МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

Из ОДЗ $x > 0$, $xy > 0 \Rightarrow y > 0$ (Из определения $\lg x$, $\lg xy$)

$(2):\ x^2 - (2y+4)x - 3y(y-4) = 0$

$D = (2y+4)^2 + 12y(y-4) = 16(y-1)^2$

$x = \frac{2y+4 \pm 4|y-1|}{2} = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$ (т.к. $\pm|a| = \pm a$)

I. $x = \frac{2y+4+4y-4}{2} = 3y \ (3)$

Подставим (3) в (1): $\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3y} \cdot y^{4\lg 3y} = y^{2\lg 3 + 2\lg y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3y} \cdot y^{\cancel{4\lg 3 + 4\lg y}} = y^{\cancel{2\lg 3 + 4\lg y}} \Leftrightarrow y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y} \ \Big|^{\wedge \frac{1}{\lg 3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 = 3^{1 + \log_3 y} \Leftrightarrow y^2 = 3y$ Тогда $y = 3 \geq 1$, $x = 9$

II. $x = \frac{2y+4-(4y-4)}{2} = 4 - y \ (4)$

Подставим (4) в (1): $\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg((4-y)\cdot y)}$

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y) + 2\lg y}$ (5)

Рассмотрим 2 случая: 1) $y = 3 \Rightarrow \left(\frac{3^5}{1}\right)^{\lg 1} = 3^{3\lg 1 + 2\lg 3}$

$1 = 3^{2\lg 3}$ противоречие

2) $y \neq 3 \Rightarrow \lg(4-y) \neq 0$. Тогда возведём обе части (5) в степень $\frac{1}{\lg(4-y)}$:

$\frac{y^5}{4-y} = y^{2 + 2\log_{(4-y)} y} \ \Big| : y^2$

$y^3 = (4-y) \cdot y^{\frac{2}{\log_y(4-y)}}$

$y^{3\log_y 4 - 3\log_y y} = (4-y)^{\log_y(4-y)} \cdot y^2$

$4^3 - y^3 = (4-y)^{\log_y 4 - 1} \cdot y^2$

$(4-y)(y^2 + 4y + 16) = (4-y)^{\log_y 4 - 1} \cdot y^2$

$(4-y)^2((y+2)^2 + 12) = (4-y)^{\log_y 4} \cdot y^2$

$y^3 = (4-y) \cdot y^{2\log_{(4-y)} y}$

Решением этого уравнения будет являться число $y = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4 - y = 2$

~~Заметим, что $((y+2)^2+12)>y^2 \Rightarrow$~~ Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=9,\ y=3; \\ x=2,\ y=2. \end{array}\right.$

~~Таким~~

№1 Разложим 3375 на множители:

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Заметим, что единственные делители числа 3375, которые могут встретиться как цифры в некотором подходящем восьмизначном числе — это 1, 3, 5, 9 (т.к. следующий по величине делитель 3375 — 15 — больше 9).

Тогда подсчитаем кол-во способов, которыми из цифр 1, 3, 5, 9 можно составить число так, чтобы произведение его цифр было равно 3375

Рассмотрим несколько случаев: I. в числе нет цифры 9 $\Rightarrow$ только цифры 1, 3, 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 цифры „3", 3 цифры „5" (из разложения 3375 на множители) $\Rightarrow 8-3\cdot2=2$ цифры „1" $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего таких чисел $C_8^2 \cdot C_6^3$ (мы выбираем места для 2-х „1" и для 3-х „3"; на оставшиеся места ставятся „5") („место" — позиция цифры в числе)

Т.е. таких чисел $\frac{8!}{2!\cdot\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\cdot3!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{2\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 4\cdot7\cdot5\cdot4 = 35\cdot16 = 460$

II. В числе есть 1 цифра „9" $\Rightarrow$ 1 цифра „3", 3 цифры „5" $\Rightarrow 8-5=3$ цифры „1" $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Всего таких чисел $C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3$ (выбираем места для „9", „3", „5", а на оставшиеся „1"). Т.е. таких чисел $\frac{8!}{1\cdot\cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{1\cdot\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\cdot3!} =$

$= \frac{8!}{3!\cdot3!} = 2\frac{8!}{2!\cdot3!\cdot3!} = 2\cdot460 = 920$

III В числе больше одной цифры 9 $\Rightarrow$ такое число кратно $3^4 \Rightarrow$ оно не равно 3375

Тогда всего искомых восьмизначных чисел $460+920=1380$.

