

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Тогда восьмизначное число состоит из цифр 5, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5.

$$\text{Количество вариантов} = \frac{8!}{2!3!3!} = 560.$$

№2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\downarrow$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) ((\cos 7x - \sin 7x)\sqrt{2} + 2 \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x & (1) \\ 2(\cos 7x - \sin 7x) = -2 \sin 4x & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n & 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \\ (2) & \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = -\sin 4x \quad (3) \quad \begin{cases} X = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{7}\pi n \\ X = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{7}\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n; \quad x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \quad x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

№3.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; y > 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow (x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y^{2 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\log_x y \cdot 2 \lg x = 2 \lg y \cdot \log_x y + \lg x$$

$$(2 \log_x y - 1) = 2 \log_x y \cdot \frac{\lg y}{\lg x} = 2 \log_x^2 y$$

$$2\log_x^2 y - 3\log_x y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \log_x y = 1 \\ \log_x y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=x^2 \end{cases}$$

Получим

$$\begin{cases} x=y \\ x=y^2 \\ x=3y \\ x=9-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0; x=0 & (y=3y) \\ y=3; x=9 & (y^2-3y=0) \\ y=2; x=2 & (2y=4) \\ y=\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; x=\frac{9 \mp \sqrt{17}}{2} & (y^2+y-4=0) \end{cases}$$

не урв. 023.

$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} < 0$ (ност. кореня)

Ответ: $(0; 0); (2; 2); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

№ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

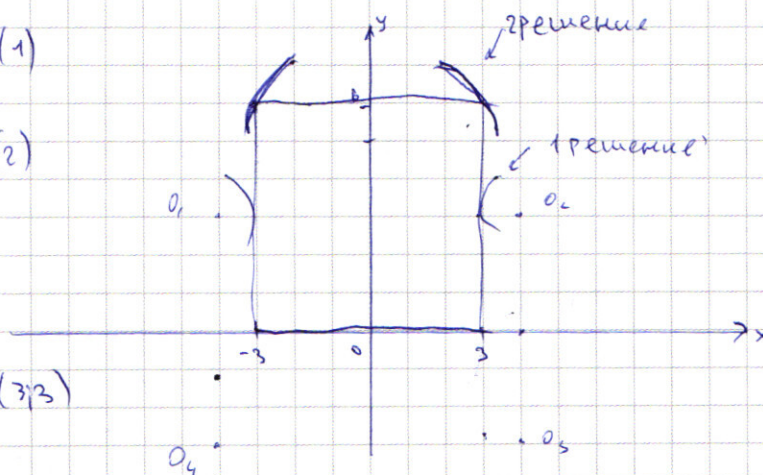
график.

(1) - представляет из себя квадрат со

сторонами 6 и центром $(3; 3)$

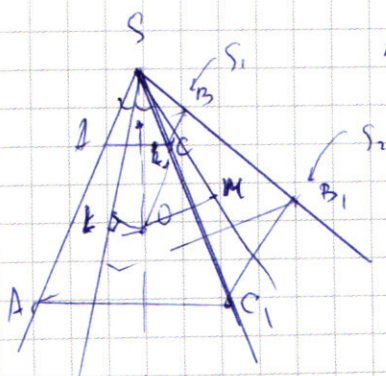
(2) - окружности с

$R = \sqrt{a}; O_1; O_2; O_3; O_4 \rightarrow (\pm 4; \pm 3)$



Равно два решения будет при $r=1 \Rightarrow a=1$

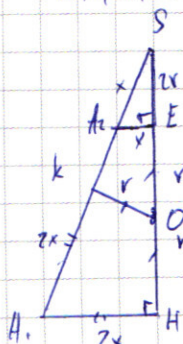
и при $r=12; a=144$.



