

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИ

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

У1.

Разложим число 16875 на множители, получим
 $16875 = 3^3 \cdot 5^4$.

Т.к. $3 \cdot 5 = 15$, $5 \cdot 5 = 25$, то 3 и 5 или 5 и 3 в произведении не могут быть одной цифрой, также как и $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Значит, обязательно 4 цифры - разные цифры, такие как ~~и~~

Дальше возможны 2 случая:

- 1) В числе есть девятки
- 2) В числе нет девяток.

В 1 случае девятка только одна, т.к. 2 девятки в произведении - уже 3^2 .

Тогда получаем, что в числе точно есть такие цифры: 3, 9 и 4 пятерки.

Т.к. других множителей в числе 16875 нет, то остальные цифры - единицы, их две.

Получаем перестановки с повторениями из четырех цифр: 2 единицы, тройка, 4 пятерки и девятка.

$$P = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{8!}{2! \cdot 4!}$$

Во 2 случае в числе точно 3 тройки и 4 пятерки. Т.к. других множителей в исх. числе нет, то восьмью цифра - единица.

Тогда получаем перестановки с повторениями из 3-х групп: единица, 4 пятерки и 3 тройки.

$$P = \frac{8!}{1! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{8!}{4! \cdot 3!}$$

т.к. 2 случая независим друг от друга, их необходимо сложить.

$$\text{Ответ: } \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot (3! + 2!)}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 5}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2007}{20 \cdot 56} = 10 \cdot 112 = 1120 = 1400.$$

Ответ: 1400.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12. & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a. & (2) \end{cases}$$

ровно 2 решения.

Реш I ур-ние системы

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12.$$

возможны 4 случая раскрытия модулей:

$$\begin{aligned} 1) ++ & \Rightarrow x-6-y + x-6+y = 12 \quad \text{при } \begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \geq 6. \end{cases} \\ & \Rightarrow x = 12 \\ 2) +- & \Rightarrow x-6-y - (x-6+y) = 12 \quad \text{при } \begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y < 6. \end{cases} \\ & \Rightarrow y = -6 \\ 3) -+ & \Rightarrow y+6-x + x-6+y = 12 \quad \text{при } \begin{cases} x-y < 6 \\ x+y \geq 6. \end{cases} \\ & \Rightarrow y = 6 \\ 4) -- & \Rightarrow -x+6-y - (x-6+y) = 12 \quad \text{при } \begin{cases} x-y < 6 \\ x+y < 6. \end{cases} \\ & \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Реш II ур-ние системы:

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a. \quad \text{Оно такое относительно } x \text{ и } y \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ достаточно построить при $x \geq 0; y \geq 0$ и симметрично отобразить на все четверти.

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$ — ур-ние окр-сти с центром в т. $(6; 8)$ и радиуса $\sqrt{a}$.

При $a < 0$ решений нет, при $a = 0$ окр. вырожденная $\Rightarrow$ 1 решение максимум.

значит, $a > 0$.

Построим I ур-ние системы в координатах xOy , где этой системой определим границы областей, огранич. прямыми $x-y=6$ и $x+y=6$

$$1) \quad y = x - 6$$

x	0	6
y	-6	0

$$2) \quad y = 6 - x$$

x	0	6
y	6	0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставим в любую систему
неравенств точку $P(a; b)$
определим, как раскрыть

Подставим точки из каждой
области в уравнение
 $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$,
чтобы понять,
как раскрыть
модули.

При $(0; 0)$ оба с минусом $\rightarrow$
 $\Rightarrow x=0$.

При $(6; 6)$ $|x-6-y|$ с $+$, а
 $|x-6+y|$ с $+$ $\Rightarrow$
 $\Rightarrow y=6$.

При $(12; 0)$
оба с плюсом $\Rightarrow x=12$.

