

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x-6|)^2 + (|y-6|)^2 = a. \end{cases}$$

1) $x \geq 0, y \geq 0.$

(1) $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 = a.$

2) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x-6 \geq y \\ x+y-6 \geq -y \end{cases}$

$$x-6-y + x-6+y = 12.$$

$$2x = 24.$$

$$x = 12.$$

$$x \in [6; 12]; y \in [0; 6];$$

$$y \in [-6; 6].$$

$$36 + y^2 + 16y + 64 = a.$$

$$y^2 + 16y + 100 = a.$$

$$y^2 + 16y + 100 \geq a \geq 0.$$

3) $x-6-y - x+6-y = 12$

$$-2y = 12.$$

$$y = -6$$

$$x \in [0; 12].$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6-y < 0. \end{cases}$$

$$3) -x+6+y + x-6+y = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$x \in [0; 2).$$

$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

$$u) -x+6+y - x+6+y = 12$$

$$-2x + 12 + 2y = 12$$

$$x = 0$$

$$y \in (-6; 6).$$

$$\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases}$$

$$(2) 1) \begin{cases} 36 + y^2 + 16y + 64 = a \\ y \leq -6 \quad y \in [6; 0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 16y + 100 = a. \\ y \in [-6; 0) \end{cases}$$

$$- 1.1.$$

$$x = 12.$$

$$\begin{cases} 36 + y^2 - 16y + 64 = a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 16y + 100 = a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in [0; 6] \end{cases}$$

$$- 1.2.$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 12x + 36 + 4 = a. \\ x \in [0; 12]. \end{cases}$$

$$y = -6.$$

$$3) x^2 - 12x + 40 = a$$

$$x \in [0; 2).$$

$$y = 6.$$

$$4) \begin{cases} 36 + y^2 + 16y + 64 + 36 = a \\ y \in [-6; 0). \end{cases}$$

$$x = 0.$$

$$- 4.1$$

$$\begin{cases} y^2 - 16y + 64 + 36 = a \\ y \in [0; 6] \end{cases}$$

$$- 4.2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3). Заметим, что полученные уравнения в пунктах
1) и 4), а также также 2) и 3) одинаковы $\Rightarrow$

1) $\&$ Решение есть есть в пунктах 1.1 и 4.1.

$$D = 256 - 400 + 4a = -144 + 4a.$$

Пусть $D = 0$. Тогда $y = \frac{-16}{2} = -8$ — не элемент $[-6; 0]$.

Тогда $y_1 \in (-6; 0)$, а $y_2 \notin (-6; 0)$. $\& -6; 0$.

$$y_1 = \frac{-16 + 2\sqrt{a-36}}{2} = \sqrt{a-36} - 8.$$

$$y_2 = -8 - 2\sqrt{a-36}$$

$$\sqrt{a-36} > 2. \quad a-36 > 4 \quad \underline{a > 40}$$

Проверим, чтобы в остальных ур-ниях корней не было.

$$\& y = 8 - \sqrt{a-36} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8 - \sqrt{a-36} > 8 \\ 8 - \sqrt{a-36} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 > \sqrt{a-36} \\ 8 \leq \sqrt{a-36} \end{cases} \begin{cases} 40 > a \\ a > 100 \end{cases}$$

$$D = 144 - 160 + 4a = 4a - 16.$$

$$x = 6 + \sqrt{a-4}$$

$$\begin{cases} 6 + \sqrt{a-4} > 12 \\ 6 + \sqrt{a-4} < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a-4} > 36 \quad a-4 > 36. \quad a > 40.$$

продолжение на стр 4.

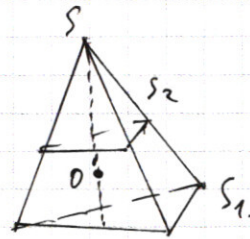
$$\underline{a > 100}$$

2) ~~линейное~~ решение

Задача 4.

Рассмотрим плоскости S_1 и S_2 , касающиеся сферы и $\perp SO$.

Это подобные Δ с коэффициентом подобия $k^2 = \frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{4}$.



$$k = \frac{SO+R}{SO-R} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{SO+R}{SO-R} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2SO}{SO-R} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{SO-R}{2SO} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{R}{2SO} = \frac{2}{5}$$

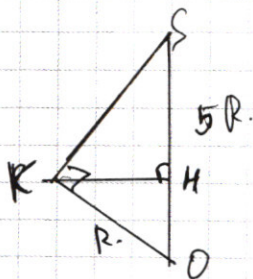
$$\frac{R}{2SO} = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{R}{SO} = \frac{1}{5}$$

Рассмотрим ΔSKO :

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

~~и~~ $\Delta MSO = \Delta LSO = \Delta KSO$ по катету и гипотенузе. Тогда перп. SH и K, L, M падает на точку M на SO .



