

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Допустим наше восьмизначное число имеет вид:

$$A = \overline{a b c d e f g h}$$

Тогда из условия известно, что:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

Тогда количество таких восьмизначных чисел будет определяться количеством способов выбрать a, b, c, d, e, f, g, h таковыми, которые удовлетворяют равенству $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 16875$ (при этом a, b, c, d, e, f, g, h натуральные числа). Всего способов $\binom{4}{5} \cdot \binom{3}{4} = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 4 \cdot 8 = 160 \cdot 4 = 280$

Ответ: 280

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{1/3} = (-x)^{1/9(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы, как квадратное относительно x .

Дискриминант такого уравнения равен $D = (y-4)^2$

Значит $x = y - 4$ или $x = -2y$

При этом $y > 0$ и $x < 0$

Первое уравнение на ОДЗ может быть представлено, как:

$$1/3(1-x) = 3/9(1-x) - 2/9y^2$$

Если $x = -2y$

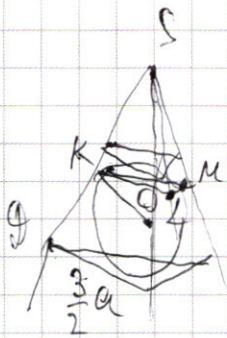
$$1/3(2y) = 3/9(2y) - 2/9y^2$$

$$(1/3 + 1/9y)^2 = 3(1/9 + 1/9y) - 2/9y^2$$

$$1/9 + 2/9y + 1/9y^2 = 3/9 + 3/9y - 2/9y^2$$

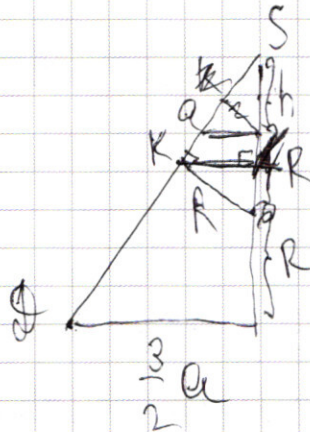
$$3/9y^2 + (2/9y - 3/9y) + 1/9(1-3) = 0$$

$$D = 4/9y^2 - 6/9y + 9 - 12/9y^2 - 36/9y = -8/9y^2 - 2/9y$$



П.к. площади сечений относятся, как $\frac{9}{4}$, то стороны этих сечений относятся как $\frac{3}{2}$.

Посмотрим на рисунок сбоку:



R - радиус сферы

OK - радиус сферы и п.к. к. точка касания $OK \perp DS$.

Рассматривая подобные треугольники получаем, что

$$\frac{\frac{3}{2}a}{a} = \frac{h+2R}{h+R} \quad \frac{3}{2}h+3R=h$$

$$\frac{3}{2}h = h+2R$$

$$h=4R$$

Тогда $\sin(\angle KSO) = \frac{R}{h+R} = \frac{1}{5}$ $\angle KSO = \arcsin(\frac{1}{5})$

Для того, чтобы найти площадь сечения надо найти отношение $\frac{KL}{a}$, т.к. $\triangle SKL$ - прямоугольный, но $\triangle KLS$ - тупоугол.

$KL = KS \cdot \sin(\angle KSO)$, при этом KS из т. Пифагора

$$KS = \sqrt{(5R)^2 - R^2} = 2\sqrt{6}R, \text{ тогда } KL = \frac{2\sqrt{6}}{5}R$$

$$\tan(\angle KSO) = \frac{a}{h} \Rightarrow \frac{4R}{\sqrt{16}} = a \quad a = \frac{2R}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{KL}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}R}{\frac{2R}{\sqrt{6}}} = \frac{6}{5} = k, \text{ тогда площадь } KLM = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot 4 =$$

$$S_{KLM} = k^2 \cdot S_{\text{верхнего сечения}} = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \quad \text{Ответ: } \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Первое ур-ие запишется, как:

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

Отсюда следует, что

$$2 \lg y \cdot \lg 2 = \lg 2 \lg(2y)$$

$$2 \lg y = \lg 2 + \lg y$$

$$\lg y = \lg 2 \quad y = 2 \Rightarrow x = -4$$

Если $x = 4 - y$

$$\left(\frac{(4-y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y/y)} \quad \text{полагая } y \leq 4$$

$$= (4-y)^{\lg(4-y) - \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{-\lg y}$$

$$\left(-\frac{(4-y)^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$2 \lg y \cdot \lg(4-y) - 2 \lg y = \lg(4-y)$$

$$\lg^2(4-y) = 2 \lg y \cdot \lg(4-y) - 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2(4-y) - 2 \lg y \lg(4-y) + 2 \lg^2 y = 0$$

