

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(5x+4x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(5x+4x) + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cancel{\cos 5x \cos 4x} - \cancel{\sin 5x \sin 4x} - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \cancel{\sin 5x \cos 4x} + \cancel{\cos 5x \sin 4x} + \sin 5x = 0$$

$B = \sin 5x$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 4x (\sin 5x - \cos 5x) + (\sin 5x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\sin 5x - \cos 5x)(1 - \sin 4x) + \cos 4x$$

$$bc - ad - b - \sqrt{2}c + ac + bd + a = 0$$

$$c(b - \sqrt{2} + a) - a(d - 1) - b(1 - d)$$

$$\sin 5x (\cos 4x + 1) - \cos 5x$$

$$\begin{aligned} a &= \sin 5x \\ b &= \cos 5x \\ c &= \cos 4x \\ d &= \sin 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 4x \\ \beta &= 5x \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin \beta = 0$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta - \sqrt{2} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \beta = 0$$

$$\sin \beta (\cos \alpha - \sin \alpha + 1) + \cos \beta (\cos \alpha + \sin \alpha - 1) - \sqrt{2} \cos \alpha = 0$$

$$-\sqrt{2} \cos \alpha = 0$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha + 1)(\sin \beta + \cos \beta) - \sqrt{2} \cos \alpha = 0$$

$$c - s + s^2 + c^2$$

~~cos 5x~~

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 4x \cos 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x + \sin 5x = 0$$

$$1 - \cancel{\cos 4x} \cancel{\cos 5x} - \frac{1}{\cos 4x} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cos 5x}$$



$$\cos 5x \cos 4x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x + \sin 5x = 0$$

$$2x^{34} \leq y \leq 75 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot \cos(\underbrace{4x + \varphi}_{\sin(4x + \varphi)}) + \sqrt{2} \sin 5x \cos(4x + \varphi) +$$

$$+ \sqrt{2} \cos(4x + \varphi) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(4x + \varphi)$$

$$\begin{matrix} 33 \\ 2x - 2x \\ 288x - 2 \end{matrix}$$

$$3x \cdot \sqrt{173}$$

$$\cos 5x \cos(4x + \varphi) + \sin 5x \sin(4x + \varphi) + \cos(4x + \varphi) - \cos 4x = 0$$

$$\cos(9x + \varphi)$$

$$\cos(x - \varphi) + 2 \sin \frac{8x + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(9x + \varphi) + \sqrt{2} \sin(5x + \varphi) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{13x + \varphi}{2} + \sin \frac{5x + \varphi}{2} + \sin(5x + \varphi) = 0$$

$$2 \sin \frac{13x + \varphi}{2} + 2 \cos \frac{5x + \varphi}{2} = 0$$

$$\sin 5x + \varphi = 0$$

$$5x + \varphi = 2\pi k$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin(9x + \varphi)$$