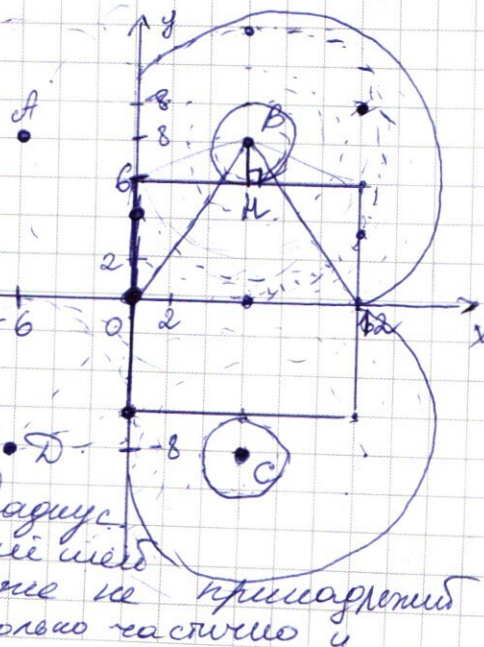
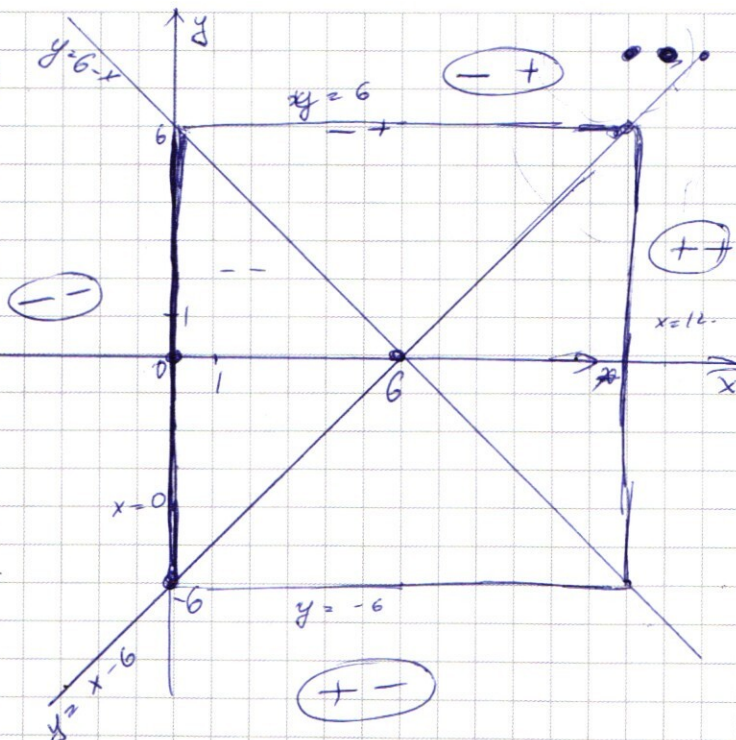
При $(6; -6)$ $|x-6-y|$ с $+$, а $|x-6+y|$ с $-$ $\Rightarrow y=-6$.

Получается квадрат.

Начертим в любых масштабах и отметим
центры каждой из частей окр-сти второго
уравнения системы.

Обозначим эти центры
точками $A; B; C$ и D .

Заметим, что, т.к. окр-сти
одинакового радиуса, то если
окр-с с центром в точке
 B касается / пересекает
квадрат, то и окр-с с центром
в точке C тоже, а также
окр-сти с ч. в точках A и
 D либо дают сразу 2 точки,
либо ни одной т.к. если радиус
большой, чем r или до ближайшей
точки квадрата, то он уже не
касается четверти полностью, только частично и



симметрично относительно $y=8$ и $y=-8$ соответственно для A и D .

Тогда возможны 2 случая:

- 1) Окружности касаются точки C и B , радиус ≤ 10 , или $r > 10$ (т.к. в данном случае видно, что окружности не касались точки окр. с радиусами в точках A и D).

Тогда радиус равен r или 0 от B до квадрата т.е. 2 случая $\Leftrightarrow$ окр. стб пересекает квадрат минимум в 2-х точках, т.е. в силу симметрии, точек пересч. не менее четырех.

При $\sqrt{a} > 2$, будет 4 решения до того момента, пока не будет проходить через точку $(6;0)$ и симметричные ей относ. $(0;0)$ соответственно.

После данной точки решений будет 3, т.к.

