

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $64827 = \cancel{9 \cdot 7203} = \cancel{9 \cdot 8 \cdot 801} = \cancel{9 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 89}$
 $= 9 \cdot 7203 = 9 \cdot 3 \cdot 2401 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 343 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$
 $= 3^3 \cdot 7^4$

Такое произведение из 8 цифр можно получить двумя способами:

1) три 3, четыре 7 и одна 1

2) одна 3, одна 9, четыре 7 и две 1.

1) Таких чисел всего: $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5$

2) Таких чисел всего: $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$

Тогда суммарно всех таких чисел: $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (3+1) =$
 $= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$

Ответ: 1120

2. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad (\Rightarrow)$

$(\Rightarrow) 2 \cos 4x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 4x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad (\Rightarrow)$

$(\Rightarrow) \cos 4x (\cos 2x + \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \quad (\Rightarrow)$

$(\Rightarrow) \cos 4x = 0$

$\cos 2x + \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\Rightarrow)$

$(\Rightarrow) 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = -\frac{1}{2}$

$(\Rightarrow) \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\Rightarrow)$

~~$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{2} + 2\pi n \end{cases}$~~

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \pi k \\ x = -\frac{13\pi}{24} + \pi m \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$; $\frac{7\pi}{24} + \pi k$; $-\frac{13\pi}{24} + \pi m$, где $n, k, m \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 3. \int \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} &= x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y &= 0 \quad \Rightarrow \int \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ & \Rightarrow (x+y+2-2x+2)(x+y+2+2x-2) = 0 \Leftrightarrow (-x+y+4)(3x+y) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Разбор случаев:

$$1) \int \begin{cases} -x+y+4=0 \\ \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \end{cases} \Rightarrow \int \begin{cases} -x+y+4=0 \\ e^{\ln(-\frac{x^7}{y}) \cdot \ln(-y)} = e^{\ln x \cdot 2\ln(xy^2)} \end{cases}, \text{ т.к.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+4=0 \\ (7\ln x - \ln(-y)) \cdot \ln(-y) = 2\ln x \cdot (\ln x + 2\ln(-y)) \end{cases} \begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{x^7}{y} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+4=0 \\ 7\ln x \cdot \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2\ln^2 x + 4\ln x \ln(-y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+4=0 \\ 2\ln^2 x - 3\ln x \cdot \ln(-y) + \ln^2(-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+4=0 \\ 2\ln x (\ln x - \ln(-y)) - \ln(-y) \cdot (\ln x - \ln(-y)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y+4=0 \\ 2(2\ln x - \ln(-y))(\ln x - \ln(-y)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+4=0 \\ \begin{cases} x^2 = -y \\ x = -y \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ -x^2 - x + 4 = 0 \\ -2x + 4 = 0 \\ -y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = 4 - \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y < 0 \end{cases}, \text{ т.к. } 4 < \sqrt{17} < 5, \text{ то } 2 < 4 - \frac{-1+\sqrt{17}}{2} < \frac{5}{2}$$

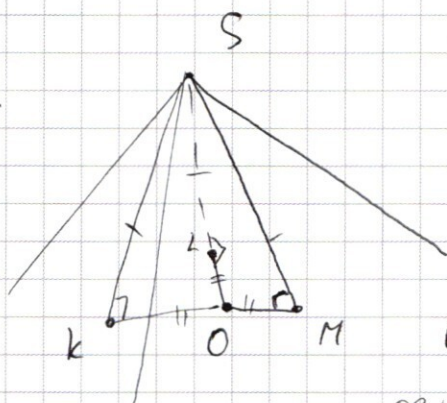
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \begin{cases} 3x+y=0 \\ (2\ln x - \ln(-y))(\ln x - \ln(-y))=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=0 \\ x^2=-y \\ x=-y \\ y<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-9 \\ x=0 \\ y=0 \\ x>0 \\ y<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-9 \end{cases}$$

Ответ: $(3; -9); (2; -2)$.

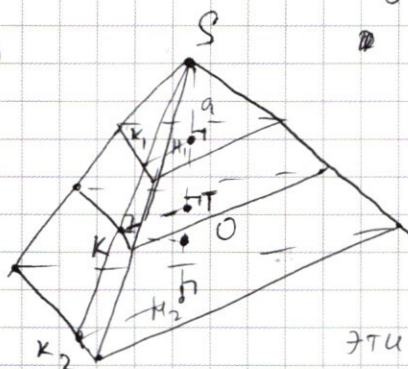
4.