$$\cos(9x - \varphi)$$

$$\cos(9x - \varphi)$$

$$\sin(5x - \varphi)$$

$$\cos(5x - \varphi) = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

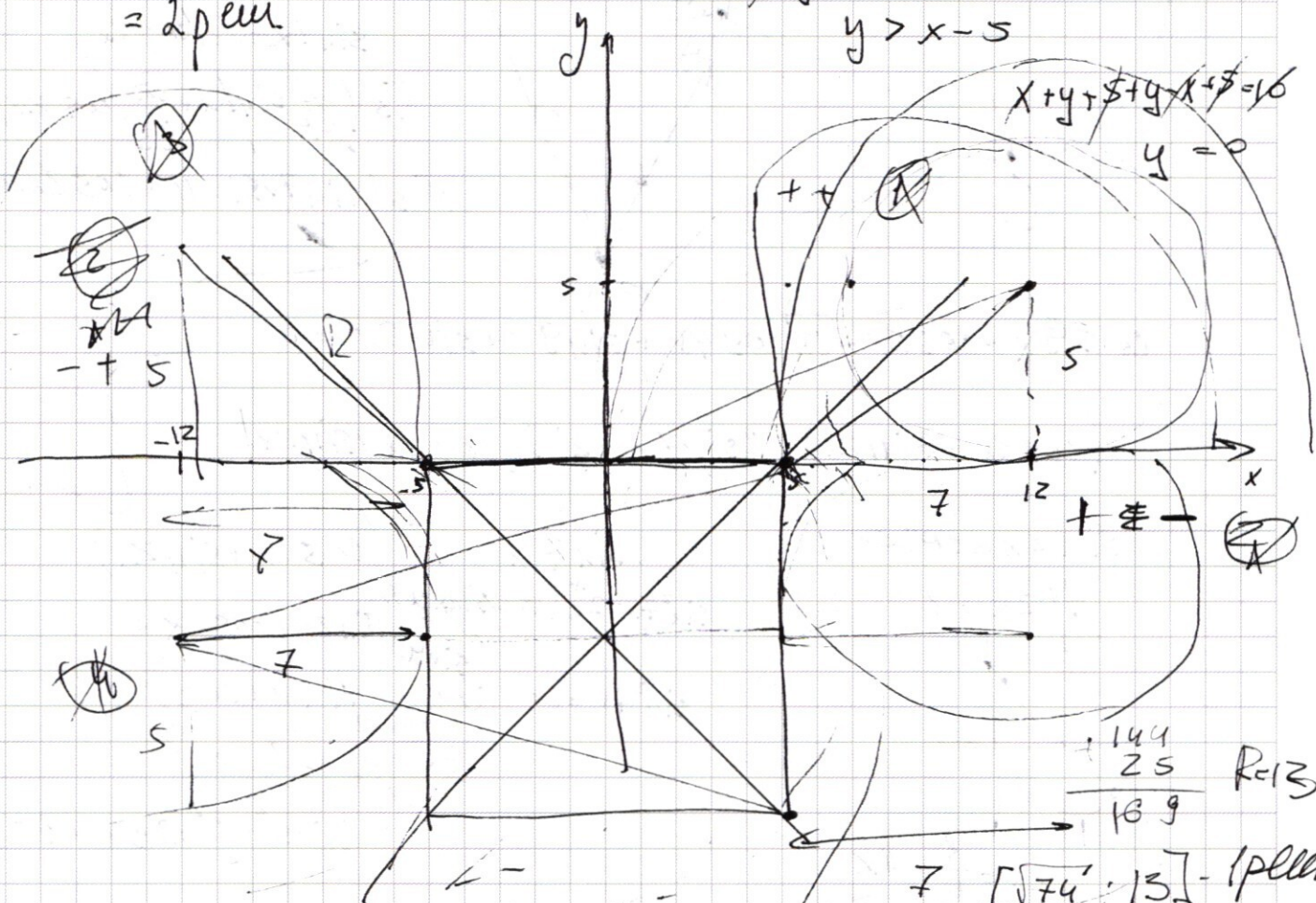
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

= 2 реш.

1) $x+y+5 > 0$ R -параметр
 $y > -x-5$
окр.

2) $y-x+5 > 0$
 $y > x-5$



2) $x+y+5 - y+x-5 = 10$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 25 \\ \hline 314 \end{array}$$

$2x = 10$

$x = 5$

$R < 7 \rightarrow 0$ реш.

$R = 7 \rightarrow 2$ реш.

$7 \leq R < \sqrt{74} \rightarrow 2$ реш.
 $R = \sqrt{74}$

1) $49 + 25 = 74 \Rightarrow R = \sqrt{74}$ 1 реш.