При $a > 2$ будет 4 решения до того момента, пока радиус не станет равным $\sqrt{6^2+8^2}$ — как восторжничеству большому, чтобы пройти через точки $(0;0)$ и $(12;0)$ у окр. стб с центрами в точках B и C и $(0;0)$ и $(-12;0)$ в силу симметрии, у окр. стб с центрами в точках A и D .

От радиус в таком случае равен $\sqrt{6^2+8^2} = 10$, при этой окружности (точнее, части, находясь в соотв. четвертях) нигде больше не пересекут квадрат.

Тогда всего 2 варианта радиуса: $r=2$ и $r=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=4$ и $a=100$.

Ответ: $\{4; 100\}$.

§ 3.

$$\int \left(\frac{x^4}{y^2}\right) dy = (-x)^{4(-xy)} \quad (1)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y = 0 \quad (2).$$

Решим ур. (2).

$$x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = (3y-4)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-y-4+3y-4}{2} = y-4 \\ x = \frac{-y-4-3y+4}{2} = -2y \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим уравнение (2):

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

Подставим $x = -2y$:

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^2 \lg y$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (4y^2)^{\lg y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lg y = 0 \\ 16y^2 = 4y^2 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \rightarrow y = -1 \\ y > 0 \end{cases}$$

Тогда $x = -2$.

Подставим $x = y - 4$.

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y) \cdot y}$$

Тогда $\begin{cases} y > 0 \\ y - 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow y \in (0; 4)$.

$$\frac{(y-4)^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y) \cdot y} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$\frac{(y-4)^4 \lg y}{(4-y)^{\lg(4-y) \cdot y}} = (4-y)^{\lg y}$$

$$\frac{(4-y)^{\lg y^4}}{(4-y)^{\lg(4-y) \cdot y}} = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^{\lg y^4 - \lg(4-y) \cdot y} = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^{\lg \frac{y^4}{4-y}} = y^2 \lg y$$

$$(3 \lg y - \lg(4-y)) \lg(4-y) = 2 \lg^2 y$$

Пусть $\lg y = a$; $\lg(4-y) = b$.

Проинтегрируем
обе части по основанию
10 и воспользуемся
свойствами логарифмов
о возведении в степень:

$$(3a-b)b = 2a^2.$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0.$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = 0.$$

$$b_1 = \frac{3a+a}{2} = 2a$$

$$b_2 = \frac{3a-a}{2} = a.$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y) & (1) \\ \lg y = 2 \lg(4-y) & (2) \end{cases}$$

$$\lg y = 2 \lg(4-y) \quad (2)$$

→ решим (1): $y = 4-y \rightarrow$

Тогда $x = -2. \rightarrow y = 2.$

решим (2): $y = (4-y)^2 \rightarrow$

$$\rightarrow y^2 - 9y + 16 = 0.$$

$$D = 81 - 64 = 17.$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \\ y_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad \text{Но: } \frac{9+\sqrt{17}}{2} > \frac{9+1}{2} = 5.$$

по условию, ограничению,

$y \in (0; 4) \rightarrow y_1$ не подходит.

$$y_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{2} < \frac{9-\sqrt{16}}{2} = 2.5.$$

$$y_2 > \frac{9-\sqrt{25}}{2} = 2. \rightarrow y_2 \text{ подходит}$$

$$\text{Тогда } x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

Объединяя ответы, получаем: $(-2; 2); (-2; 1); (\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$.

Ответ: $(-2; 1); (-2; 2); (\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$.

БЛ.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \cos 2x \sin 5x = 0.$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0.$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0.$$

$$(\cos 5x - \cos(90^\circ - 5x)) (\sqrt{2} \cos x - \cos 5x - \cos(90^\circ - 5x)) = 0.$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \cos(90^\circ - 5x) = 0. & (1) \\ \sqrt{2} \cos x - \cos 5x - \cos(90^\circ - 5x) = 0. & (2) \end{cases}$$

$$\cos 5x - \cos(90^\circ - 5x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 45^\circ \sin(5x - 45^\circ) = 0.$$

Решим (1) ур-ние совокупности:

$$\cos 5x - \cos(90^\circ - 5x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 45^\circ \sin(5x - 45^\circ) = 0.$$

$$\sin(5x - 45^\circ) = 0 \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20}, n \in \mathbb{Z}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Реш.~~