Ответ: 1380

№2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\sqrt{2}\sin 11x \sin 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 11x\cos 3x + \cos 3x - \cos 11x \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cancel{\sqrt{2}}\left(\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \cancel{\sqrt{2}}\left(\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (1)

~~При $\sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 3x = \frac{\pi}{4} + 2\cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

~~Тогда $\sin 3x =$~~ ~~Решением~~ При одновременной замене $\cos 3x$ на $\sin 3x$ и наоборот, $\sin 11x$ на $\cos 11x$ и наоборот, вид уравнения (1) не меняется $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos 3x = \sin 3x \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos 11x = \sin 11x \Rightarrow 11x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi}{11}k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Тогда $\frac{5\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}n = \frac{5\pi}{44} + \frac{5\pi}{11}k$~~

~~$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11}\right) = \frac{1}{11}k - \frac{1}{3}n$~~

~~$\frac{8}{33 \cdot 4} = \frac{3k - 11n}{33}$~~

~~$3k = 11n + 2$~~

~~$k = \frac{11}{3}n + 2 \Rightarrow n \vdots 3 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$~~

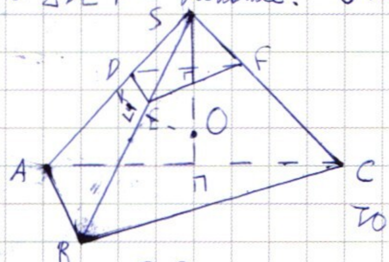
~~Ответ: $x =$~~

~~$x = \frac{5\pi}{4} + \pi n$~~

Ответ: $x = \frac{5\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

№ 4 Дано: $SK \perp KO$, $SL \perp LO$, $SM \perp MO$, $S_2 = 1$, $S_1 = 4$ Найти: S_3 - ? $\angle KSO$ - ?

Пусть $\triangle ABC$ - большее сечение трёхгранного угла плоскостью, касающейся сферы, ~~[illegible]~~ а $\triangle DEF$ - меньшее. Построим тетраэдр $SABC$:



Тогда $\triangle DEF$ и $\triangle ABC$ находятся по разные стороны от O, причём $\triangle DEF$ ближе к S, чем $\triangle ABC$. Заметим, что т.к. $(DEF) \perp SO$, $(ABC) \perp SO$, то $(DEF) \parallel (ABC)$. При этом расстояние между (DEF) и (ABC) равно $2R$ из условия (т.к. расстояния от O до (DEF) и (ABC) равны), где R - радиус сферы.

Тогда, т.к. $(DEF) \parallel (ABC)$, имеет место следующее соотношение (т.к. тетраэдры $SDEF$ и $SABC$ подобны): $\frac{\sqrt{S_2}}{h} = \frac{\sqrt{S_1}}{h+2R}$, где S_1 - площадь $\triangle ABC$, S_2 - площадь $\triangle DEF$, h - - расстояние между S и (DEF) $\Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow SO = h + R = 3R$. Тогда в $\triangle KSO$: $\angle SKO = 90°$ (SK - касательная к сфере), $SO = 3R$, $KO = R \Rightarrow \sin\angle KSO = \frac{1R}{3R} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$

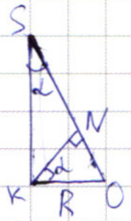
Пусть N_1, N_2, N_3 - ~~[illegible] K, L, M на SO~~ высоты, опущенные на SO в $\triangle KSO$, $\triangle LSO$, $\triangle MSO$ соответственно $\Rightarrow$ т.к. эти треугольники равны по гипотенузе и катету, то $SN_1 = SN_2 = SN_3$ как соответственные (~~[illegible]~~) ($SK = SL = SM$, $KN_1 = LN_2 = MN_3$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow N_1, N_2, N_3$ - одна и та же точка (пусть N). Тогда $NK, NM, NL \perp SO$.

Проведём (NKM). Тогда т.к. $MN \perp SO$, $KN \perp SO \Rightarrow (NKM) \perp SO \Rightarrow$ все прямые этой плоскости $\perp SO \Rightarrow$ есть прямая в этой плоскости, которая $\perp SO$ и $\parallel NL$.