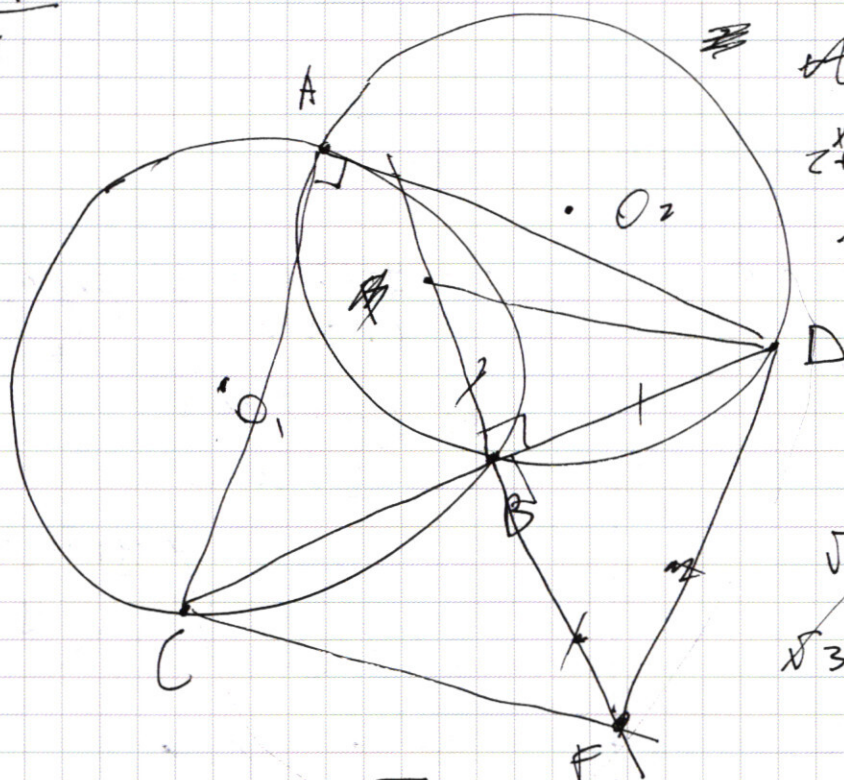
2) $R = \sqrt{74}$ 1 реш.

3) $R = 7$ 1 реш.

4) $R^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$
 $R = \sqrt{169} = 13$ 2 реш.

5) $(7; \sqrt{314})$ - 2 реш.

1.6



$$2^x + 3 \cdot 2^x \leq 4 \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

~~Handwritten scribbles~~

$$2^x + 3 \cdot 2^x \leq 4 \leq 75 + 2^x - 2x$$

$$x - 2 \leq 0$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 7x + \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos 2x \right)$$

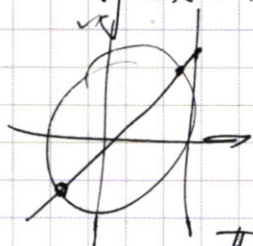
$$\sqrt{3} (\sin 7x \sin 4 + \cos 2x \cos 24)$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - 2\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 4x)) = 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$\tan 2x = 1$$



$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$$

$$\sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 4x)$$

$$\sin^2 7x = 2 \left(1 + 2 \sin 2x \cos 2x \right)$$

$$\sin^2 7x = 2 + 4 \sin 4x$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = k$$

$$k^2 = s^2 + c^2 + 2sc = 1 + 2sc$$

$$\sin \alpha + \cos \beta =$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta (\sin \alpha + \cos \alpha) + \sin \beta (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$= (\sin \beta + \sin \alpha) (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\sin \theta + \cos \varphi = \left(\sin \frac{\theta + \varphi}{2} + \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta + \varphi}{2} + \sin \frac{\theta - \varphi}{2} \right)$$

$$\alpha + \beta = \theta \Rightarrow 2\alpha = \theta + \varphi$$

$$\alpha - \beta = \varphi \Rightarrow 2\beta = \theta - \varphi$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 7x = \sqrt{2} (\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\sqrt[4]{(x^2 y^4) \cdot \ln x} = y \ln \frac{y}{x^3}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\cancel{y^2 - 2xy} - \cancel{2x^2 + 8x} -$$

$$-2(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) -$$

$$-xy + 8 - 4 = 0$$

$$\cancel{(x+2)^2} + \cancel{(y-4)^2} - xy - 4$$

$$x^{-2} \ln x \cdot y^{-4} \ln y = y \ln \frac{y}{x^3}$$

$$x^{-2} \ln x = y \ln \frac{y}{x^3} + 4 \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x^3} \cdot x^4 \right) = y \ln \frac{y}{x^3}$$

$$-2 \ln x \ln x = \ln y \ln \frac{y}{x^3}$$

$$-2 \ln^2 x = \ln y (\ln y - 3 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln^2 y - 2 \ln x \ln y + \ln^2 x = 0$$