1) $SK=SM=SL$ - отрезки кас.
 $KO=LO=MO$ - радиусы
 SO - общ.

$\triangle SKO = \triangle SMO = \triangle SLO$, значит
высоты из K, L, M на SO попадут в
одну точку $\Rightarrow (KLM) \perp SO$

2)



Плюс, т.к. все сечения $\perp SO$,
то у нас получается 3 подобных
тр-ка.

Пусть $SH_1 = a$, $H_1H_2 = 2R$, т.к.

эти плоскости $\parallel$ и кас. одной сферы,

тогда $\frac{K_1H_1}{K_2H_2} = \frac{3}{4}$, т.к. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{16}$, а тр-ки подобны;
значит $\triangle SK_1H_1 \sim \triangle SK_2H_2 \Rightarrow \frac{2R+a}{a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2R+a = \frac{4}{3}a$
 $\Leftrightarrow 2R = \frac{a}{3} \Leftrightarrow R = \frac{a}{6}$ 3) $\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{a+R} = \frac{\frac{a}{6}}{\frac{7a}{6}} = \frac{1}{7}$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}, \text{ т.к. } \angle KSO < 90^\circ$$

$$4) KT = R \cdot \sin \angle KOS = R \cdot \sin(90^\circ - \angle KSO) = R \cdot \cos \angle KSO$$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \quad \operatorname{tg} \angle KSO = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$KT = R \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{1}{6}a \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{21}a$$

$$K_1H_1 = \operatorname{tg} \angle KSO \cdot a = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$

Коэф. пропорц. верхнего и среднего тр-ка: $k = \frac{KT}{K_1H_1}$

$$k = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{21}a}{\frac{a}{4\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{21} = \frac{8}{7}, \text{ тогда их площадь}$$

$$\text{ги относятся как } k^2 = \frac{64}{49}$$

$$S_{\text{ср}} = \frac{64}{49} \cdot 9 = \frac{576}{49}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{7}; \frac{576}{49}}$$

5. $a = ?$ $\exists$ ровно два решения

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (\Leftrightarrow \text{Разбор случаев:}) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (\text{примем } a \geq 0.) \end{cases}$$

Плоскость Oxy

$$1) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ 2x+16=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y \geq 8 \\ y \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=8 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ 2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ x \geq -16 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq x < 0 \\ y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq x < 0 \\ y=8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-8 \\ x < 0 \\ x \geq -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16 \leq x < 0 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \\ -2x=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-16 \\ y < 8 \\ y > -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-16 \\ -8 < y < 8 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Плоскость Oxy :

Найдём a_1 :

