



Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим 4 случая

$$3385 = 5^3 \cdot 3 \Rightarrow \text{возможные цифры } 5, 5, 3, 1$$

Рассмотрим остальные цифры 1 (кроме выходящих за пределы)

Рассмотрим 2 случая 1) $(5 \times 3, 3 \times 3)$

2) $(5 \times 3, 9, 3)$

$$1) S_1 = C_3^8 + C_3^5 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 5}{2} = 56 + 10 = 66$$

$$2) S_2 = C_3^8 + \underbrace{5 \cdot 4}_{\text{возможные размещения } 3, 9} = 56 \cdot 20$$

$$3) S = S_1 + S_2 = 56 \cdot 10 + 56 \cdot 20 = 56 \cdot 30 = \underline{1680}$$

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$-2 \sin 2x \cdot \sin 4x - 2 \cos 4x \cdot \sin 2x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x \quad | : 2$$

$$\sin 2x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} (\sin 4x + \cos 4x) \right) = 0$$

$$\sin 2x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x + \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right)$$

$$2x = \frac{\pi n}{4}$$

$$x = \frac{\pi n}{8}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$7x + 2\pi k = \frac{\pi}{4} - 4x + 2\pi p$$

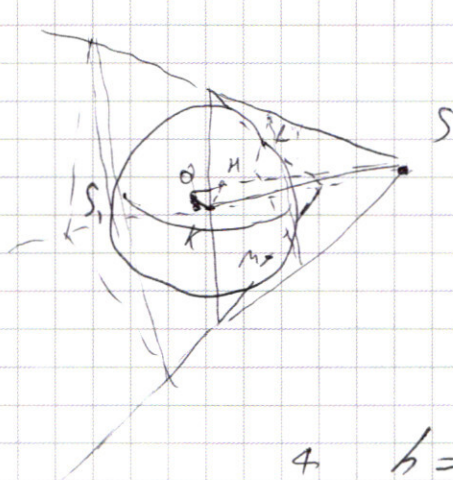
$$\text{где } k, p \in \mathbb{Z}$$

$$11x = \frac{\pi}{4} + 2\pi(p-k)$$

$$\text{Пусть } p-k = t$$

$$\text{где } t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi t}{11}$$



1) $\angle$ по условию $\angle$ параллельно с вершиной S и параллельным основанием (сечение через диаметр $\angle$)

$$h = \text{расстояние } (S; (KML))$$

$$2 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = \frac{h}{h+2r} = 2 \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 2r$$

$$2) \angle OSK = 90^\circ \Rightarrow \sin \angle OSK = \frac{OK}{OS} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

(SK-касательная)

$$\angle OSK = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$3) SK = \sqrt{9r^2 - r^2} = \sqrt{8}r$$

$$S_{OKS} = \frac{SK \cdot OK}{2} = \frac{KH \cdot OS}{2} \Rightarrow KH = \frac{SK \cdot OK}{OS} = \frac{\sqrt{8} \cdot r}{3r}$$

$$KH = \sqrt{OH \cdot HS} \Rightarrow \frac{8}{9} r^2 = (OS - SH) \cdot SH$$

Пусть SH = x

$$9x^2 - 27rx + 8r^2 = 0$$

$$D = 27^2 r^2 - 9 \cdot 32 r^2 = 9r^2 (81 - 32) = 9 \cdot 49 r^2$$

$$x = \frac{(27 \pm 21)r}{9 \cdot 2} = \frac{8}{3} r$$

$$(+)\text{ т.к. } x > 2r$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Из скалярного произведения (см п.1)

$$\frac{S_x}{S_1} = \left(\frac{x}{34r} \right)^2 = \left(\frac{28r}{34r} \right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$S_x = S_1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