При этом $N \in (NKM) \Rightarrow M \in (NKM) \Rightarrow (KML) \equiv (NKM) \Rightarrow (KML) \perp SO \Rightarrow$

$\Rightarrow$ найдём SN: $\triangle SKO$:



$$\frac{NO}{KO} = \frac{KO}{SO} \Rightarrow NO = \frac{1}{3}R \Rightarrow SN = \frac{8}{3}R$$

При этом т.к. $(KML) \perp SO \Rightarrow (KML) \parallel (DEF) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ тетраэдры, образованные трёхгранным углом и ~~сечени~~ его сечением плоскостями (KML) и (DEF) подобны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_{сеч(KML)}}}{SN} = \frac{\sqrt{S_2}}{h} \Rightarrow S_{сеч} = \left(\frac{SN}{h}\right)^2 S_2 = \frac{64}{9}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$, $S_{сечения} = \frac{64}{9}$

$\boxed{№5}$ $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \ (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$

(1): $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ Рассмотрим все случаи раскрытия модулей:

I. $y-3-x \geq 0 \Rightarrow y \geq x+3$; $y-3+x \geq 0 \Rightarrow y \geq 3-x \Rightarrow$ ~~тогда~~ подставим в (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$. При этом $\begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;3]$

II. $y \geq 3+x$, $y \leq 3-x \Rightarrow$ ~~тогда~~ раскроем модули (1): $-2x = 6 \Rightarrow x = -3$

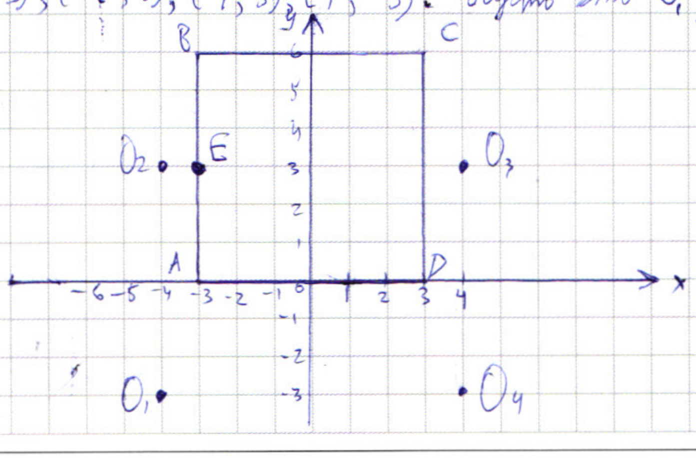
При этом $y \in [0;6]$

III. $y \leq x+3$, $y \geq 3-x \Rightarrow$ подставим в (1): $2x = 6 \Rightarrow x = 3$, при этом $y \in [0;6]$

IV. $y \leq x+3$, $y \leq 3-x \Rightarrow$ в (1): $-2y = 0 \Rightarrow y = 0$, при этом $x \in [-3;3] \Rightarrow$

(1) на координатной плоскости – квадрат с вершинами в $(-3;0)$, $(-3;6)$, $(3;6)$, $(3;0)$. Пусть это A, B, C, D

(2) на координатной плоскости – 4 окружности радиусами $\sqrt{a}$ с центрами в точках $(-4;-3)$, $(-4;3)$, $(4;3)$, $(4;-3)$. Пусть это O_1, O_2, O_3, O_4:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Система имеет ровно 2 решения, если есть ровно два пересечения квадрата $ABCD$ с окружностями в центрах O_1, O_2, O_3, O_4 (далее - окружность №1, №2, №3, №4 соотв-но). Заметим, что $ABCD$ симметричен относительно OY, как и окружности №1 и №4, №2 и №3 соответственно $\Rightarrow$ кол-во пересечений №1 и №4, №2 и №3 с $ABCD$ соотв-но равно:

Проанализируем №1: r_1: Пересечений:

$r_1 < O_1A \Rightarrow 0$

$r_1 = O_1A \Rightarrow 1$

$O_1A < r_1 < O_1C \Rightarrow 2$

$r_1 = O_1C \Rightarrow 1$

$r_1 > O_1C \Rightarrow 0$

№2: $r_2 < O_2E \Rightarrow 0$

$r_2 = O_2E \Rightarrow 1$

$O_2E \leq r_2 \leq O_2C \Rightarrow 2$

$r_2 > O_2C \Rightarrow 0$

Тогда для №1, №4: $\sqrt{a} < \sqrt{10} \Rightarrow 0$

$\sqrt{a} = \sqrt{10} \Rightarrow 2$

$\sqrt{10} < \sqrt{a} < \sqrt{130} \Rightarrow 4$

$\sqrt{a} = \sqrt{130} \Rightarrow 2$

$\sqrt{a} > \sqrt{130} \Rightarrow 0$

(Т.к. $O_1A = \sqrt{10}$, $O_1C = \sqrt{7^2+9^2} = \sqrt{130}$, $O_2C = \sqrt{58}$, $O_2E = 1$)