№ 4

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\triangle A, B, C \sim \triangle ABC \quad (k = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = 2)$$



$$\begin{aligned} AK &= A_1H \\ A_1S &= A_2E \quad (\text{отр. кас.}) \end{aligned}$$

$$\text{тогда } \frac{SE}{SE+2x} = \frac{1}{2}$$

$$SE = 2x$$

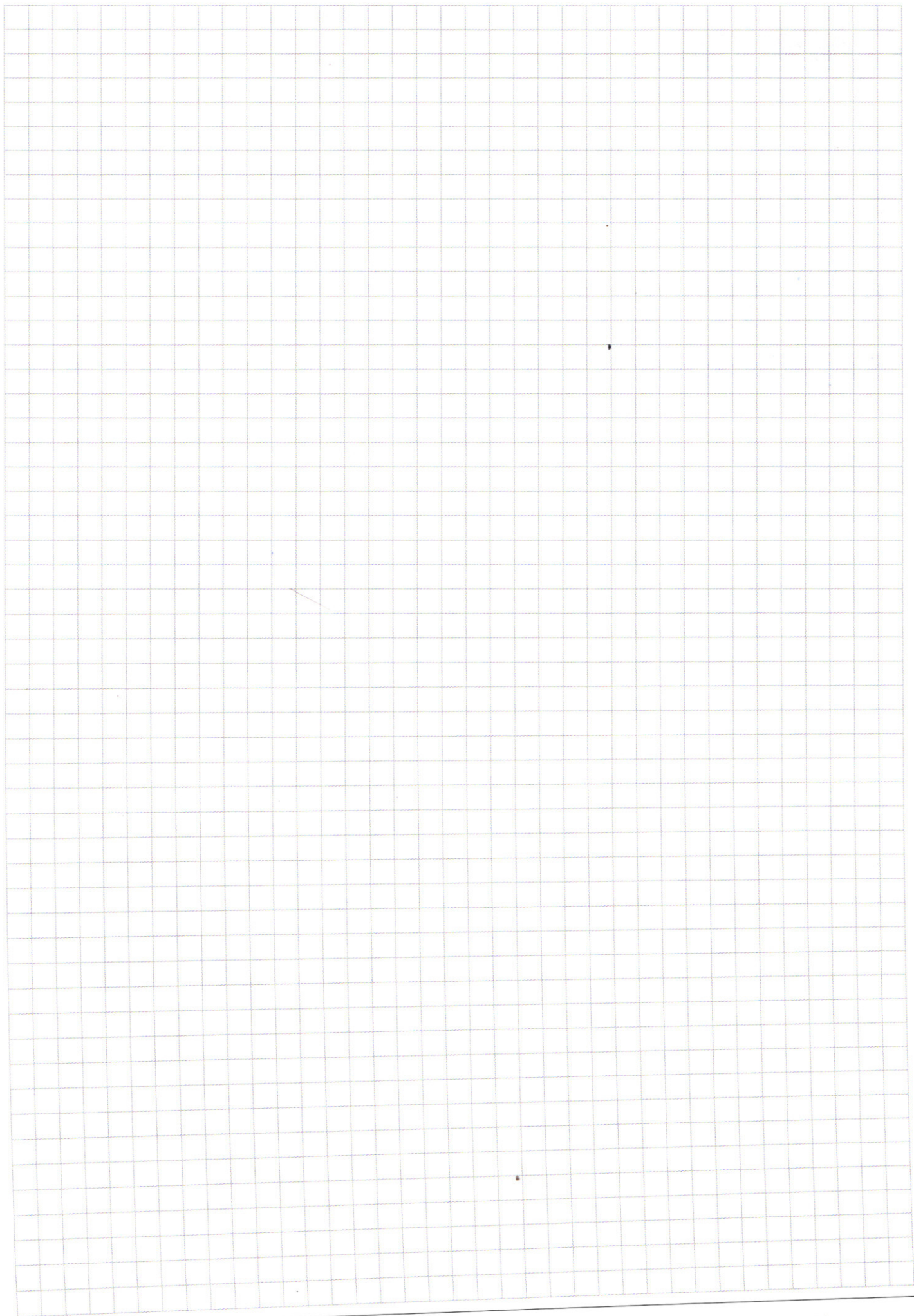
$$\text{Аналогично } KA_2 = 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Уз. т. Пифагора $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$