Рассмотрим данное ур-ие как квадратное отн-ко $\lg y$, тогда минимальное значение этого ур-ия будет $\lg^2(4-y)$, а значит равенство будет выполнено, если $\lg(4-y) = 0 \quad 4-y=1 \quad y=3 \Rightarrow x=-1$
 Ответ: $(-1; 2] \cup (-1; 3)$

Значит этот случай не подходит

Ответ: $\kappa = \frac{\bar{x}}{20} + \frac{2\bar{x}}{5} K, K \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-6-y|+|x-6+y|=1$$

$$(x-6)^2+(y-8)^2=a$$

1) Первое ур-ие системы

является квадратом

с центром в точке $(6;0)$ и

сторонами 12 в плоскости

xy

2) Второе уравнение представляет

собой совокупность окр-тей с центрами в точках $(6;8)$, $(6;-8)$, $(-6;8)$, $(-6;-8)$, т.е. четыре окр-ты с радиусом $\sqrt{a}$ (окр-ты при условии, что $\sqrt{a} \leq 6$). Но тогда нам подойдет только случай, когда окр-ты с центрами $(6;8)$ и $(-6;8)$ касаются верхней и нижней сторон куба. Это происходит, если $\sqrt{a} = 2$, т.е. $a = 4$.

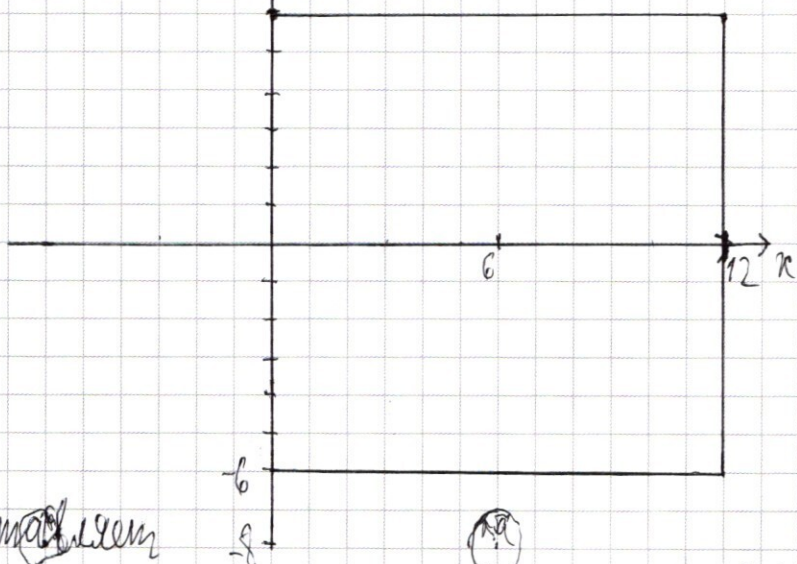
3) Также нам подходит случай, когда $\sqrt{a} = 10$, в этом случае решения будут располагаться на концах средней линии квадрата, которая лежит на оси абсцисс.

Ответ: $a = 4$; $a = 100$

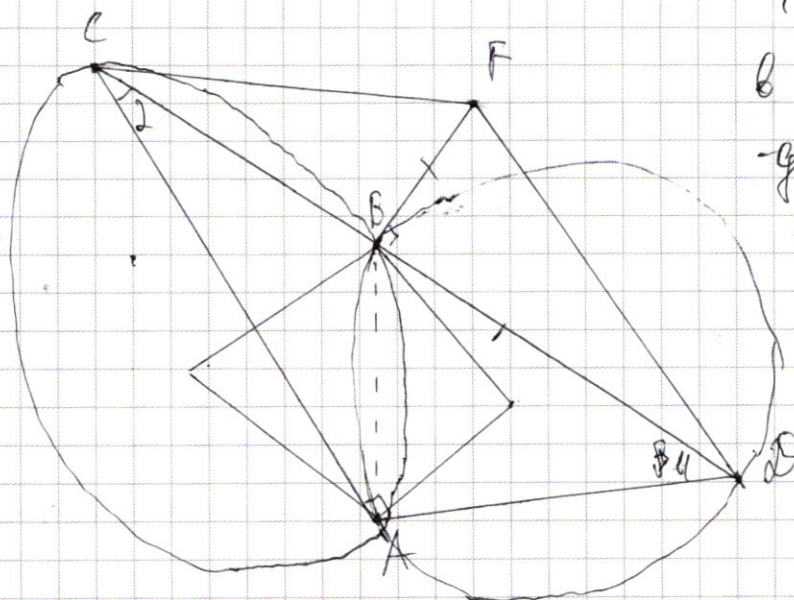
№5

№5

№5



№5



1) $\triangle ABC$ и ABD вписаны
в окр-ти одинаковых ра-
диусов, а значит по те-
ореме синусов