Решим (2) ур-ние совокупности:

$$\sqrt{2} \cos x - \cos 5x - \cos(90^\circ - 5x) = 0.$$

$$\sqrt{2} \cos x - 2 \cos 45^\circ \cos(5x - 45^\circ) = 0.$$

$$\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \cos(5x - 45^\circ) = 0.$$

$$-2 \sin(-2x + \frac{\pi}{8}) \sin(3x - \frac{\pi}{8}) = 0.$$

$$\begin{cases} -2x + \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - \frac{\pi}{8} = \pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Проверим полученные серии на совпадение корней.

$$\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}$$

$$2n + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} + 5k \Rightarrow n = \frac{1}{16} + \frac{5k}{2}, \text{ но при } k \in \mathbb{Z} \text{ в таком ряду } n \notin \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi l}{3}$$

$$3n + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + 5l \Rightarrow n = \frac{5l}{3} - \frac{1}{24} \text{ но при } l \in \mathbb{Z}, n \notin \mathbb{Z}.$$

$$\frac{1}{16} + \frac{k}{2} = \frac{1}{24} + \frac{l}{3} \Rightarrow 3k + \frac{3}{8} = \frac{1}{6} + 2l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \frac{3k}{2} - \frac{1}{8}, \text{ но при } k \in \mathbb{Z}, l \notin \mathbb{Z}.$$

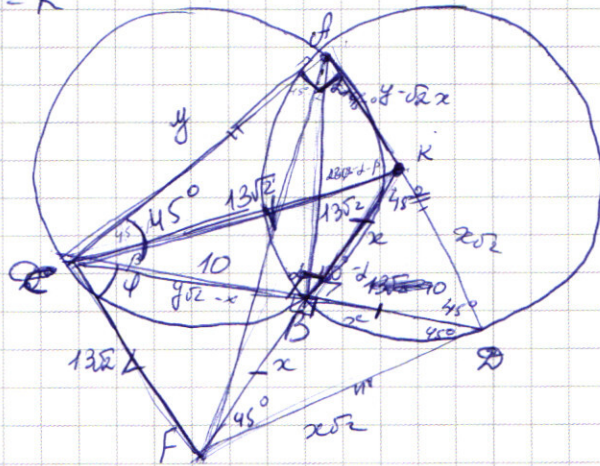
значит, серии не пересекаются.

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{24} + \frac{\pi l}{3}, n, l, k \in \mathbb{Z}.$

56.

Dано: $w_1, w_2; R_1 = R_2 = 13. = R$
 $w_1 \cap w_2 = A, B.$
 $C \in w_1, D \in w_2;$
 $B \in CD$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD;$
 $BF = BD.$
 $CF = ?$

5) $BC = 10$.
SACF - ?



Решение:

a) 1) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle ABD = 180^\circ - \alpha$.

то ∇ равно, $R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$; $R = \frac{AD}{2\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{AD}{2\sin\alpha} \rightarrow$
 $\rightarrow AC = AD$

Значит, $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

2) Продолжим $B\Gamma$ до пересечения с AD . Пусть данная точка - K .

T.k. $BF \perp BD$ u $\angle FBD = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = 45^\circ = \angle BDA \Rightarrow$

$\Rightarrow BD - \text{Suc-ca} \leq BDA$. Но B и BK $BD - \text{Suc-ca}$ и
 вобщем $\Rightarrow KD \sim DF$; $BK \sim BF$

3) $P_{\text{мд}} C_{KF} : BK \approx BF; CB \perp KF \Rightarrow \Delta KCF - \text{прямоугольный}; CK \approx CF.$

Пример $BD = x$, тогда $BF = x$, $DF = x\sqrt{2} = kL$

$$AD = y, \text{ тогда } AC = y; HK = y - x\sqrt{2}; CN = y\sqrt{2}; CB = y\sqrt{2} - x$$

~~Но ∇ функция где Δ CBF,~~

Т.к. $\angle CBK = 90^\circ$ и $\angle CAK = 90^\circ$, а эти углы
в противоположн. $\angle$ $CAKB$ и C, A, B лежат на ω ,
то и $K \in \omega$.

4) To ∇ ciągłob gwo $\triangle ABC$, $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = R \Rightarrow AB = R\sqrt{2}$.