$$- \ln x \ln y + \ln^2 x = 0 \quad 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = x \quad 252$$

$$(\ln y - \ln x)^2 - \ln x (\ln y - \ln x) = 0$$

$$(\ln y - \ln x) (\ln y - 2 \ln x) = 0$$

$$\ln y = \ln x \quad \ln y = \ln x^2$$

$$x = y$$

$$y = x^2$$

$$y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$$

$$-2y^2 + 4y = 0$$

$$y(2y - 4) = 0$$

$$y = 0 \text{ или } y = 2 \Rightarrow x = 2$$

п.к.

(y > 0)

$$2) y = x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad | :x, x > 0$$

$$\cancel{x^4} \quad x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\cancel{-8 - 4 - 12 + 8}$$

$$\cancel{-8 - 4 - 12 + 8}$$

$$(4) \quad 64 - 16 - 24 + 8$$

$$\cancel{864}$$

$$(-4) \quad -64 - 16 + 24 + 8$$

$$(8) \quad x^2 - x - 6 + 1 = 0$$

$$8^2 - 64 - 6 \cdot 8 + 8 = 0 : 8$$

$$64 - 8 - 6 + 1$$

$$1: 1 - 1 - 6 + 8$$

$$-1: -1 - 1 + 6 + 8$$

$$2: 8 - 4 - 12 + 8 = 16 - 16 = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & -6 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = (\sqrt{17})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$y = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4}$$

$$= \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\underline{16} \quad (x; y) \quad \{x, y\} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$(3 \cdot 2^{34}; 10)$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$y = 0 \quad \begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 \\ (|x| - 2)^2 + (|y| - 5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$R = 8$$

$$R = 18$$

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ y - x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$2y + 10 = 0$$

$$y = -5$$

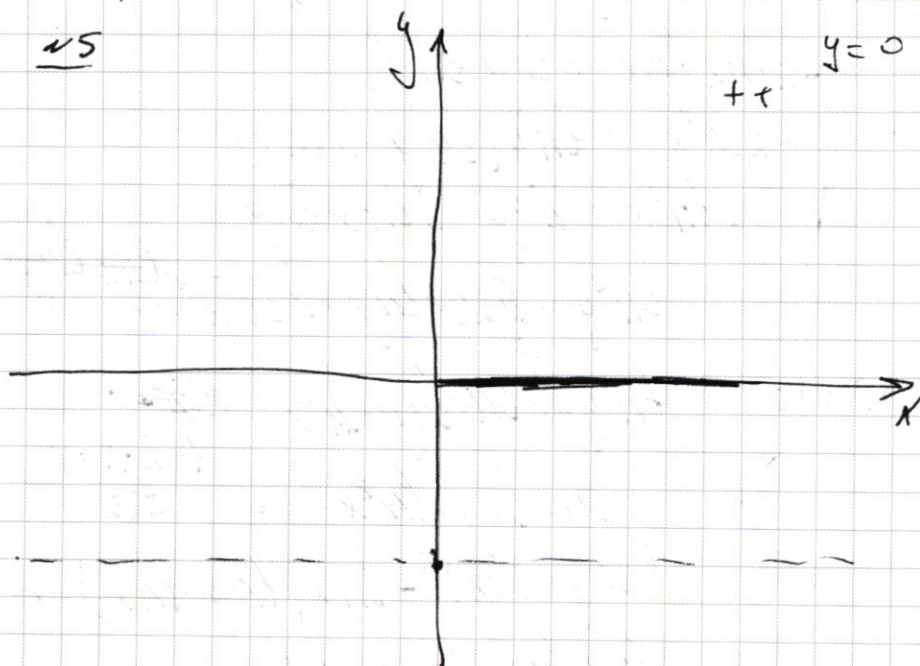
$$x = 0$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq -5$$

$$x + y \geq -5$$

$$x + y + 5 > 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3$$

3; 7; 1

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8^4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 24 \cdot 35$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{-9} \\ 26 \\ \underline{-18} \\ 81 \\ \underline{-81} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 9} \\ \underline{-9} \\ 12 \\ \underline{-9} \\ 39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{-9} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{-28} \\ 63 \\ \underline{-63} \\ 0 \end{array}$$

$$C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 4 \cdot 35 = 140$$

$$C_8^3 \cdot C_5^2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 56 \cdot 10 = 560$$

$$\cos 9x = \cos 5x \Rightarrow \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x + \sin 4x = 0$$