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\alpha = \beta$$

т.к. ACD прямоугол.

$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

$$AC = AD$$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2 \cdot 13$$

$$AD = AC = a$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

Из этого следует из равенства углов, что AB - ме-
диана $\triangle ACD$, а значит $AB = CB = CD = BF = 13\sqrt{2}$, тогда

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = CB\sqrt{2} = 26$$

Центр окр-тей лежит на одной прямой и на одинаковом
расстоянии от AB , по т. кос. $AB^2 = a^2 + CB^2 - 2a \cdot CB \cdot \cos \alpha$ т.к. $\alpha = 45^\circ$
применяем $\Rightarrow AB = BC = BD = 13\sqrt{2} \Rightarrow CF = 26$ $\frac{AB^2}{2} = a^2 + BD^2 - 2 \cdot a \cdot BD \cdot \cos \beta$ $\frac{AB^2}{2} = a^2 + BD^2 - 2 \cdot a \cdot BD \cdot \cos \beta$ $\frac{AB^2}{2} = a^2 + BD^2 - 2 \cdot a \cdot BD \cdot \cos \beta$ $\frac{AB^2}{2} = a^2 + BD^2 - 2 \cdot a \cdot BD \cdot \cos \beta$

$$\cos(4\pi) + \cos(6\pi) - \sqrt{2} \cos(10\pi) = \sin(4\pi) + \sin(6\pi)$$

$$\cos(4\pi) - \sin(4\pi) + \cos(6\pi) - \sin(6\pi) = \sqrt{2} \cos(10\pi)$$

$$2 \cos 2\pi (\cos 5\pi - \sin 5\pi) = \sqrt{2} \cdot (\cos(5\pi) - \sin(5\pi)) (\cos(5\pi) + \sin(5\pi))$$

Если $\cos(5\pi) = \sin(5\pi)$ равенство верно

$$\text{тогда } 5\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{или } 5\pi = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k \quad k = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Если } \sin(5\pi) \neq \cos(5\pi) \quad 2 \cos(2\pi) = \sqrt{2} (\cos(5\pi) - \sin(5\pi)) \quad \cos(2\pi) = \sin(5\pi + \frac{\pi}{4})$$

$$2\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad 2\pi = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \quad \text{Вывод, что при данных значениях } \cos(2\pi) \neq \sin(5\pi + \frac{\pi}{4})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(10x) = \cos(10x - 3x) = \cos(10x) \cdot \cos 3x + \sin(10x) \cdot \sin 3x$$

$$\sin(7x) = \sin(10x - 3x) = \sin 10x \cdot \cos 3x - \cos 10x \cdot \sin 3x$$

$$\cos(10x) \cdot \cos 3x + \sin(10x) \cdot \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 10x \cdot \cos 3x - \cos 10x \cdot \sin 3x + \sin 3x$$

$$1 \cdot \cos 10x$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2 \lg 2 - 3}{3} \quad x_1 x_2 = \frac{16 \lg^2 2 - 9}{9}$$

$$\frac{\cos(3x)}{\sin(10x)} + \cos(6x) + \tan(10x) - \sqrt{2} = \tan(10x) \cdot \cos 3x - \sin 3x + \frac{\sin 3x}{\cos 10x} - (10x - 3) - 10x$$

$$\tan(10x) (\sin 3x - \cos 3x) + \cos 3x$$

$$\cos(3x) - \sin(3x) = -\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$$

$$-\sqrt{2} (\sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x) = \cos 3x - \sin 3x$$

$$-\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = -\cos 10x$$

$$2 \sin(5x - \frac{\pi}{4}) \cos(2x) = -\cos(10x)$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} + (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-xy)} \cdot (-x)^{\lg(-xy)}$$