5) По ∇ треугольника $AKBC$, $AK^2 + BK^2 + AC^2 + BC^2 = CK^2 + AB^2$.
По ∇ треугольника CKB , $CK^2 = CB^2 + BK^2$.

по теореме гур AKC , $CK^2 = AC^2 + AK^2$.

Подставим полученные выражения в ∇ получим:

$$2CK^2 = CK^2 + AB^2 \Rightarrow CK = CF = AB = 13\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $BC = 10$; $BF = \sqrt{338-100} = \sqrt{238}$

а) При $BC = 10$, $BF = \sqrt{238} \Rightarrow \sin \angle BCF = \frac{\sqrt{238}}{13} = \frac{\sqrt{119}}{13}$
по теореме Пифагора для $\triangle ACB$, $AC^2 = \sqrt{338+100} = \sqrt{438}$

$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \varphi)$, где φ - угол BCF

$\sin \angle ACF = \sin 45^\circ \cos \varphi + \cos 45^\circ \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{119}}{13} + \frac{5\sqrt{2}}{13} \right)$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 13\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{219} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{119} + 5\sqrt{2}}{13} \right) =$
 $= \frac{\sqrt{219} (\sqrt{119} + 5\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

Ответ: а) $13\sqrt{2}$ б) $\frac{\sqrt{219} (\sqrt{119} + 5\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

б) $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x \end{cases} \Rightarrow 85 + 3^{81} \cdot x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
 $81 + 4 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} \leq$
 $= (4-x) \Rightarrow 3^{81}(4-x) + 81 - 3^x \geq 0. \Leftrightarrow (4-x) - 3^{81}(4-x) + (3^4 - 3^x) > 0.$

$(4-x) - 3^{81}(4-x) + 3^4 - 3^x > 0.$

$(1-3^{81})(4-x) + 3^x(3^4 - 1) > 0.$

$(4-x)(1-3^{81}) + 3^x(3^{4-x} - 3^{\log 3^0}) > 0$

$(4-x)(3^{81} - 3^0) + (3^4 - 3^x) < 0.$

Используем метод
рационализации:

$(4-x) \cdot 81 - (4-x) \geq 0.$
 $80(4-x) < 0.$
 $x \geq 4.$

При $x > 4$, $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow$

$(4-x)(3^{81} - 3^0) < (3^4 - 3^x)$

Прологарифмируем
получ. выражение по осн. 3, знак
не изменится.

$$\log_3(4-x) + \log_3(3^{81}-3^0) < \log_3(3^4-3^x).$$

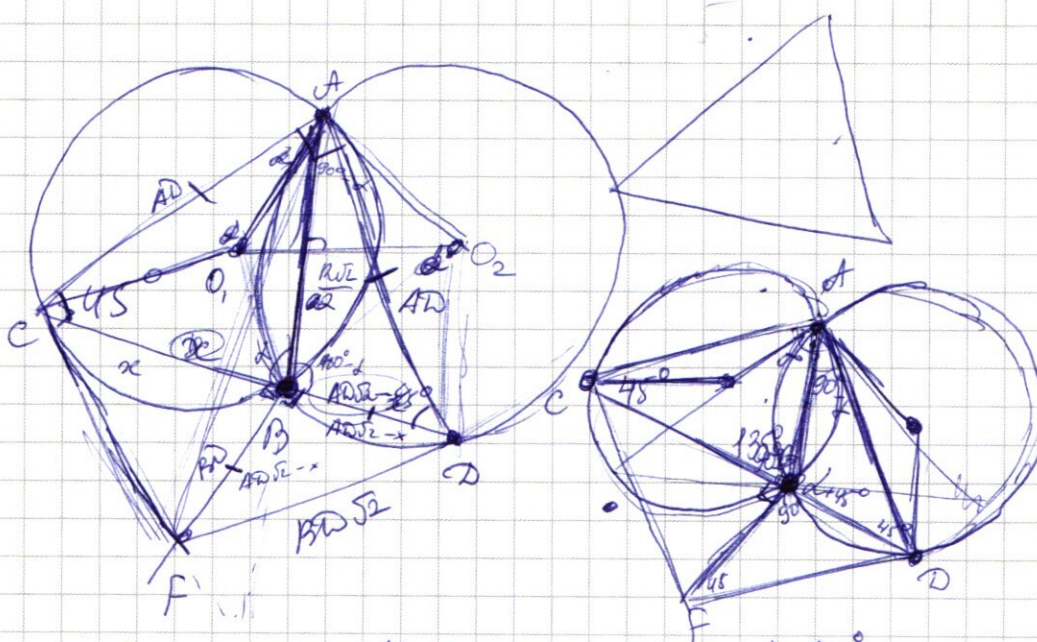
$$\log_3(3^4-3^x) - \log_3(4-x) > \log_3(3^{81}-3^0).$$