№2, №3: $\sqrt{a} < 1 \Rightarrow 0$; $\sqrt{a} = 1 \Rightarrow 2$; $1 < \sqrt{a} \leq \sqrt{58} \Rightarrow 4$, $\sqrt{a} > \sqrt{58} \Rightarrow 0$

Тогда, совместив полученные результаты (от анализа №1, №2, №3, №4) получим, что ровно 2 решения существуют при $\sqrt{a} = 1$, $\sqrt{a} = \sqrt{130}$, т.е. **Ответ:** $\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 130. \end{array}\right.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow$ набор чисел, которые можно использовать $= \{1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5\}$

Тогда, составляя число из 8 цифр, мы выбираем 2 позиции — 1, 3 — 3, 3 — 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего чисел м. б. $C_8^2 \cdot C_8^3 \cdot C_8^3 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} =$

$= \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3 \cdot 2}} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3 \cdot 2}} = 7^3 \cdot 64 \cdot 4 = 343 \cdot 256 = 87808$

$3375 \mid 5$, $675 \mid 5$, $135 \mid 5$, $27 \mid 3$

343×256: $2058 + 1715 + 686 = 87808$

Ответ: 87 808

№2 ~~$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos(11x + 3x)$~~

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$

1 2 3 4 5 6 7

№3 $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \ (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \ (2) \end{cases}$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$ $\quad x^2 - 2xy - 4x + y^2 = 4y^2 - 12y$

№2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos a - \cos b = 2 \sin\frac{(a+b)}{2} \sin\frac{(a-b)}{2}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + \cos 3x - \cos 11x = \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x + \sin 3x - \sin 11x$

(Но при $x = \frac{\pi}{4}$)

$\sqrt{2} ab + a - b = a + \sqrt{2} ab - b =$

~~$a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{2}$~~ $\quad \cos a - \cos b = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} =$

$\frac{2\pi}{6}$ $\quad \frac{3\pi}{6}$ $\quad 2 \sin \frac{5\pi}{6}$

№5 $\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 \ (1) \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \ (2) \end{cases}$

(2): это окружность радиуса $\sqrt{a}$ с координатами центра $(\pm 4; \pm 3)$ — 4 окружности

(1): $|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$

I. $y - 3 - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x + 3$, $y - 3 + x \geq 0 \Rightarrow y \geq 3 - x \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$

Тогда $x \leq 3$, $-x \leq 3 \Rightarrow x \in [-3; 3]$

II. $y \geq 3 + x$, $y \leq 3 - x \Leftrightarrow y \geq x - 3 \Rightarrow 2y \geq 2x \Rightarrow y \geq x$

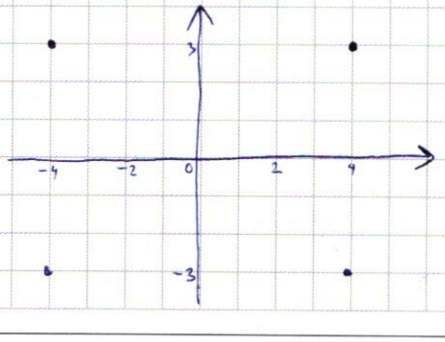
$\cancel{y} - \cancel{3} - x + \cancel{3} - \cancel{y} - x = 6 \Rightarrow x = -3$, $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$