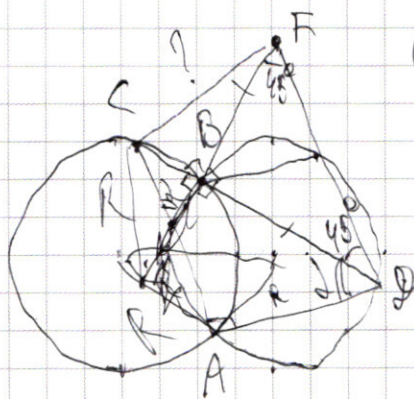
$$\lg(-xy) = \lg(-x) + \lg(-y)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 - 4x - 8y = 0$$

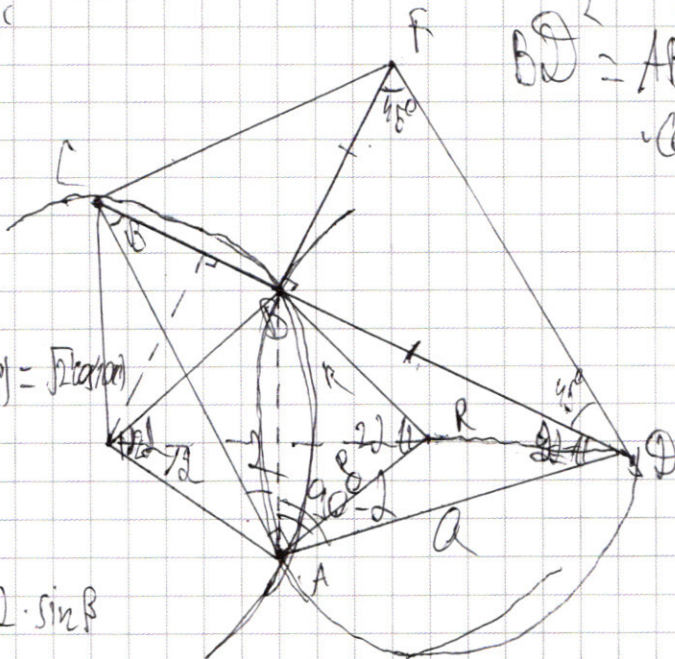
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0$$

$$D = 16 + 8y + y^2 - 4(8y - 2y^2) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$



$$CB^2 = AB^2 + a^2 - 2AB \cdot a \cdot \cos 2$$

$$BD^2 = AB^2 + a^2 - 2AB \cdot a \cdot \cos(90^\circ - 2)$$



$$(\cos 4x - \sin 4x + \cos(3x)) - \sin(3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(10x) = \sin 1$$

$$\cos(2+\beta) = \cos 2 \cdot \cos \beta - \sin 2 \cdot \sin \beta$$

$$\cos(10x) = \cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x$$

$$\sin(2+\beta) + \sin(2-\beta) = 2 \sin 2 \cos \beta$$

$$\cos(2+\beta) + \cos(2-\beta) = 2 \cos 2 \cos \beta \quad \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin 2}$$

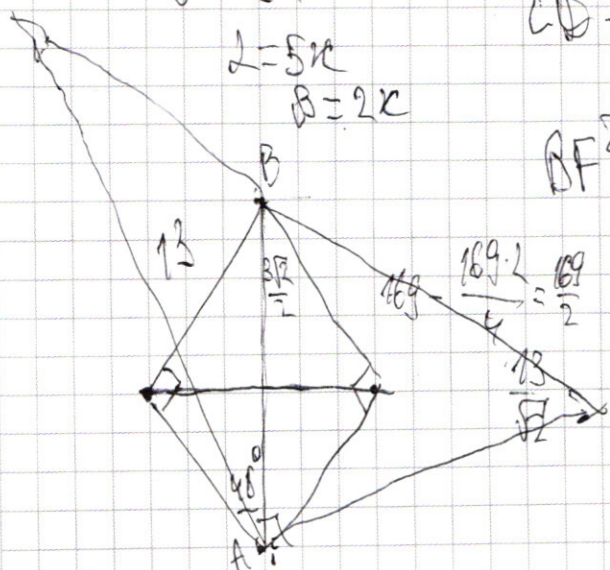
$$\cos(2+\beta) + \cos(2-\beta) = (\sin(2+\beta) + \sin(2-\beta))$$

$$2 + \beta = 4x$$

$$2 - \beta = 3x$$

$$2 = 5x$$

$$\beta = 2x$$



$$CD = a\sqrt{2}$$

$$BF^2 + (CD - BD)^2 = BF^2 + CD^2 - 2CD \cdot BF + BF^2$$

$$2BF^2 - 2CD \cdot BF$$

$$\sin(5x) = \cos(5x) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2(5x) - \sin^2(5x))$$

$$\cos 5x =$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos(5x) - \sin(5x)) (\cos(5x) + \sin(5x))$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\cos(3\pi) - \sin(3\pi) =$$

a b c d e f g h

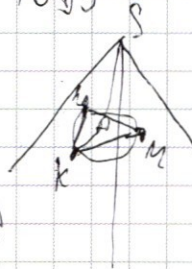
$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 16875 = 5 \cdot 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