$$\sqrt{a_1} = h$$

$$\sqrt{a_1} = 7 \quad a_1 = 49$$

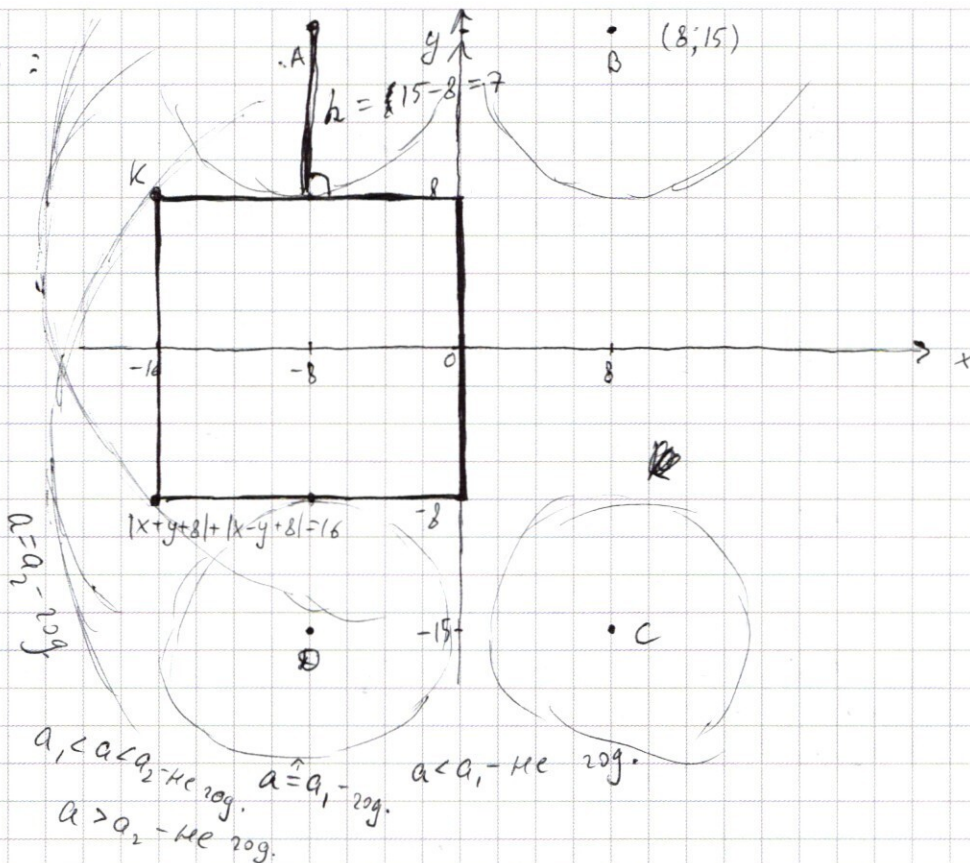
Найдём a_2 :

$$\sqrt{a_2} = KC$$

$$KC = \sqrt{(8 - (-16))^2 + (-15 - 8)^2}$$

$$a_2 = 24^2 + 23^2$$

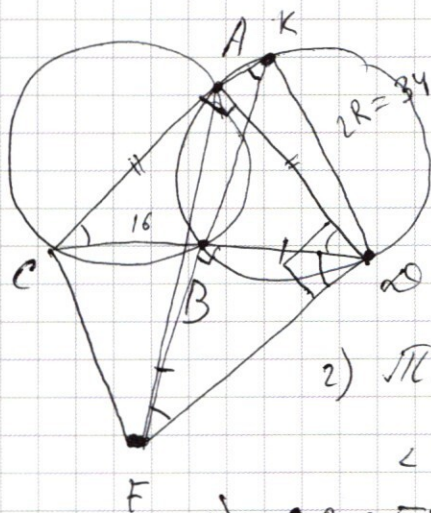
$$a_2 = 1105$$



По, что спрашивается ($\Rightarrow$) $a = 49$; $a = 1105$.

Ответ: $a = 49$; $a = 1105$.

6.



1) Пл. к. окр. равны, а
с с и с D описываются
на сим. отнес. АВ дуги, то
 $\angle C = \angle D = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

2) Пл. к. $\triangle FBD$ - р/д, а $\angle B = 90^\circ$, то
 $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

3) $CA \cap FB = K$, $\angle CKB = 180^\circ - \angle B - \angle C = 45^\circ$,

т.к. $\angle K = \angle D$, то $K \in$ окр., тогда KD - диаметр, т.к. $\angle KAD = 90^\circ$

4) П.к. $\angle KCD = \angle KFD$, то четириъг. $KCFD$ -вписан. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ из двух т. синусов $\frac{KD}{\sin \angle KFD} = 2r$ и $\frac{CF}{\sin \angle CKF} = 2r$,
 где r - радиус ол. около $KCFD$ окр., значит

$$\frac{KD}{\sin 45^\circ} = \frac{CF}{\sin 45^\circ} \Leftrightarrow KD = CF \Leftrightarrow CF = 2R$$

$$CF = 2 \cdot 17 = 34$$

5) ~~BC~~ ^{BC} $= BK$, т.к. $\triangle KB\overset{C}{D}$ - р/д $\Rightarrow BK = 16$

6) По т. Пифагора из $\triangle CBF$

$$BF = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{18 \cdot 50} = 30$$

7) $BD = BF$, т.к. $\triangle FBD$ - р/д $\Rightarrow BD = 30$

$$8) CD = CB + BD = 16 + 30 = 46$$

9) $AC = \frac{\sqrt{2}}{2} CD$ (из тригонометрии)

$$AC = 23\sqrt{2}$$

10) $AD = AC$, т.к. $\triangle CAD$ - р/д $\Rightarrow AD = 23\sqrt{2}$

$$11) S_{\triangle ACF} = S_{CAFD} - S_{\triangle ADF}$$

$$S_{CAFD} = \frac{1}{2} (AC + FD) \cdot AD, \text{ т.к. } CAFD - \text{трапеция}$$

$$S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} AD \cdot DF$$

($CA \parallel FD + \angle A = \angle D = 90^\circ$)