определенность $r=a$
центр $(4;3)$

$$\begin{aligned} \text{I) } & |y-3-x| > 0 \\ & y > 3-x \end{aligned}$$

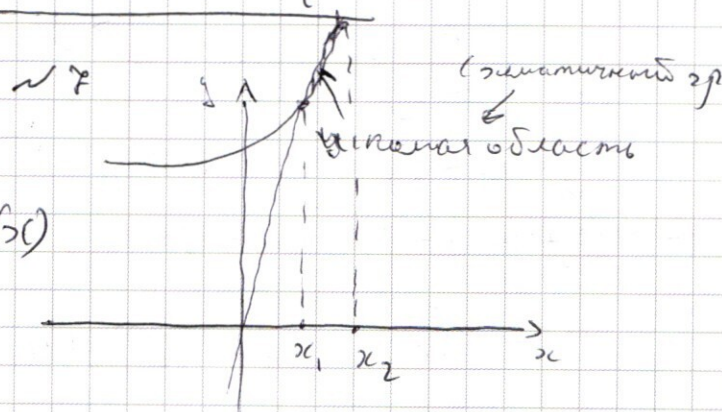
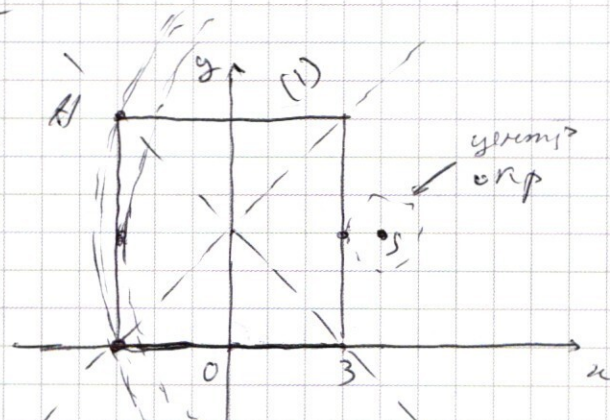
$$\begin{aligned} \text{II) } & |y-3-x| > 0 \\ & y > x+3 \end{aligned}$$

$$AS = \sqrt{45+5} = \sqrt{50}$$

$$a \in (1; 7) \cup \{\sqrt{50}\}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} = g(x) \\ y \leq 20 + (2^{64} - 1)x = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 20 \end{cases} \text{ подбором}$$



Т.т.т. рассматриваются только целые значения, а $g(x)$ и $f(x)$ при $x \in \mathbb{Z}, (-\infty, \infty)$, но и $g(x)$ строже $f(x)$ - нестроже

но для каждого x_0 кол. точек $= f(x_0) - g(x_0)$
для каждой области

$$f(x) - g(x) = 2^{65} \left(\frac{x}{2} - 3 \right)$$

$$= 2^{65} \cdot \frac{x}{2} - x + 70 - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = 2^{65} \left(\frac{x}{2} - 3 \right) + 70 - 2^x - x$$

Посчитаем сумму для $x \in [6, 70]$

арифм. прогр. с $d=0.5$

$$S = 2^{65} (65 \cdot 16) + 70 - 65 \cdot 38 -$$

$$- 6 \cdot 2^{65} + 6 =$$

$$= 2^{65} (65 \cdot 16) + 38 \cdot 2 - 65 \cdot 38 - 6 \cdot 2^{65} =$$

$$= 2^{65} (65 \cdot 16 - 6) + 38 (65 \cdot 2 - 65) = \underline{\underline{2^{65} \cdot 517 + 2394}}$$

$$S_1 = \frac{65 \cdot (0 + 32)}{2}$$

$$S_2 \rightarrow x_0 = \frac{65 (6 + 70)}{2}$$

$$S_3 = \frac{6 (2^{65} - 1)}{1}$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{1/yx} = y^{2/yx}$$

$\sqrt[3]{}$

023

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + xy - 4x - 3y^2 + 12y - 3xy = 0$$

$$x(y + x - 4) - 3y(y + x - 4) = 0$$

$$(x - 3y)(y + x - 4) = 0$$

(1)

(2)

$$x \in 4 - y \Rightarrow y \in (0, 4)$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{1/(4-y)} = y^{2/(4-y)}$$

$$\frac{y^{5/(4-y)}}{(4-y)^{1/(4-y)}} = y^{2/(4-y)} = y^{2/y}$$

$$y^{3/(4-y)} = y^{2/y} \cdot (4-y)^{1/(4-y)}$$

$$1) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3} \right)^{1/3y} = y^{1/3y}$$

$$\frac{y^5}{3} = y$$

$$xy^5 = 0$$

$$y = 0$$

не yy 023

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^3}{4-y} \right)' = \frac{3y^2(4-y) + y^3}{(4-y)^2}$$

$\frac{y^3}{4-y}$ $\xrightarrow{\text{монотонно убывает}}$ y^3 $\xrightarrow{\text{монотонно возрастает}}$ $\frac{1}{4-y}$

