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$3^{81} \cdot 4 + 3^x \leq 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$\text{т.к. } (x=4) \Rightarrow \text{равенство.}$$

$$f_1'(x) = 3^x \cdot \ln 3 > 0$$

$$f_2'(x) = 3^{81} - 1 > 0$$

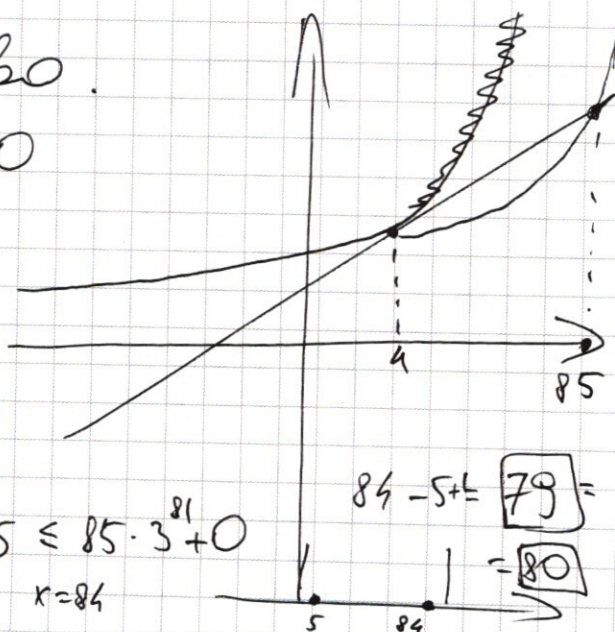
$$x=81 \Rightarrow 3^{81} \cdot 5 \vee 81 \cdot 3^{81} + 4$$

$$x=82 \Rightarrow 4 \cdot 3^{81} + 3^{82} \vee 82 \cdot 3^{81} + 4$$

$$x=83 \Rightarrow \dots$$

$$x=84 \Rightarrow 4 \cdot 3^{81} + 3^{84} \vee 84 \cdot 3^{81} + 4 \quad (x=85) \Rightarrow 3^{81} \cdot 85 \leq 85 \cdot 3^{81} + 0$$

$$4 \text{ и } 85 - \text{не год.} \Rightarrow \text{от } x=5 \text{ до } x=84$$



$$5 \leq x \leq 84$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 3 \\ \hline 729 \\ \times 3 \\ \hline 2187 \end{array}$$

$$x=5 \Rightarrow 3^{81} \cdot 4 + 243 < 5 \cdot 3^{81} + 80$$

$$3^{81} \cdot 4 + 243 \leq y < 5 \cdot 3^{81} + 80$$

$$163 \leq y < 3^{81}$$

$$x=6 \Rightarrow 3^{81} \cdot 4 + 729 < 6 \cdot 3^{81} + 78$$

$$3^{81} \cdot 4 + 729 \leq y < 6 \cdot 3^{81} + 78$$

$$650 + \cancel{729} \leq y < 2 \cdot 3^{81}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 4 \\ \hline 3240 \end{array}$$

$$x=7 \Rightarrow 3^{81} \cdot 4 + 2187 \leq y < 7 \cdot 3^{81} + 78$$

$$2108 \leq y < 3 \cdot 3^{81}$$

~~16387~~

$$x=84 \Rightarrow 31 \cdot 3^{81} \leq y < 3^{81} \cdot 84 + 1$$

$$0 \leq y < 53 \cdot 3^{81} + 1$$

$$N = (53 \cdot 3^{81} + 1) + \dots + (3 \cdot 3^{81} - 2108) + (2 \cdot 3^{81} - 650) + (3^{81} - 163)$$

$$\underline{85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^{81} \cdot 4 - 3^x} = \underline{(85 - x) + 3^{81}(x - 4) - 3^x}$$

$$(85 - 5) + \dots + (85 - 84) = 1 + \dots + 80$$

$$\frac{1 + 80}{2} \cdot \cancel{80} 40$$

$$3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84} = \cancel{3^5} 3^5 \cdot \frac{3^{(84-5+1)} - 1}{2} = 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2}$$

$$3^{81} \cdot (5 - 4) + \dots + 3^{81} \cdot (84 - 4) = 3^{81} \cdot (1 + \dots + 3^{81} \cdot 80) =$$

$$= 3^{81} \left(\frac{1 + 80}{2} \cdot 80 \right)$$

$$\cancel{f_2(x) - f_1(x)} = (f_2(5) - f_1(5)) + (f_2(6) - f_1(6)) + \dots + (f_2(84) - f_1(84)) =$$

$$= 81 \cdot 40 + 3^5 \cdot \frac{3^{80} - 1}{2} +$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 10x = 0$$

$$\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x - \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = -2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(17x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = \cos 10x$$

$$-2 \cos 4x \cdot \sin 10x = \cos 10x \quad 2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = \sin \left(10x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = 2 \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\textcircled{1} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \textcircled{2} \cos 2x = \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left(-5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

✓ 3.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} y &\neq 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$-xy > 0 \Rightarrow xy < 0$$

$$x < 0$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$2(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 4x + 8) = xy$$

$$xy = 2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{2\lg y} = (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{4\lg y} = (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{(x^2)^{4\lg y}}{y^{4\lg y}} = (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$| : (x^2)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{(x^2)^{4\lg y - \lg(-xy)}}{y^{4\lg y}} = 1$$

$$(x^2)^{4\lg y - \lg(-xy)} = y^{4\lg y}$$

$$\begin{aligned} xy &= 2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4 = (2y - 2 \cdot 2)^2 - (x+2)^2 - 4 = \\ &= (2y - 2 \cdot 2 - x - 2)(2y - 2 \cdot 2 + x + 2) - 4 = \\ &= (2y - x - 2(2+1))(2y + x + 2(1-2)) - 4 \end{aligned}$$

$$xy = 2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4 \quad xy < 0 !$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4 < 0 \Rightarrow 2(y-2)^2 - (x+2)^2 < 4$$

$$2x^{12} - x^7 - x^2 - 4x - 8x^6 = 0$$