$$\log_3\left(\frac{3^4-3^x}{4-x}\right) > \log_3(3^{81}-3^0).$$

$$x-4 < 0.$$

$$\frac{3^4-3^x}{4-x} > 3^{81}-3^0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AC}{2 \sin \alpha} = R \quad \frac{AD}{2 \sin(180^\circ - \alpha)} = R \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \alpha} \Rightarrow AC = AD; \quad \angle C = \angle D$$

$$\angle C = \alpha \Rightarrow BD = (AD\sqrt{2} - \alpha)$$

$$CF = \alpha^2 + (AD\sqrt{2} - \alpha)^2 = 2\alpha^2 - 2\sqrt{2}AD \cdot \alpha + 2AD^2$$

$$a^2 + \alpha^2 - 2a\alpha \cos \alpha = a^2 + (AD\sqrt{2} - \alpha)^2 + 2a\alpha \cos \alpha = AD^2$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 2\sqrt{2}AD \cdot \alpha + 2AD^2 + 2a\alpha \cos \alpha = AD^2$$

$$2AD^2 + 4a\alpha \cos \alpha - 2\sqrt{2}AD \cdot \alpha = 0$$

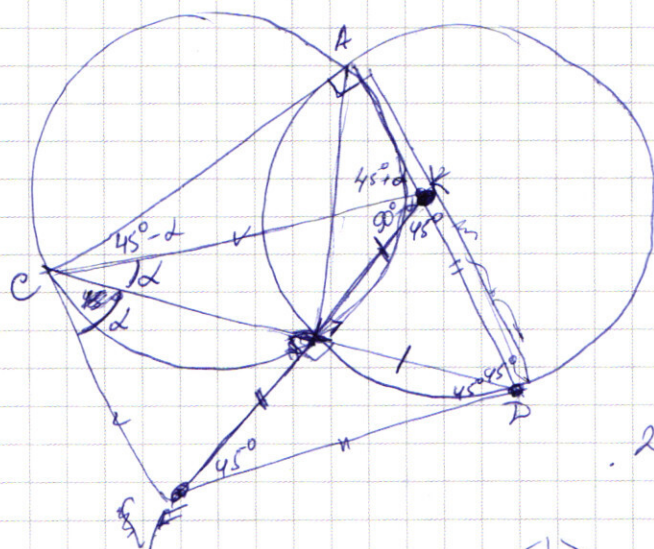
$$\frac{a}{2 \sin 45^\circ} = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$3^4 - 3^x = 3^{\log_3 4} - 3^{\log_3 x}$$

$$\log_3 (3^4 - 3^x) =$$

=



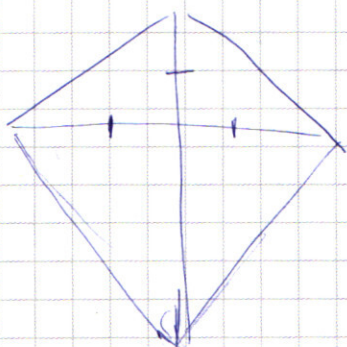
$$CF = CK.$$

$$x\sqrt{2} \cdot y = x \cdot y\sqrt{2}$$

$$300 - 2 = 338$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ 169 \end{array}$$

$$\frac{10}{13\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{26} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{26}$$



$$\begin{array}{r} 238 \overline{) 34} \\ 21 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$R = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