13

$$(x^2 y^4) - \ln x = y \ln \frac{y}{x^7} \Rightarrow \ln x - \ln x \ln x^2 y^4 = \ln \frac{y}{x^7} \cdot \ln y$$

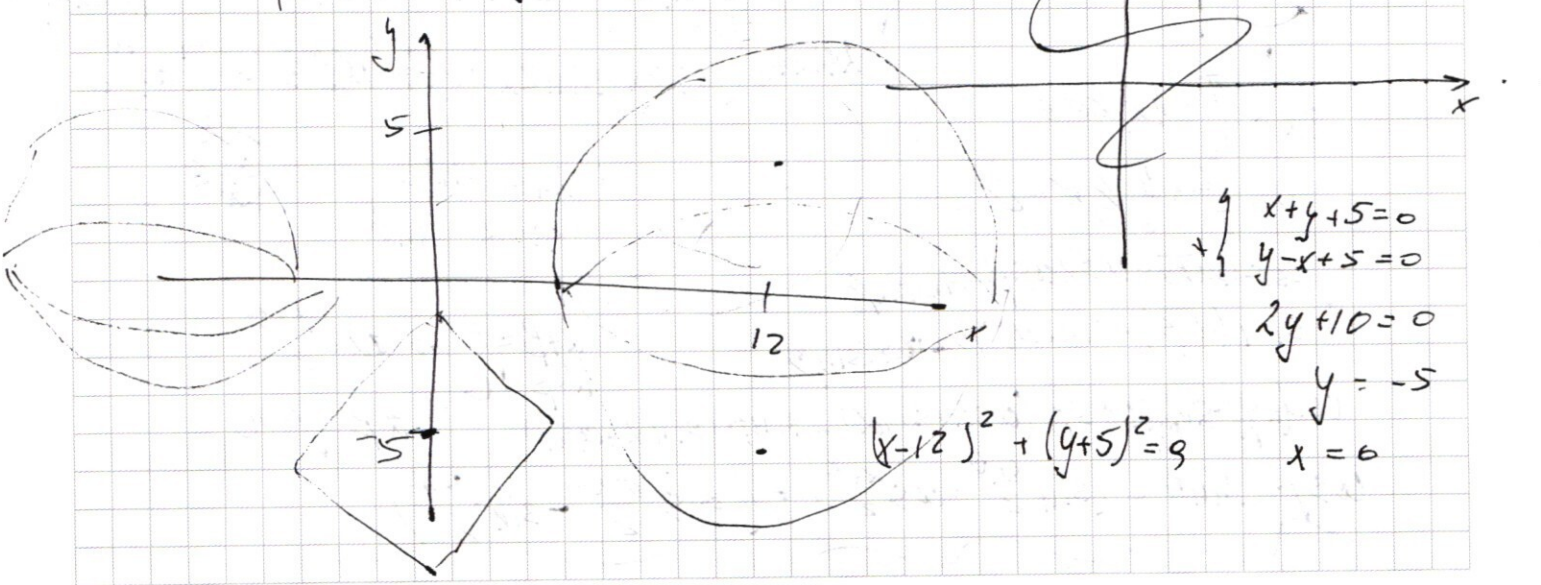
$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

а. ? реш.