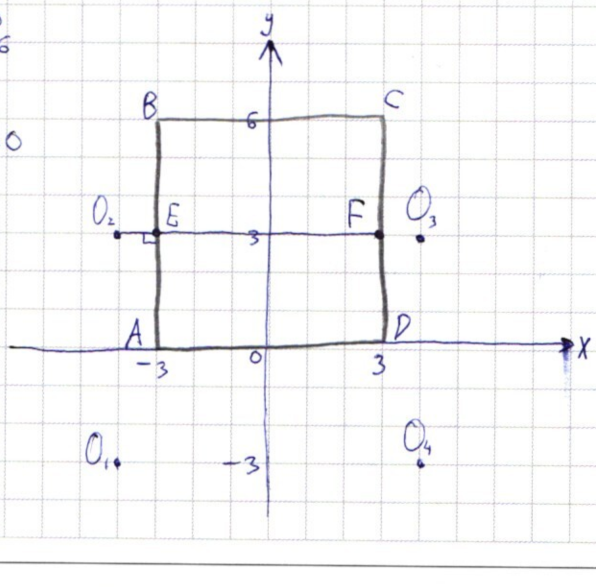
III. $y \leq x + 3$, $y \geq 3 - x \Leftrightarrow y \leq x - 3$

$x + \cancel{3} - \cancel{y} + \cancel{y} - \cancel{3} + x = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y \in [0; 6]$

IV. $y \leq x + 3$, $y \leq 3 - x \Rightarrow \cancel{3} + \cancel{x} - y + \cancel{3} - \cancel{x} - y = \cancel{6} \Rightarrow y = 0$

Имеем: $\begin{cases} 0 \leq x + 3 \\ 0 \geq x - 3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 3]$





Система имеет два решения, если есть ровно два пересечения квадрата с окружностями O_1, O_2, O_3, O_4

Заметим, что окружности O_1 и O_4, O_2 и O_3, (и $ABCD$), симметричны отн $OY \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во пересечений O_1 и O_4, O_2 и O_3 с $ABCD$ одинаково

r_i – радиус окружности с центром в O_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Проанализируем O_1: $r_1 < O_1A \Rightarrow 0$ $\quad$ O_2: $r_2 < O_2E \Rightarrow 0$

$r_1 = O_1A \Rightarrow 1$ $\quad$ $r_2 = O_2E \Rightarrow 1$

$O_1A < r_1 < O_1C \Rightarrow 2$ $\quad$ $O_2E < r_2 \leq O_2C \Rightarrow 2$

$r_1 = O_1C \Rightarrow 1$ $\quad$ $r_2 > O_2C \Rightarrow 0$

$r_1 > O_1C \Rightarrow 0$

Тогда для O_1, O_4: $\sqrt{a} < \sqrt{10} \Rightarrow 0$ $\quad$ $O_1A = \sqrt{10}$

$\sqrt{a} = \sqrt{10} \Rightarrow 2$ $\quad$ $O_1C = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$

$\sqrt{10} < \sqrt{a} < \sqrt{130} \Rightarrow 4$ $\quad$ $O_2C = \sqrt{58}$

$\sqrt{a} = \sqrt{130} \Rightarrow 2$

$\sqrt{a} > \sqrt{130} \Rightarrow 0$

O_2, O_3: $\sqrt{a} < 1 \Rightarrow 0$; $\sqrt{a} = 1 \Rightarrow 2$, $1 < \sqrt{a} \leq \sqrt{58} \Rightarrow 4$, $\sqrt{a} > \sqrt{58} \Rightarrow 0$

Совместив полученные от анализа O_1, O_4 и O_2, O_3 результаты, получим, что ровно 2 решения существуют при $\sqrt{a} = 1$, $\sqrt{a} = \sqrt{130}$

т.е. Ответ: $a = 1$

$a = 130$.

№ 3 $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \ (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \ (2) \end{cases}$ $\quad$ ОДЗ: $x > 0$, $xy > 0 \Rightarrow y > 0$

(2): $x^2 - (2y+4)x - 3y(y-4) = 0$ $\quad$ $D = 4(y+2)^2 + 12y(y-4) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 =$

$= 16(y^2 - 2y + 1) = (4(y-1))^2$

$x = \frac{2y + 4 \pm (4y-4)}{2} = y + 2 \pm (2y - 2)$ $\quad$ $x = y + 4 \pm |2y - 2|$

I. $x = y + 2 + 2y - 2 = 3y \to (1)$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3y} \cdot y^{4\lg 3 + 4\lg y} = y^{2\lg 3 + 4\lg y}$

$3^{\lg 3y} = y^{2\lg 3} \iff 3^{\lg 3 + \lg y} = y^{\lg 3 + \lg 3} \ \Big|\ \wedge \frac{1}{\lg 3} \neq 0$

$3^{1 + \log_3 y} = y^2$

$3 \cdot y = y^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ – не ОДЗ} \\ y = 3 \end{array}\right.$