$$f'(y) = \frac{3y^2(4-y) + y^3}{(4-y)^2} \geq 0$$

$$-2y^3 + 12y^2 = 0$$

$$y^2(12 - 2y) = 0$$

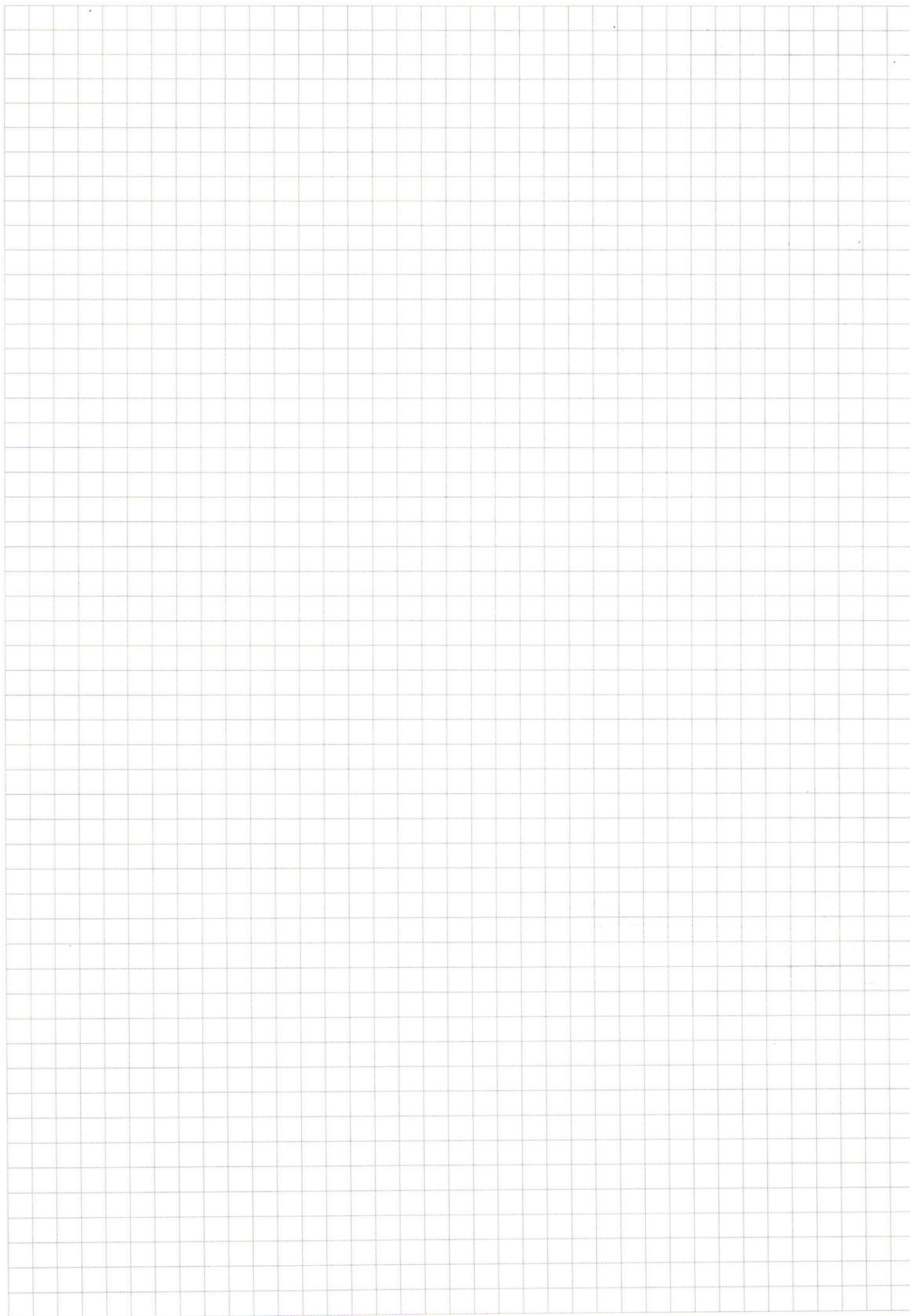
$$y = 0 \quad y = 6 \Rightarrow f'(y) \downarrow \text{ на } (0, 4)$$

След выражение слева $\downarrow$ на $(0, 4)$

выраж слева $\uparrow$ на $(0, 4)$

След есть только 1 корень

$$\left[\begin{array}{l} \underline{y = 2 \text{ (по подбору)}} \\ \underline{x \geq 2} \end{array} \right.$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$S = 9 \cdot 10^7$$

$$5 \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 675 \overline{) 5} \\ 135 \overline{) 5} \\ 27 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \end{array}$$

$$1) \quad S_3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 35$$

$$S_1 = 35 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 + 35 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7^2 =$$

$$= 35 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 (3 \cdot 7 + 1)$$

$$2) \quad C_2 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

$$C_3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \quad S_2 = 21 \cdot 10 \cdot 7^2 + 21 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7^3 =$$

$$= 21 \cdot 10 \cdot 7^2 (1 + 2 \cdot 7)$$

$$3) \quad S_3 = 35 \cdot 6 \cdot 7^2 + 35 \cdot 4 \cdot 7^3 = 35 \cdot 2 \cdot 7^2 (3 + 7 \cdot 2)$$

$$4) \quad S_4 = 35 \cdot 7 \cdot 7^3$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 5 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 +$$

$$+ 7^3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 + 7^4 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 + 5 \cdot 7^3 \cdot (3 \cdot 2 + 5 \cdot 7^2 \cdot 2^3 +$$