Тогда ~~$\angle KSO$~~ $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$$S_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot S_2 = \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 375 \overline{) 3} \\ 1125 \overline{) 3} \\ 375 \overline{) 5} \\ 1125 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 8} \\ 3 \overline{) 3} \end{array}$$

$$3 \cdot 5^2 \cdot 11 \rightarrow 0$$

$$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 11 = 15^3$$

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 10 - 56 = 560$$

№2.

$$\cos 11x = \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 4x = 2 \sin 4x \cdot \cos 4x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$-2 \sin 4x (\sin 4x + \cos 4x) = \sqrt{2} (\cos^2 4x - \sin^2 4x) = \sqrt{2} (\sin 4x + \cos 4x) (\sin 4x + \cos 4x).$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 4x + \cos 4x) \Rightarrow -2 \sin 4x = \sqrt{2} \left(\cos 4x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x \right)$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\cos 7x = \cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x = \sin 3x \cdot \cos 4x - \sin 4x \cdot \cos 3x + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}; n \in \mathbb{Z}.$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x y}$$

$$y^{2 \lg x + \lg y} = x^{\lg x} \left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg (3y^2)}$$

$$y^{2 \lg x + \lg y} = y^{2 \lg 3y^2} = (3y)^{\lg 3y}$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = \frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}} = x^{\lg x}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (1)$$

$$(2) (x^2 - 2xy + y^2) - y^2 - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

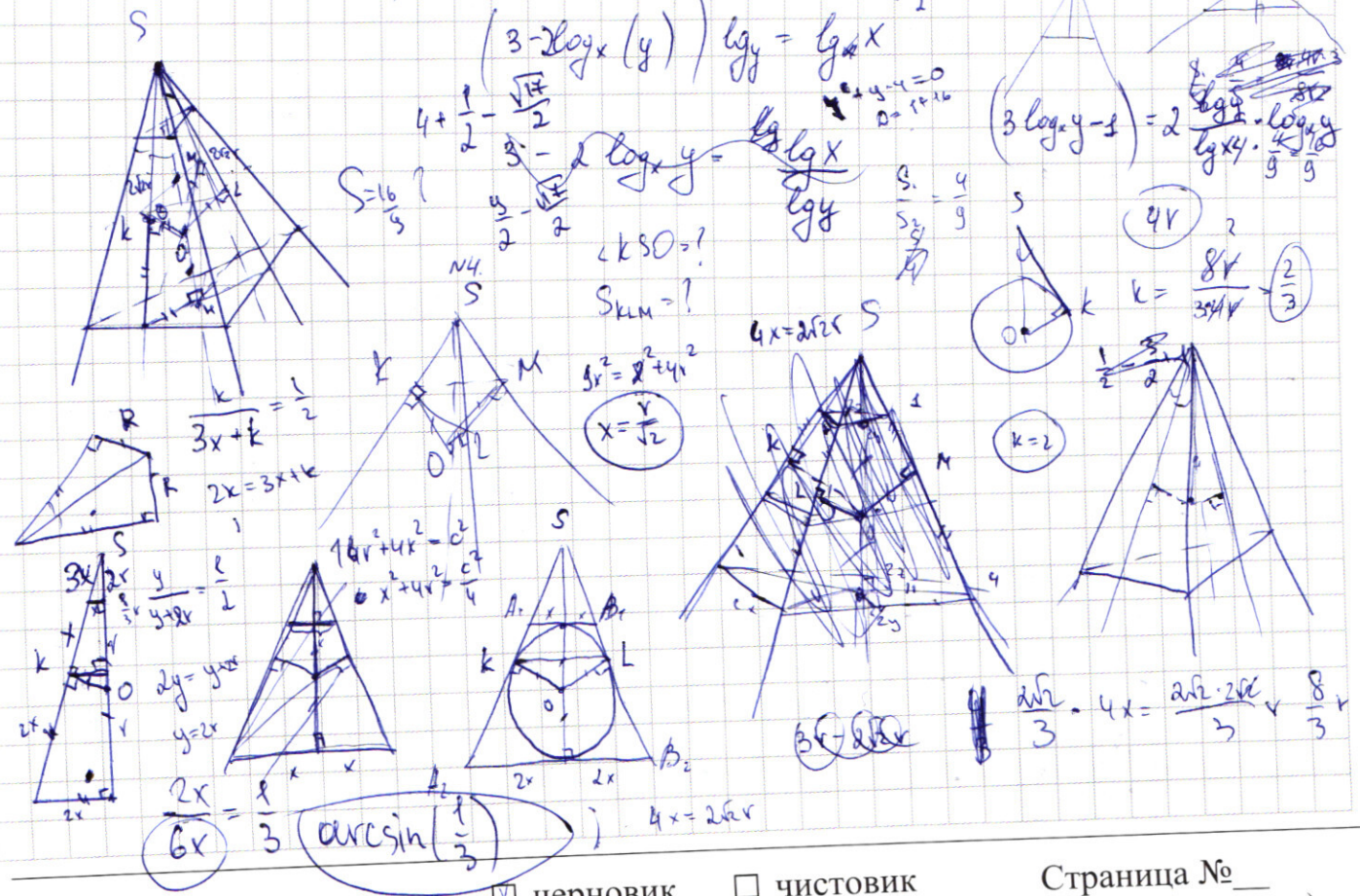
$$(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-y-2y)(x-y+2y) - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y-4) = 0$$