число без нулей с пятеркой, с девяткой $\frac{3}{2} \lg(4-5) \quad \frac{9}{2} \lg(4-5)$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -15 \\ \hline 35 \\ -34 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$(2000 + 300 + 70 + 5) \cdot 5 = 15000 + 1500 + 350 + 25$$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 675 \\ -5 \\ \hline 74 \\ -74 \\ \hline 15 \\ -15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \\ -10 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\frac{3}{2} \lg 4 \quad \frac{9}{4} \lg 4 - \frac{9}{2} \lg 4 + 2 \lg 4$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 24$$

$$\frac{4!}{8} \cdot \frac{3!}{4} \cdot \frac{1!}{1} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{1!}{1! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 20 \cdot 4$$

$$2 \cos 3\pi \cdot \cos 2\pi - \sqrt{2} (\cos^2(5\pi) - \sin^2(5\pi)) = 2 \sin 3\pi \cos 2\pi$$

$$\cos 2\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5\pi - \sin 5\pi)$$

$$\cos 4\pi + \cos 3\pi - \sqrt{2} \cos 10\pi = \sin 4\pi + \sin 3\pi$$

$$\cos(2+\beta) = \cos 2 \cos \beta - \sin 2 \sin \beta$$

$$\sin(2+\beta) = \sin 2 \cos \beta + \sin \beta \cos 2$$

$$\cos(2-\beta) = \cos 2 \cos \beta + \sin 2 \sin \beta$$

$$\sin(2+\beta) = \sin 2 \cos \beta - \sin \beta \cos 2$$

$$\cos(2+\beta) + \cos(2-\beta) = 2 \cos 2 \cos \beta$$

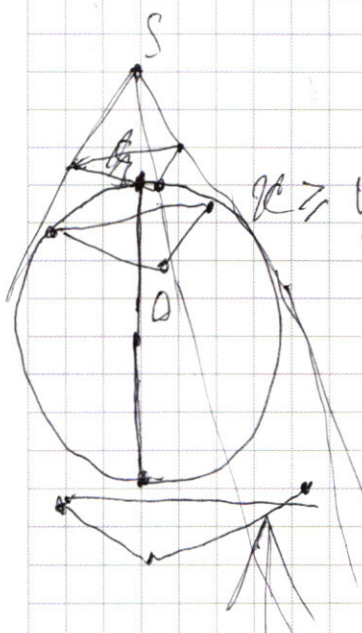
$$\sin(2+\beta) + \sin(2-\beta) = 2 \sin 2 \cos \beta$$

$$2 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 4\pi + \cos 3\pi = 2 \cos 5\pi \cdot \cos 2\pi$$

$$\sin 4\pi + \sin 3\pi = 2 \sin 5\pi \cdot \cos 2\pi$$

$$\cos 10\pi = 2 \cos^2(5\pi) - 1 = \cos^2(5\pi) - \sin^2(5\pi)$$



$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\cos^2 = 1 - \sin^2 = \frac{24}{25}$$

$$x \geq y \geq 0$$

$$x \geq 6 + y \quad \tan = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$$x \geq 6 - y$$

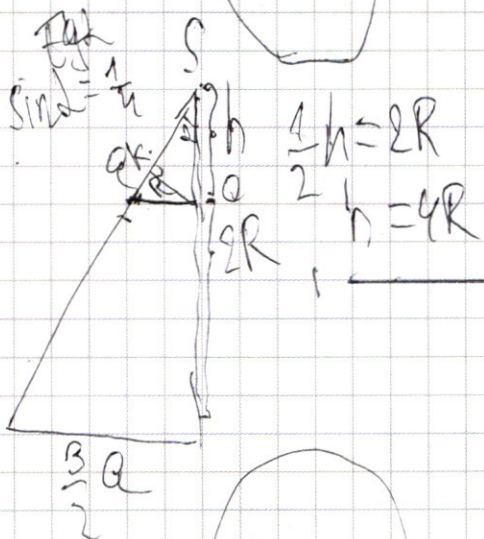
$$y \leq x - 6$$

$$y \geq 6 - x$$

$$\begin{aligned} x &= 6 - y \\ -x + 6 + y + x - 6 + y &= 12 \\ y &= 6 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$k = \frac{3}{2}$$