Тогда $y = 3$, $x = 9$

II. $x = y + 2 - 2y + 2 = 4 - y \to (1)$

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg(4-y) + 2\lg y} \ \Big|\ \wedge \frac{1}{\lg 4-y}$

а. $y = 3 \Rightarrow \left(\frac{3^5}{1}\right)^{\lg 1} = 3^{3\lg 1 + 2\lg 3}$

$1 = 3^{2\lg 3}$ противоречие

б) $y \neq 3 \Rightarrow \frac{y^5}{4-y} = y^{2 + 2\log_{(4-y)} y} \ \Big|\ : y^2$

$y^3 = (4-y) \cdot y^{2\log_{4-y} y}$

$y^3 = (4-y) \cdot y^{\frac{2}{\log_y 4-y}} \iff y^3 = (4-y) \cdot y^{\frac{2}{\log_y 4 - 1}} \ \Big|\ \wedge \log_y 4 - 1$

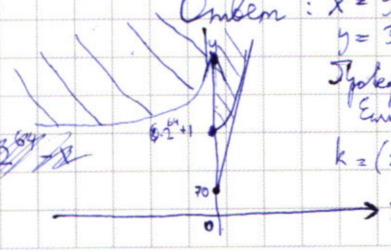
$y^{3\log_y 4 - 3} = (4-y)y^2$

$4^3 - \cancel{y^3} = 4y^2 - \cancel{y^3}$

$y^2 = 4^2 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow$ из ОДЗ $y = 4$, $x = 0$ – не ОДЗ

Ответ: $x = 9$, $y = 3$.

№ 7 $\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \ (1) \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \ (2) \end{cases}$



$(2^x)' = x\ln x$

Проведём через $(0; 70)$ касательную к $2^x + 3 \cdot 2^{65}$

Если её $k < 2^{64} - 1$, то решения есть

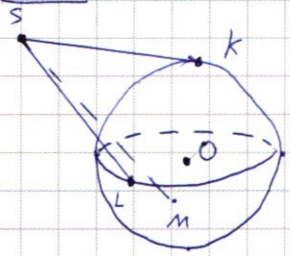
$k = (2^x + 3 \cdot 2^{65})' = x \cdot \ln x$

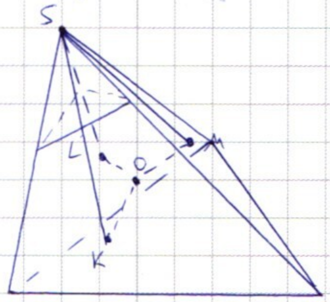
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

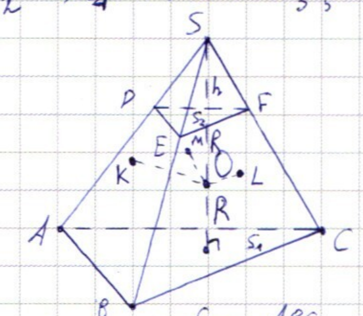
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№4}$ Дано: $SK \perp KO$, $SL \perp LO$, $SM \perp MO$, $S_2 = 1$, $S_1 = 4$ Найти: S_3, $\angle KSO$







Пусть сечение трехгранного угла плоскостью, касающейся сферы с другой стороны от S — $\triangle ABC$

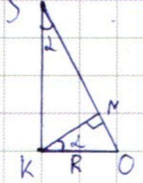
Пусть радиус сферы — R. Тогда, т.к. $(DEF) \parallel (ABC)$ по условию ($(DEF) \perp SO$, $(ABC) \perp SO$), то

$$\frac{\sqrt{S_2}}{h} = \frac{\sqrt{S_1}}{h+2R} \Rightarrow h(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}) = 2R\sqrt{S_2} \Rightarrow h = \frac{2R\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}} = \frac{2R\cdot 1}{2-1} = 2R$$

Тогда в $\triangle KSO$ $\angle SKO = 90^\circ$, $KO = R$, $SO = 3R \Rightarrow \sin\angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}}$

Заметим, что т.к. в $\triangle KSO$, MSO, LSO SO - общая, $KO = MO = OL \Rightarrow SK = SM = SL$