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot AD + \frac{1}{2} DF \cdot AD - \frac{1}{2} AD \cdot DF = \frac{1}{2} AC \cdot AD$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 23\sqrt{2} = 23^2 = 529.$$

Ответ: а) 34; б) 529.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Найти кол-во пар (x, y)

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3^{28} - 3x \end{cases}$$

$$1) \quad 3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3x \Leftrightarrow 3^x + 3x < 93 - 3^{28} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow x < 31 - 3^{28} \quad (\text{т.к. } 3^x > 0)$$

2) При $\forall x < 31 - 3^{28}$

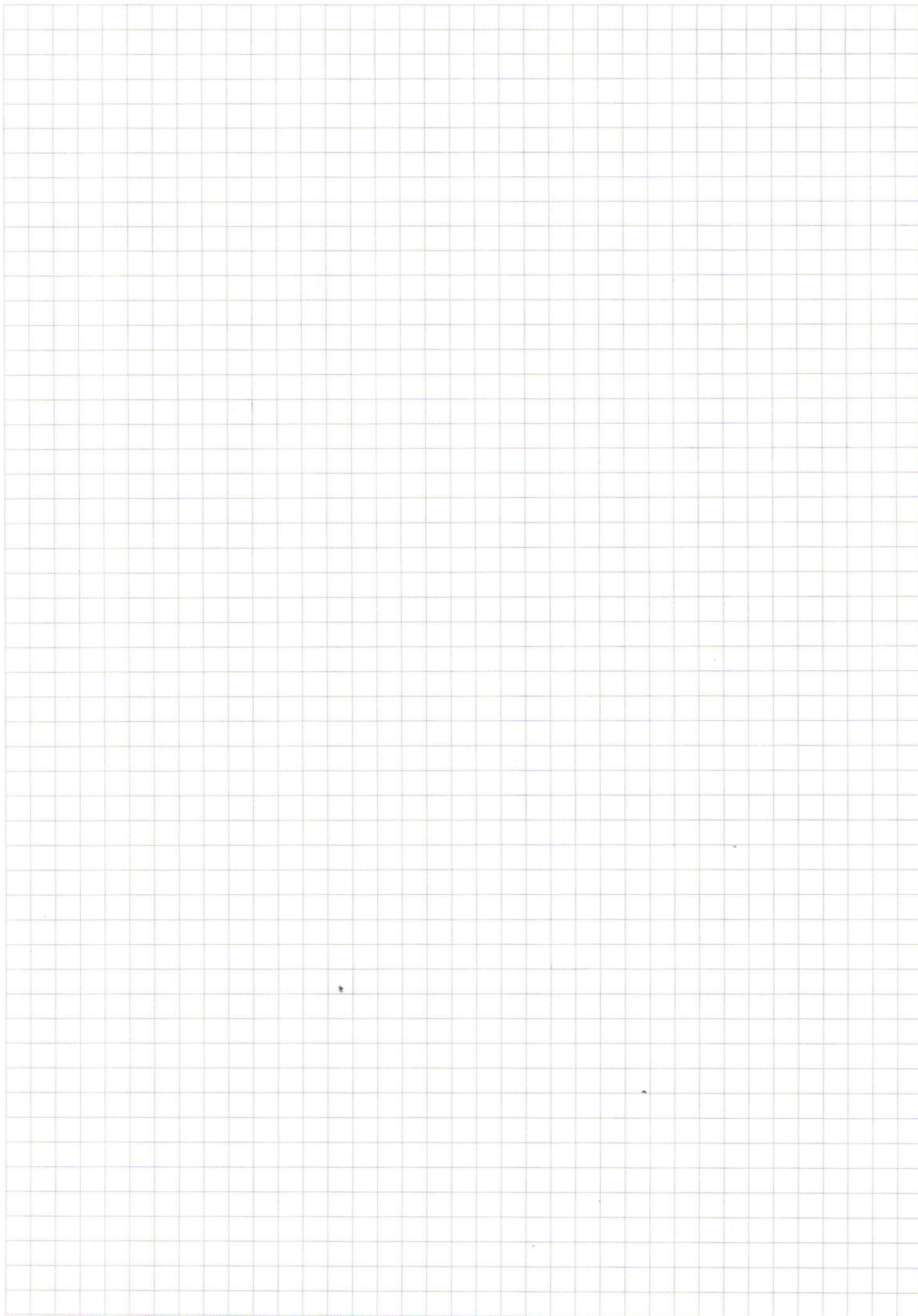
Кол-во y равно $93 + 3^{28} - 3x - 4 \cdot 3^{28}$ (т.к. $3^x < 1$ при $x < 0$)