$$\frac{1}{2}h = 2R$$

$$h = 4R$$

$$a = 100$$

$$a \neq 0$$

$$3b + y = a$$



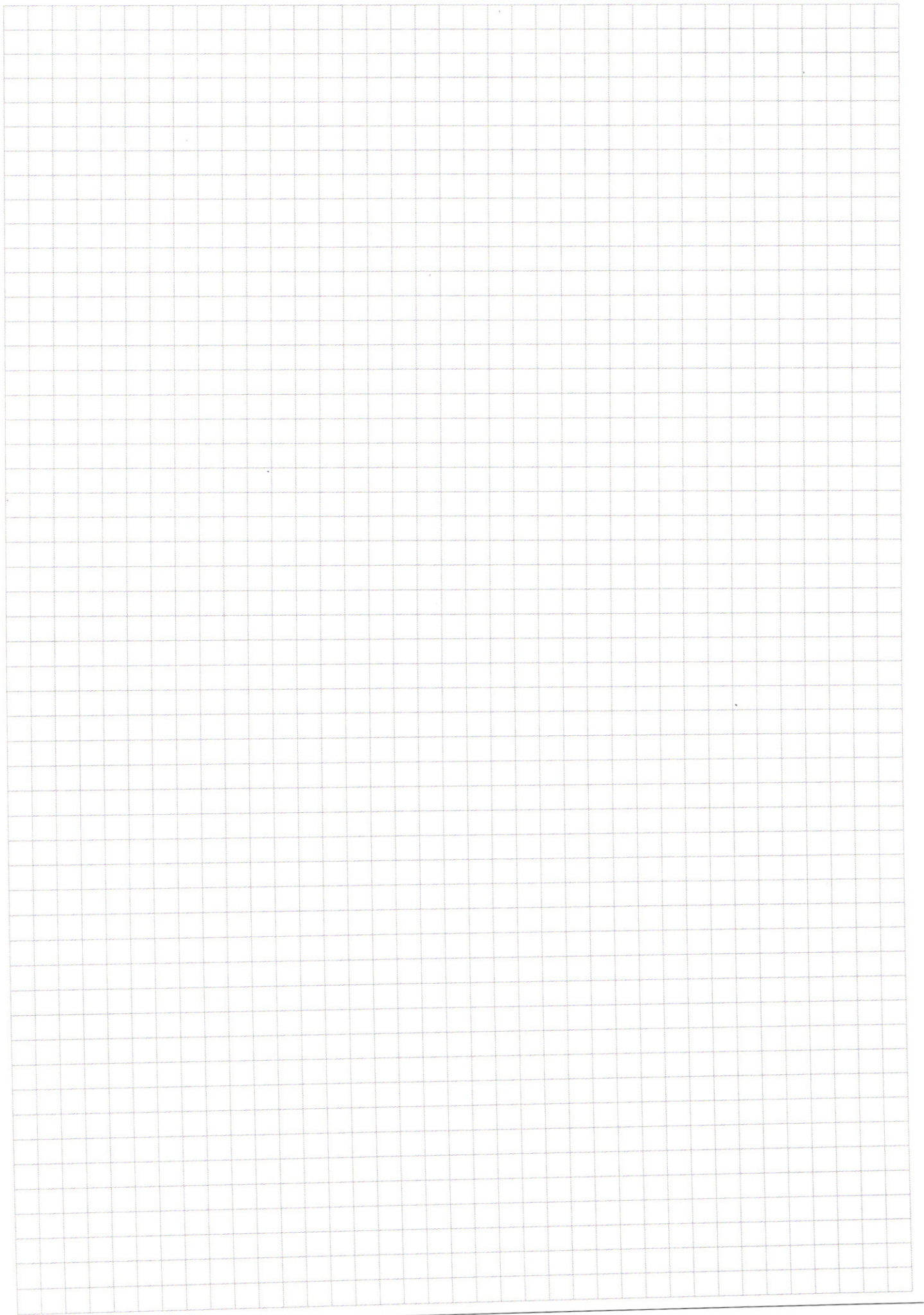
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)