$$238 = 119 \cdot \sqrt{2} \cdot R$$

$$45^\circ + \alpha$$

$$2 + \beta$$

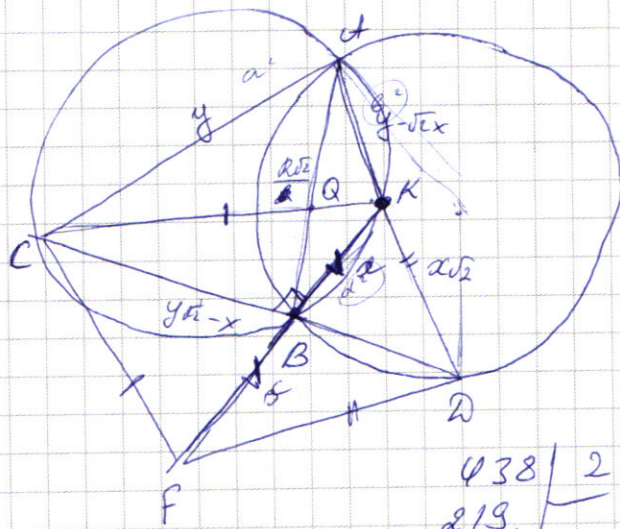
$$90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta$$

$$2 \cdot 7 \cdot 17 =$$

$$y^2 + (y - \sqrt{2}x)^2 = y^2 - 2\sqrt{2}xy + 2x^2$$

$$\frac{\sqrt{17} \cdot 7}{13}$$

$$y^2 + y^2 - 2\sqrt{2}xy + 2x^2 = 2y^2 - 2\sqrt{2}xy + 2x^2$$



$$\begin{aligned} AB^2 + CK^2 &= AC^2 + AK^2 + BK^2 + BC^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CK^2 &= y^2 + y^2 - 2\sqrt{2}xy + 2x^2 + x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}xy + x^2 \\ &= 2R^2 = 4y^2 + 4x^2 - 4\sqrt{2}xy \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 438 \overline{) 2} \\ 219 \end{array}$$

$$13 \mid 89$$

$$65 + 26 = 91$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8. знач. чисел, $P_y = 16875$.

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -15 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 27 \\ -25 \\ \hline 2 \\ -2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 375 \\ -30 \\ \hline 75 \\ -75 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 675 \\ -600 \\ \hline 75 \\ -75 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 135 \\ -100 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

2) 8. 7. 6. 5.
4!

$$\sqrt{2} \cos 2x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x \cos 5x + \cos 10x = 0 \Rightarrow \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\begin{aligned} \cos^2 5x - \sqrt{2} \cos^2 x \cos 5x + \\ - \sin^2 5x - \sqrt{2} \cos 2x \sin 5x = 0 \\ \cos 5x (\cos 5x - \sqrt{2} \cos 2x) - \\ - \sin 5x (\sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x) = 0. \end{aligned}$$

Числа могут сост
в числе год или быть.

1) 4 пятёрки, 3 тройки и единица.

2) 4 пятёрки, 1 тройка, 1 девятка и единица.

$\sqrt{2}$

$$\frac{5x - 90^\circ + 5x}{2} = 5x - 45^\circ$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \cos^2 5x + 1 - \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \cos (90^\circ - 5x)) - \cos 10x = 0$$

$$-2\sqrt{2} \cos 2x \sin 45^\circ \sin (5x - 45^\circ) - \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x \sin (5x - 45^\circ) + \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x (\sin 5x \cos 45^\circ - \cos 5x \sin 45^\circ) + \cos 10x = 0$$

- 1) 3 тройки, 5 пятерки и единица
 2) тройка, девятка, 4 пятерки и 2 единицы.

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log y} = -x^{\log 2 + \log y}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

Не более 2-х слагаемых.

$$2^{\log 8} = 8$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

1) 3 тройки на 3 и 8 позиций - $\frac{8! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$

• 4 пятёрки на 1 и 5 позиций $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!}$

• единица на ост. = 8.

Или 4 пятёрки на 1 и 3 8 позиций: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 1$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!}$$

$$\frac{4 \cdot 8! \cdot (3 \cdot 2 + 2)}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8} = 20 \cdot 8 \cdot 7 = 20 \cdot 56 = 1120$$

2) Тройку на 1 и 8 позиций, - 8.