15

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 9$$



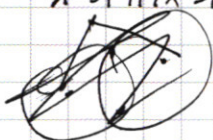
$$\begin{cases} x+y+5=0 \\ y-x+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+10=0 \\ y=-5 \\ x=0 \end{cases}$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = 9$$

23

$$\cos 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = \tau$$

$$\alpha - \beta = \theta$$

$$\alpha = \frac{\theta + \tau}{2}, \beta = \frac{\tau - \theta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos \tau + \cos \theta = 2 \cos \frac{\tau + \theta}{2} \cos \frac{\tau - \theta}{2}$$

$$\sin \tau + \sin \theta = 2 \sin \frac{\tau + \theta}{2} \cos \frac{\tau - \theta}{2}$$

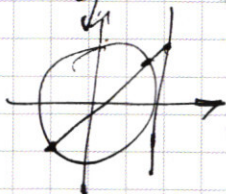
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - 2\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - 2\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\tan 2x = 1$$



$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \cos \beta (\cos \alpha + \sin \alpha) - \sin \beta (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\cos \tau + \sin \theta = \left(\sin \frac{\tau + \theta}{2} + \cos \frac{\tau + \theta}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{\tau - \theta}{2} - \sin \frac{\tau - \theta}{2} \right)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \tau - \cos \theta = 2 \sin \frac{\tau + \theta}{2} \sin \frac{\tau - \theta}{2}$$

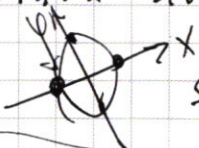
$$\alpha - \beta = \tau \rightarrow \alpha + \beta = \theta$$

$$\alpha = \frac{\tau + \theta}{2}, \beta = \frac{\theta - \tau}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$



$$\sin 7x = \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\alpha + \beta = \tau \rightarrow \alpha = \frac{\tau + \theta}{2}$$

$$\alpha - \beta = \theta$$

$$\alpha \beta = \tau - \theta$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

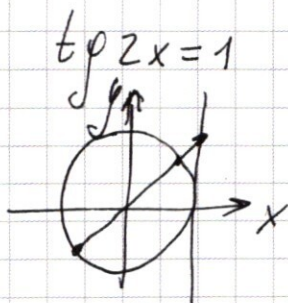
$$-1 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x \quad | : \cos 2x, \quad \cos 2x \neq 0$$



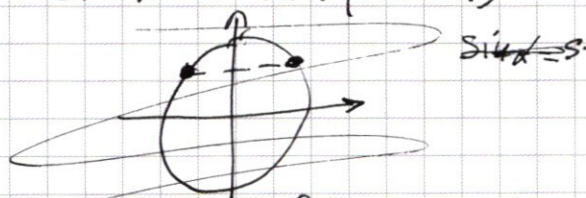
$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right)$$

$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$



1) 7x отнимается от $2x + \frac{\pi}{4}$ на

2) πk (так как $\sin x = \sin(x + \pi k)$)

2) πk (так как $\sin x = \sin(x + \pi k)$)

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 7x + \sin \left(-2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos \left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

Продолжение на след. странице

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

(2) - окружности

~~с~~ с центрами $(\pm 12; \pm 5)$ и радиусом $R = \sqrt{14}$

При этом каждая окружность определена только в своей четверти.

Т.е. макример окружности с ц. $(12; 5)$
определение при $x \geq 0$ и $y \geq 0$
(I четверть).

В силу симметрии картинки отн. Oy
можно описать только для окр. I и IV
четвертей.

I (II): проходит ч/з $(5; 0)$

из рисунка $R^2 = 5^2 + 7^2 \Rightarrow R = \sqrt{74}$

проходит ч/з $(0; 0)$

из рисунка

$$R^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow R = 13$$

для I и II:

$0 \leq R < \sqrt{74}$ 0 реш.

$\sqrt{74} \leq R < 13$ 2 реш.

$R = 13$ 1 реш.

$R > 13$ 0 реш.

IV (III): ~~не~~ проходит ч/з

$(5; -5)$ (касается
квадрата)

$$R = 7$$

проходит ч/з $(-5; 0)$ и $(-5; 10)$ (рис IV окр.)

из рисунка $R^2 = 17^2 + 5^2 \Rightarrow R = \sqrt{314}$

Продолжение на след. странице.