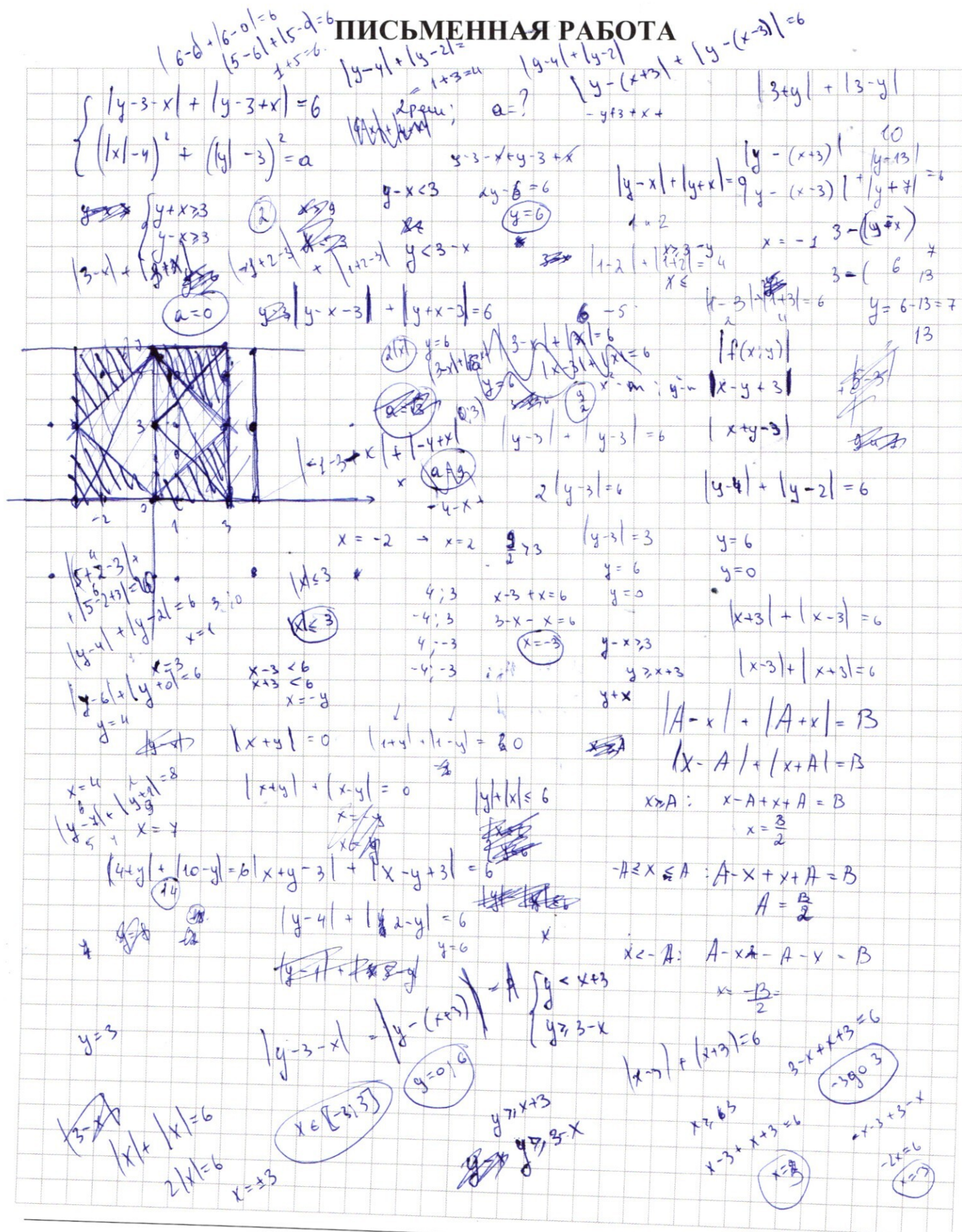
$x = 3y$
 $x = 4 - y \quad 0 < x < 4 \quad 0 < y < 4$
 $\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$
 $y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$
 $y^{3 \lg(3y)} = y^{2 \lg y} \cdot (3y)^{\lg(3y)}$
 $y^{2 \lg 3 + 2 \lg y} = y^{2 \lg y} \cdot 3^{\lg 3 y}$
 $y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 y}$
 $y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y}$
 $3 \lg x = 2 \lg y + \lg y (x^{\lg x}) =$
 $3 \lg x = 2 \lg y + \lg x \log_y x \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