$$= 93 - 3^{29} - 3x, \text{ значит всего}$$

таких пар: бесконечная сумма:

$$\begin{aligned} & (93 - 3^{29} + 3^{30} - 90) + (93 - 3^{29} + 3^{30} - 90 + 3) + \dots + \\ & + \dots = 3 \cdot ((31 - 3^{28} + 3^{29} - 30) + (31 - 3^{28} + 3^{29} - 29) + \dots + \\ & + \dots) = 3 \cdot ((2 \cdot 3^{28} + 1) + (2 \cdot 3^{28} + 2) + \dots) = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} (2 \cdot 3^{29} + 3 \cdot i) \end{aligned}$$

Ответ: $\sum_{i=1}^{\infty} (2 \cdot 3^{29} + 3 \cdot i)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+y)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(x+y)^2 - (2x-3)^2 + 4y + 9 = 0$$

$$(-x+y+3)(3x+y-3) + 4y + 9 = 0$$

$$(x+y+2)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4$$

$$-4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$-(2x-2)^2 = 0$$

$$(x+y+2)^2 - (2x-2)^2 = 0$$

$$(-x+y)(3x+y) = 0$$

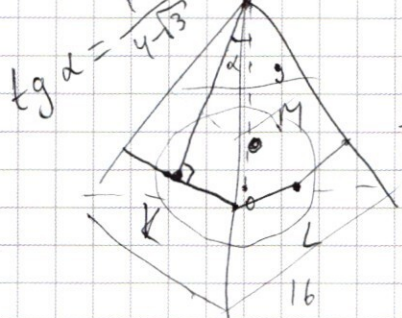
$$x^2 + y^2 + 4 - 4x^2 - 4 + 2xy + 4x + 4y + 8x =$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

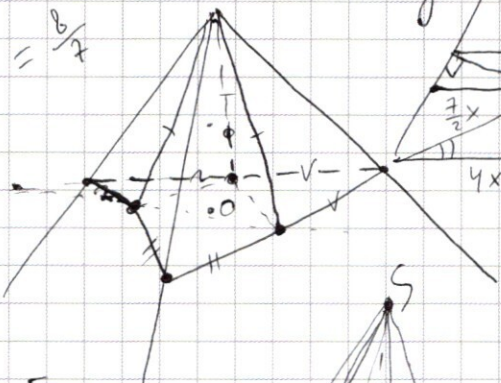
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{2\sqrt{3}}{21} a$$

$$R \cdot \sin = \frac{1}{6} a \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{a}{4\sqrt{3}}$$



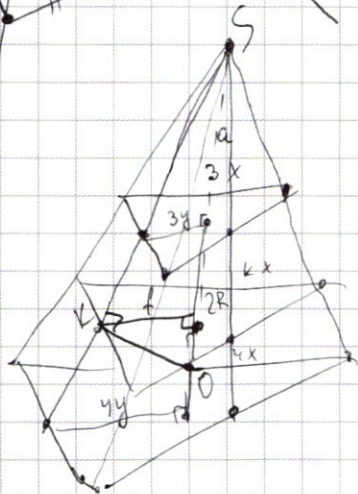
$$\frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{21} = \frac{8}{7}$$



$$\cos \alpha = \frac{R}{a+R} =$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{6} a}{\frac{7}{6} a} = \frac{1}{7}$$

$$x = a \sin \alpha$$



$$\frac{a+2R}{a} = \frac{4}{3}$$

$$a+2R = \frac{4}{3} a$$

$$R = \frac{1}{6} a$$