±5 (проверка)

III и IV:

$0 \leq R < 7 \Rightarrow 0 \text{ реш.}$

$R = 7 \Rightarrow 2 \text{ реш.}$

$7 < R < 13 \Rightarrow 4 \text{ реш.}$

$R = 13 \Rightarrow 2 \text{ реш.}$

$13 < R \leq \sqrt{314} \Rightarrow 4 \text{ реш.}$

$R > \sqrt{314} \Rightarrow 0 \text{ реш.}$

$$R = 7$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$a = 49.$$

$$R = \sqrt{49}$$

совпадающие
реш. для
III и IV:

прох. $\frac{4}{3} (0; 0)$ и

$(0; -10)$

$$R^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow R = 13$$

Каково количество
решений в зависимости
от R:

$0 \leq R < 7 \Rightarrow 0 \text{ реш.}$

$R = 7 \Rightarrow 2 \text{ реш.}$

$7 < R < \sqrt{74} \Rightarrow 4 \text{ реш.}$

$\sqrt{74} \leq R < 13 \Rightarrow 6 \text{ реш.}$

$R = 13 \Rightarrow 3 \text{ реш.}$

$13 < R \leq \sqrt{314} \Rightarrow 4 \text{ реш.}$

$R > \sqrt{314} \Rightarrow 0 \text{ реш.}$

Неверное решение,

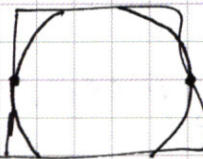
не рассмотрен случай касания

Но так точно будет

больше 2-х решений,

поэтому ответ

не изменится



Ответ: 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$\frac{\sqrt{17}-1}{2} > 0$$

$$\sqrt{17} > 1$$

$$17 > 1$$

(+)

$$\rightarrow y = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2 = \frac{17-2\sqrt{17}+1}{4} = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\frac{9-\sqrt{17}}{2} > 0$$

$$9 > \sqrt{17}$$

$$81 > 17$$

(+)

ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$

№5

а: ровно 2 решения

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Описание к
картинке
на спец. странице

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 289 \\ + 25 \\ \hline 314 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq R < \sqrt{74} = 8.6 \\ \sqrt{74} &\leq R < 13 = 72 \\ R &= 13 = 71 \\ R &> 13 = 70 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 25 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 25 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 25 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 79 \\ + 17 \\ \hline 249 \\ + 25 \\ \hline 274 \end{array}$$

№5 (продолжение)

(1) показать на картинке линии цветов

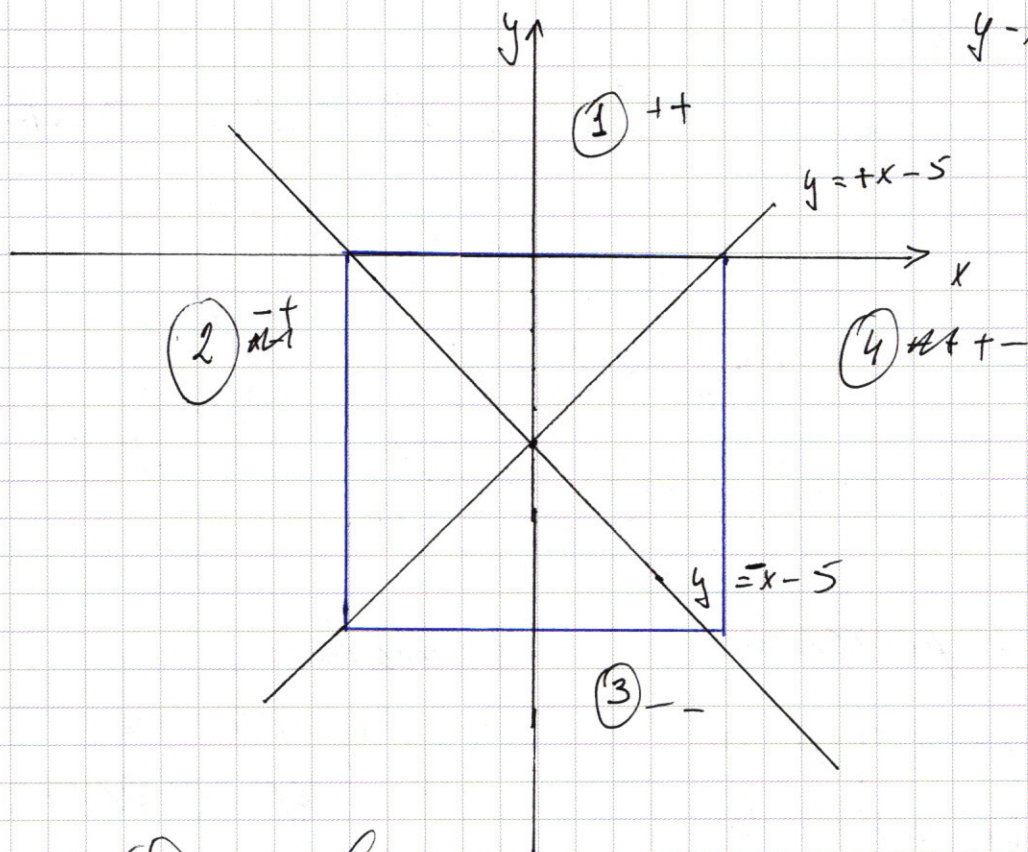
$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y+5 > 0$$