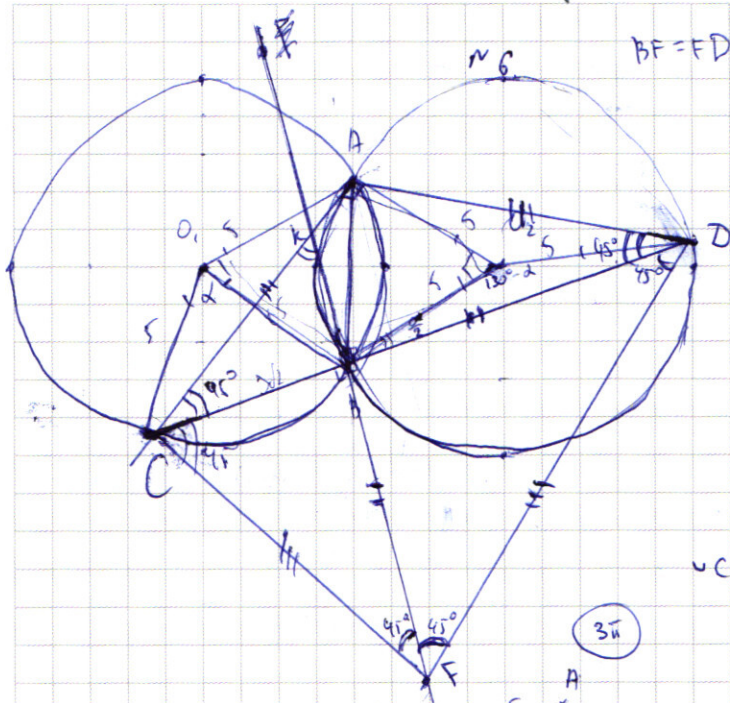
$\frac{y}{x} = \frac{1}{3} \quad y^4 \cdot \frac{1}{3} = y$
 $a^x = b$
 $a^{\log_a a} = a^{\log_a b}$
 $a^{\log_a a} =$
 $\frac{\log a b}{\log a c} = \log \frac{b}{c}$
 $\frac{\lg y}{\lg x}$
 $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{a}$
 $y = \log_3 y$
 $\log_2 4 \cdot \log_4 16 = \log_2 16$
 $\log_2 4 = 2$
 $\log_3 (y^{2 \lg 3}) = \lg 3 y$
 $2 \lg 3 \log_3 (y) = \lg 3 y$
 $2 \lg y = \lg 3 y$
 $y^2 = 3y \Rightarrow y = 0 \text{ - некор.}$
 $y = 3 \Rightarrow x = 3$