девятку на 1 и 7 позиций, - 7.

4 пятёрки на 4 и 6 позиций, - $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!}$

8 ед на 2 позиций, - $\frac{2}{2!}$ $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4! \cdot 2!} = \frac{8!}{4! \cdot 2!}$

Ответ: $\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!}$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$\cos^2 5x - \sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \sin^2 5x + \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 5x - \sqrt{2} \cos 2x) - \sin 5x (\sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x) = 0$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} = 3^x (1 + 4 \cdot 3^{x-1-x})$$

$$y < 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$85 + 3^{81} \cdot x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$85 - x - 3^x - 4 \cdot 3^{x-1} + x \cdot 3^{x-1} > 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x - 6 + y| + |x - 6 - y| = 12.$$

при $x + y > 6$
 $x - y > 6$.

1) $++ \quad x - 6 + y + x - 6 - y = 12.$

$$2x = 24. \quad x = 12.$$

2) $x - 6 + y - x - 6 - y = 12.$

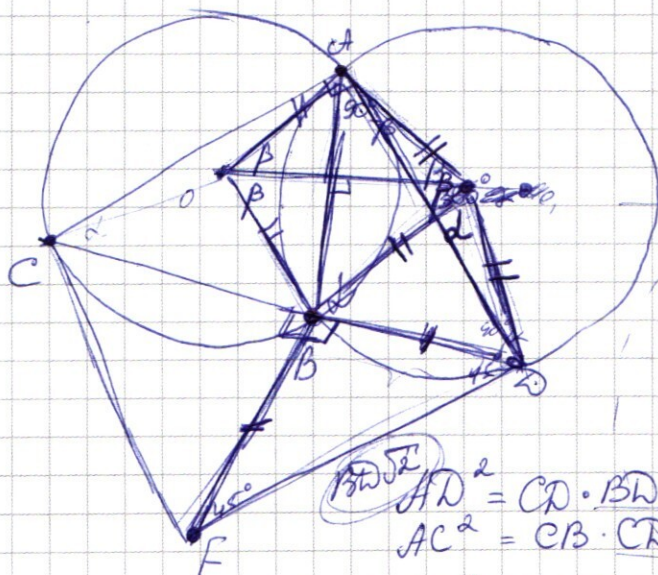
$$y = 6.$$

при $x - 6 + y > 6$
 $x - y < 6.$

3) $6 - x - y + x - 6 - y = 12$

$$y = -6$$

при $x + y < 6$
 $x - y > 6.$



$$AD^2 = CD \cdot BD$$

$$AC^2 = CB \cdot CD = (CD - BD) \cdot CD.$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2.$$

$$CD^2 = CD \cdot (CD - BD) +$$

$$CF^2 = CD^2 + 2BD^2 - 2CD \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= CD^2 + 2BD^2 - 2BD \cdot CD = CD^2 + 2BD^2 - 2AD^2 =$$

$$= 3BD^2 - AD^2 = BC^2 + BD^2.$$

$$2BD^2 = BC^2 + AD^2$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$x^{\lg y} = y^{2\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$x^{\lg y + \lg y} = y^{2\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$x < 0. \quad \frac{x^{5\lg y}}{(-x)^{\lg(-x)}} = y^{2\lg y} \quad 2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^5 x - \sin^2 5x) = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad 2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) -$$

$$x^2 + \cancel{xy} + 4x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$- \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

6x

$$D = y^2 + 16 + 8y + 8y^2 - 32y = (\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x +$$

$$\frac{x - 5x + 45}{2} \bar{x}, \quad 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2 \quad + \cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$\frac{(y-4)^{\lg y}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg y} \quad x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2} \quad x < 0; x \neq -1$$

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\lg\left(\frac{y^3}{4-y}\right) \lg(4-y) = \lg y^2 \lg y = 2\lg^2 y$$

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{1}{8}$$

$$\lg y = a; \quad \lg(4-y) = b;$$

$$(3a - b)b = 2a^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} > 0$$

$$85 - x + (x-4) \cdot 3^{81} - 3^x > 0$$

$$= 81 + 4$$

$$81 - 3^x + 4 - x + (x-4) \cdot 3^{81} > 0$$

$$\frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