$$y > -x-5$$

$$y-x+5 > 0$$

$$y > x-5$$



(1) четверть: $x+y+5 > 0$; $y-x+5 > 0$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$2y=0 \Rightarrow y=0$$

(2) четверть: $x+y+5 \leq 0$; $y-x+5 \geq 0$

$$\cancel{x+y+5} - \cancel{y-x+5} = 10$$

$$-x-y-5+y-x+5=10 \Rightarrow -2x=10 \Rightarrow x=-5$$

(3) четверть: $x+y+5 < 0$; $y-x+5 < 0$

$$\cancel{-x-y-5} - \cancel{y-x+5} = 10$$

$$-2y=10 \Rightarrow y=-5$$

(4) четверть: $x+y+5 \geq 0$; $y-x+5 < 0$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10 \Rightarrow x=5$$

Продолжение
на
след.
странице.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

Цифра восьмизначного числа - от 0 до 9.

Следовательно, в числе должно быть 3 «тройки»
и 3 «семерки». То есть остальные 2 цифры -
единицы

Выбираем места для 2-х «единиц» - C_8^2

Осталось 6 мест

Выбираем места для 3-х «троек» - C_6^3

Осталось 3 места, в которые можно
расставить 3 «семерки» однозначно.

$$C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot 1 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3} =$$

(Выбор независим)

$$= 56 \cdot 10 = 560$$

Ответ: 560

N3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} &= y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ x^{-2\ln x} &= \frac{y^{\ln(\frac{y}{x^2})}}{y^{-4\ln x}} \quad y^{-4\ln x} > 0 \\ x^{-2\ln x} &= y^{\ln(\frac{y}{x^2}) + 4\ln x} \end{aligned}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

или на обороте

№3 (продолжение)

$$x^{-2 \ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \cdot x^4 \right)$$

$$x^{-2 \ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right)$$

прологарифмируем

$$\ln(x^{-2 \ln x}) = \ln \left(y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \right)$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x = \ln \frac{y}{x^2} \cdot \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln y (\ln y - 2 \ln x)$$

$$\ln^2 y - 2 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln^2 y - 2 \ln x \ln y + \ln^2 x + \ln^2 x - \ln x \ln y = 0$$

$$(\ln y - \ln x)^2 - \ln x (\ln y - \ln x) = 0$$

$$(\ln y - \ln x) (\ln y - \ln x - \ln x) = 0$$

$$\ln y = \ln x \quad \text{или} \quad \ln y = \ln x^2$$

$$\downarrow$$

$$y = x$$

$$\downarrow$$

$$y = x^2$$

Подставим в (2)

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x=0$$

$$\downarrow$$

$$x=2$$

не подходит

$$x=y \Rightarrow y=2$$

$$y=2 \text{ (при } x>0)$$

$$(2; 2)$$

см. след. страницу

Подставим в (2)

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad | :x, x>0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

Схема Горнера для $x=z$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & -6 & 8 \\ z & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$x=2$$

$$\downarrow$$

$$y=z=4$$

$$(2; 4)$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \text{не подходит (} x>0)$$