Пусть ~~...~~ N_1, N_2, N_3 — точки на SO, в которые опущены высоты KN_1, MN_2, LN_3 в $\triangle KSO$, $\triangle MSO$, $\triangle LSO$. Тогда т.к. эти треугольники равны, то $SN_1 = SN_2 = SN_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_1, N_2, N_3$ — одна и та же точка. Пусть это точка N. Тогда $NK, NM, NL \perp SO$ ~~...~~ Проведём плоскость (NKM). Тогда ~~все~~ она $\perp SO \Rightarrow$ все её прямые $\perp SO \Rightarrow$ ~~...~~ $NL \parallel (NKM)$ т.к. есть прямая $\parallel NL$ в (NKM). Тогда $NL \subset (NKM) \Rightarrow (KML) \perp SO$. Тогда найдём SN:



$SO = 3R \Rightarrow SK = \sqrt{9-1}\,R = 2\sqrt{2}R$. Тогда $\sin\alpha = \frac{R}{3R} = \frac{NO}{R} \Rightarrow NO = \frac{1}{3}R \Rightarrow SN = 2\frac{2}{3}R$

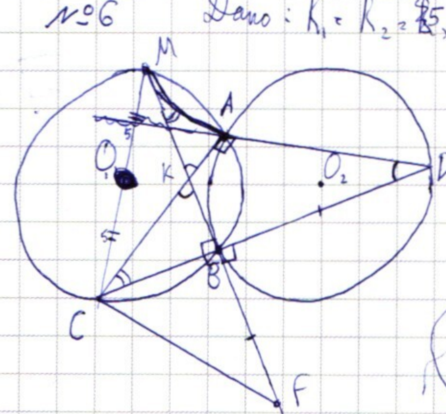
При этом т.к. $(KLM) \perp SO$, то $(KLM) \parallel (DEF)$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{S_{(KLM)}}}{SN} = \frac{\sqrt{S_{(DEF)}}}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_3}}{\frac{8}{3}R} = \frac{\sqrt{S_2}}{R} \Rightarrow S_3 = \frac{64}{9}S_2 = \frac{64}{9}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, $S_{сечения\,(KLM)} = \frac{64}{9}$

№6 Дано: $R_1 = R_2 = 5$, $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle DBF = 90^\circ$, $BD = BF$ Найти: а) CF

б) при $BC = 6$ — $S_{\triangle ACF}$



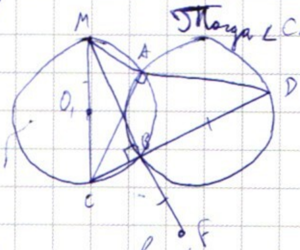
$\angle CAD = 90^\circ$ ~~...~~

Продолжим BF до пересечения с первой окружностью в M

Тогда т.к. $\angle CBM = 90^\circ$, то MC — диаметр

$\angle CAD = 90^\circ$. Продолжим AD до пересечения с O_1 в точке M'

Тогда $\angle CAM' = 90^\circ \Rightarrow CM'$ — диаметр $\Rightarrow M$ и M' — одна точка



$CK : KM = KB : KA$

$$\frac{CK}{KM} = \frac{KB}{KA}$$

$2^6 - 2^3 = 2^{\log_2 4 - 1} \cdot 2^2$

$8 = 4 \cdot$

$4^3 - 2^3 = 8 =$
$= (4-2)(2^2 + 2\cdot 4 + 4^2)$

$(4-y)^2((y^2+2)^2+12) = (4-y)^{\log_y 4} \cdot y^2$

$((y+2)^2+12) \geq y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (4-y)^2 < (4-y)^{\log_y 4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_y 4 > 2 \Rightarrow y < 2,\ y > 1$

$(x+4)^3 = x\cdot(x+4)^{2\log_x(x+4)}$

$(x+4)^{\cancel{3}} = x\cdot\cancel{(x+4)}^{2\log_x x + 2\log_x k}$

$x+4 = x\cdot(x+4)^{2\log_x k}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$= \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\sqrt{2}\sin 11x \sin 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 11x \cos 3x + \cos 3x - \cos 11x \quad \Big| \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $a + \sqrt{2}ab - b =$ $ac - bd$

При замене sin на cos, а cos на sin уравнение не меняет своего вида $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sin и $\cos_{3x,11x}$ не равны 0

$\sqrt{2}(a+c)(b+d) =$

$\sqrt{2}\left(\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}ab + \sqrt{2}da + \sqrt{2}cb + \sqrt{2}cd$

$\left(\sin 3x - \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin 11x + \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos 3x - \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos 11x + \cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$