$$+ 5 \cdot 7^4 \cdot 2)$$

$$5 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7^3 (7 + 7 \cdot 4 \cdot 3 + 7)$$

$$5 \cdot 7^2 \cdot 2 \left(\frac{2^2}{98} + \frac{3 \cdot 19}{54} \right) = 5 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 31$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 4 \\ 87 \\ 95 \overline{) 5} \\ \times 15 \\ 3 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$98 + 57 = 155 \overline{) 5} \\ 31$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \beta &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \alpha - \beta &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \beta &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha - \beta &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\begin{aligned}\sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) &= \\ 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 4x\right) &= \\ \sqrt{2} \cdot \cos 4x &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2 \sin 2x \cdot \sin 4x - 2 \cos 4x \cdot \sin 4x &= \sqrt{2} \cdot \cos 4x \\ -2 \sin 4x (\sin 4x + \cos 4x) &= \sqrt{2} \cdot \cos 4x\end{aligned}$$

$$\sin 2x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} (\sin 4x + \cos 4x) \right) = 0$$

$$\sin 2x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(4x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 4x = \cos \left(4x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad 4x = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi n}{4}$$

$$4x + 2\pi k = 4x - \frac{\pi}{4} + 2\pi p$$

$$\cos 1 = \cos x \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi(p-k) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi t$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} = y^{2/3} x y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}x^2 + xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \\ = x(y+x-4) - 3y(y+x-4) &= 0\end{aligned}$$

$$(x-3y)(y+x-4) = 0$$

$$x = 4 - y$$

$$\begin{aligned}x = 3y \\ \left(\frac{y}{3}\right)^{1/3} = y^{2/3} \cdot 3y \\ y^{1/3} = y^{5/3} \\ y = 3y^2 \\ y = 0\end{aligned}$$

$$\frac{y}{3} = y^2 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{y^{5/3}(4-y)}{(y-y)^{1/3}y} = \frac{2}{y(4-y)y}$$

$$\frac{3y(4-y)}{y} = y^{2/3} \cdot 4-y^{1/3}(4-y)$$

$$\frac{1}{\log 2 y 10}$$

$$\frac{a \cdot \ln x}{a}$$

$$\frac{y}{4-y}$$

$$\begin{aligned}2x+y &= 0 \\ 3y+x &= 0 \\ y &= 0 \quad y = -3\end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{|y-3-x|}{\sqrt{2}} + \frac{|y-3+x|}{\sqrt{2}} = 6$$

$$(1-x-4)^2 + (1-y-3)^2 = a$$

$$y > 3-x$$

$$y-3+x > 0$$

$$y-3-x > 0$$

$$y \leq x+3$$

$$6 = -2y + 6$$

$$2y = 0$$

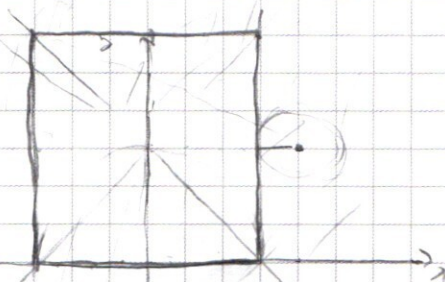
$$x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$2y = 6 = 6$$

$$y = 6$$

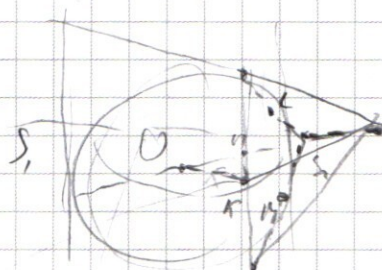
NS



$$2 + 9 = 11 \neq 58$$

$$a \in (1; 7) \cup \{58\}$$

25



NS

$$\frac{h}{h+2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2h = h + 2r$$

$$h = 2r$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{2r}{3 \cdot 4r} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$S_2 = \frac{16}{9}$$

$$\angle OSK = \alpha$$

$$(SK - \text{касат.})$$

$$\sin \angle OSK = \frac{OK}{OS} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

$$\angle OSK = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$SK = \sqrt{OS^2 - r^2} = \sqrt{9r^2 - r^2} = \sqrt{8}r$$

$$S_{OKS} = \frac{SK \cdot OK}{2} = \frac{KH \cdot OS}{2}$$

$$KH = \frac{SK \cdot OK}{OS} = \frac{\sqrt{8} \cdot r}{3r} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \sqrt{x \cdot (3r - x)}$$

$$9x^2 - 24xr + 8r^2 = 0$$

$$24x^2 - 5 \cdot 32r^2 = 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 5 \cdot 32}}{2 \cdot 5} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 640}}{10} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 640}}{10}$$

$$\frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 640}}{10} = \frac{6}{5}r$$

$$\frac{16r^2}{9} = 3rx - x^2$$