2) $x = 4 - y$
 $y^{3 \lg(4-y)} = y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$
 $3 \lg y = \log_x (y) \cdot 2 \lg y + \lg x$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$BF = FD$$

$$r_1 = r_2 = 5$$

(CF?)

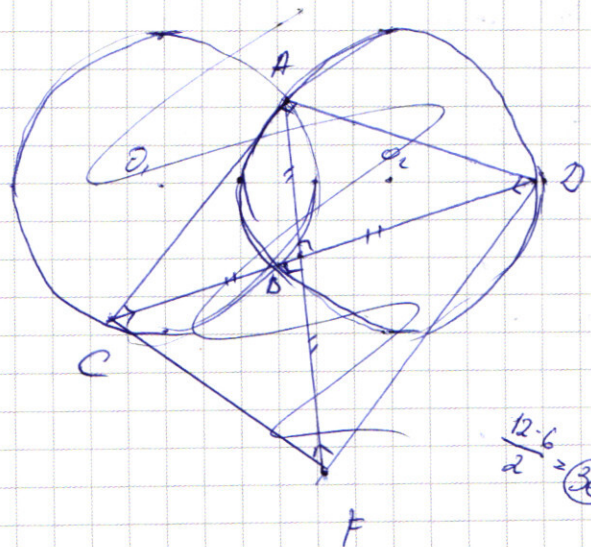
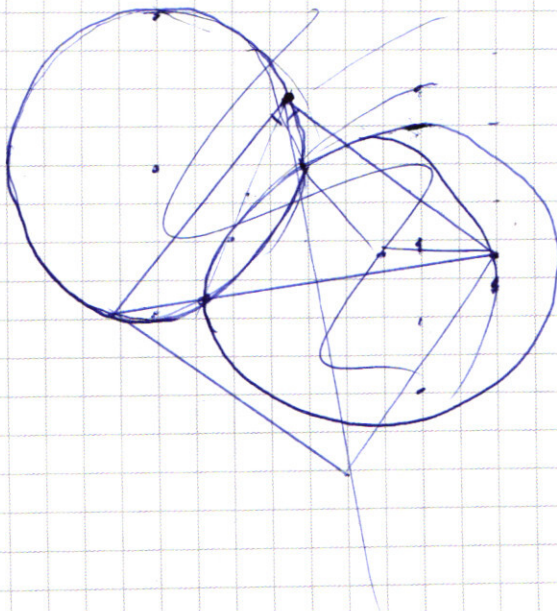
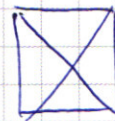
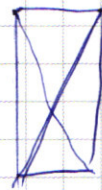
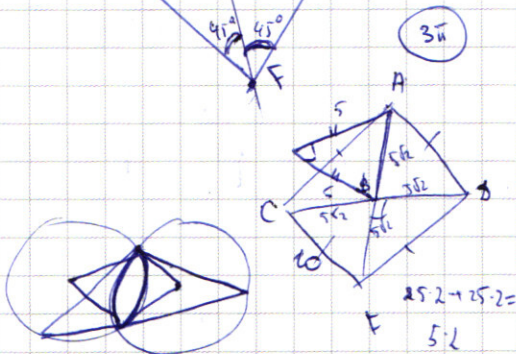
$\angle AB(\omega_1, \omega_2)$ равн.

$$\frac{BK}{AD} = \frac{CB}{AC} = \frac{CK}{CD}$$

$$\frac{BK}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

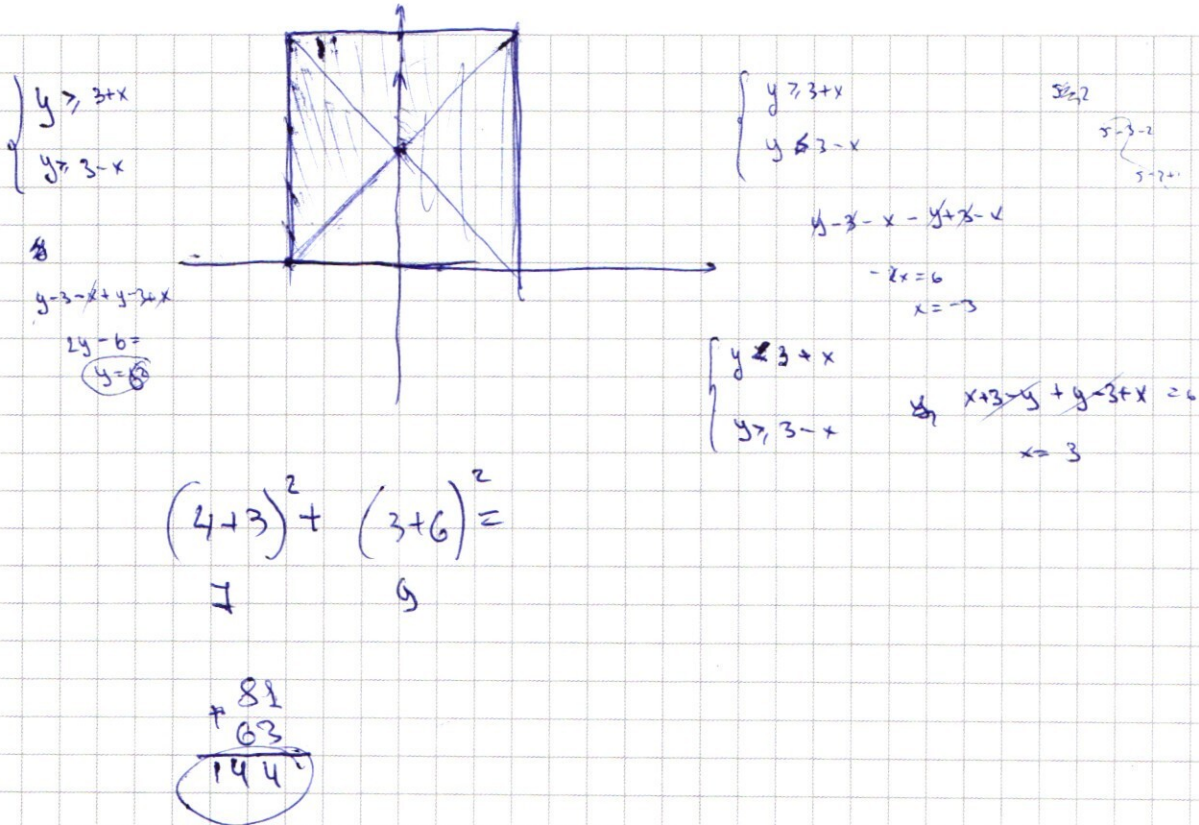
$$\angle CB + \angle BD = \pi$$

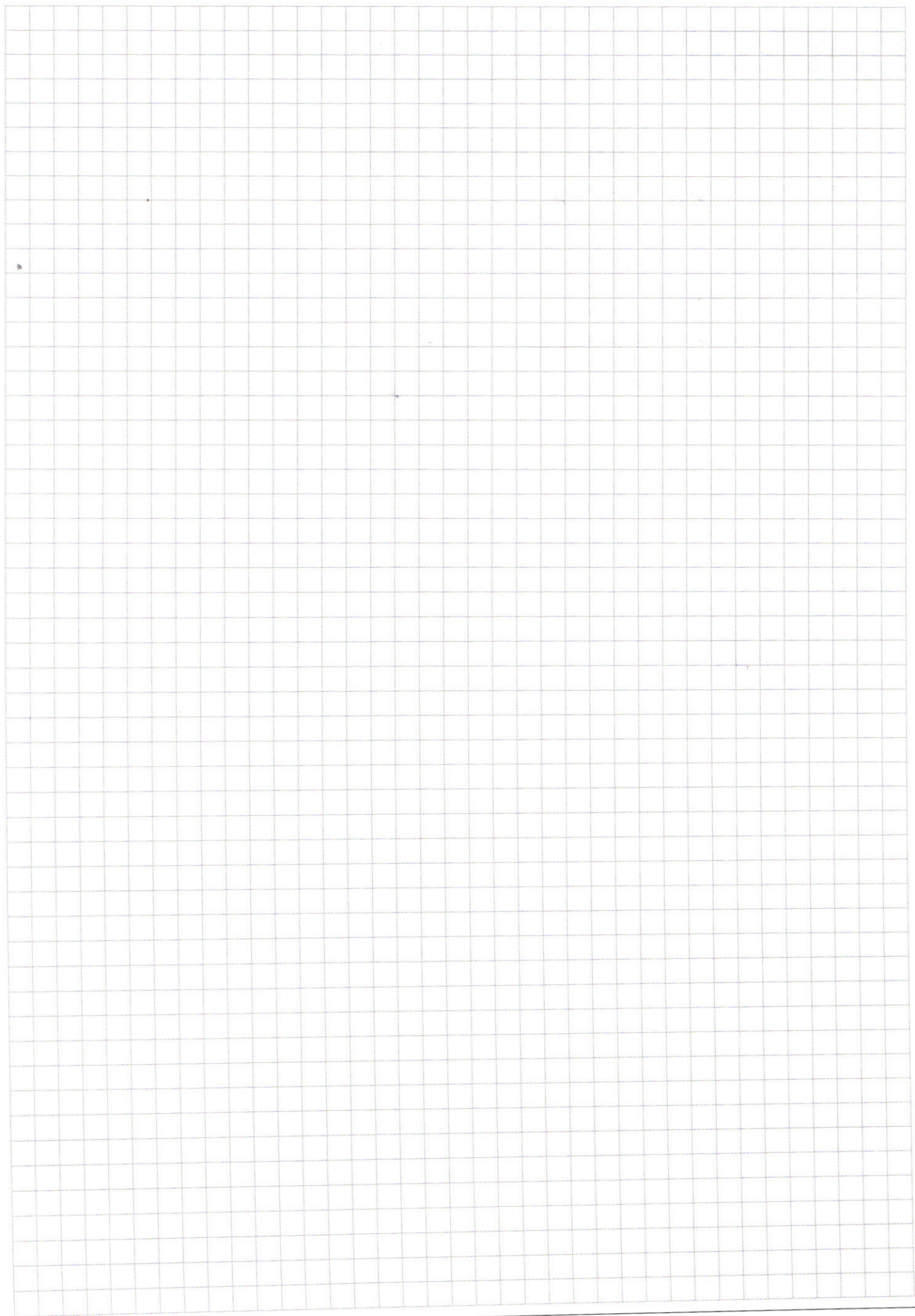
$$CF = AD$$



$$\frac{12-6}{2} = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)