SH - расстояние от M до сечения $KML \Rightarrow$

$$\frac{S_2}{S_{KLM}} = \left(\frac{SO-R}{SH}\right)^2 \quad SH^2 = SK^2 - KM^2$$

$$SK^2 = 24R^2$$

$$KM = SK \cdot \sin \angle KSO = \sqrt{24} \cdot R \cdot \frac{1}{5} = \sqrt{\frac{24}{25}} R$$

S_{KLM} - площадь сечения.

$$SH^2 = 24R^2 - \frac{24}{25} R^2 = \frac{24^2}{25} R^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$x \leq 0: 3^x + 4 \cdot 3^{81} > 4 \cdot 3^{81} > 3 \cdot 3^{81} \quad \text{а. } 85 < 3 \cdot 3^{81} \Rightarrow$$

$$2) x > 0.$$

~~то~~

$$x + 4 \cdot \log_3 4 \cdot 81 < \log_3 85 + 81 \cdot \log_3 x - \log_3 x$$

$$x + \log_3 x - 81 \log_3 x < \log_3 (85 \cdot 4)$$

$$x + \log_3 x \cdot (1 - 81) < \log_3 340$$

$$x - 80 \log_3 x < \log_3 340$$

$$67 \log_3 340 > 5$$

$$x = 4$$

$$y_1 = 81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y_2 = 85 + 3^{81} \cdot 4 - 4 = 81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$(4; 81 + 4 \cdot 3^{81})$ — 1-ая точка пересечения.

Вторая точка при $x = 85$.

$$\frac{S_2}{S_{KLM}} = \frac{16}{24^2} = \frac{25 \cdot 4}{6^2} = \frac{25}{36}$$

$$S_{KLM} = \frac{36}{25} \cdot S_2 = \frac{4 \cdot 36}{25}$$

$$= \frac{144}{25}$$

Отвечая: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$.

$$S_{KLM} = \frac{144}{25}$$

Задача 1.

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1045 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Смет: 3×3 , ~~4×4~~ 5×4 , 1×1 .

а) 3×3 , ~~5×4~~ 1×1

$$P_8(3, 5, 1) = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

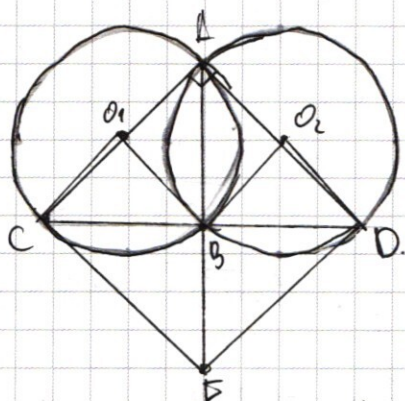
б) 9×1 , 3×1 , 5×4 , 1×2 .

$$P_8(1, 1, 4) = \frac{8!}{4!} = 1680$$

Отвечая: $1680 + 56 = 1736$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.



Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$$\angle CO_1B = 2\alpha, \angle BO_2D = 2\beta.$$

(они вписанные центральные углы)

$$\angle O_1CB = 90 - \alpha, \angle O_2BD = 90 - \beta$$

$$BC = 2R \cdot \cos(90 - \alpha), \quad BD = 2R \cos(90 - \beta)$$

$$BC = 2R \sin \alpha, \quad BD = 2R \sin \beta$$

$$BC^2 + BD^2 = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \stackrel{\alpha + \beta = 90^\circ}{=} 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) =$$

$$= 4R^2. \quad BD^2 = BF^2, \quad CF^2 = BC^2 + BF^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF^2 = 4R^2, \quad CF = 2R = 26.$$

Ответ: $CF = 26$.

$$\text{б) } BC = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}.$$

$\angle AEP = \angle ABD$ (она опирается на хорду AD).

$$\text{а) } R_1 = R_2 = 13.$$

$\angle CAD$ - прямой

$$\angle CAD = 90^\circ.$$

AB отсекает от окружностей
равные дуги $\Rightarrow \angle ADB = \angle AEB$

как вписанные углы, опирающиеся
на одну и ту же дугу. $\Rightarrow$ они
равны $\frac{180 - 90}{2} = 45^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow AE = AD.$$

$$\angle ACD + \angle ABD = 90^\circ \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$$

$$\angle AOC = 90^\circ + 2\alpha \quad AC = 2R \sin(45^\circ + \alpha) =$$

$$= 2 \cdot 13 \cdot \left(\frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} \right) = \frac{26 \cdot 17\sqrt{2}}{26} =$$

$$= 17\sqrt{2}$$

$$\cos \angle ECB = \frac{BC}{EC} = \frac{5}{13}$$

$$\angle ACF = 45^\circ + \angle ECB$$

$$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle ECB) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 =$$

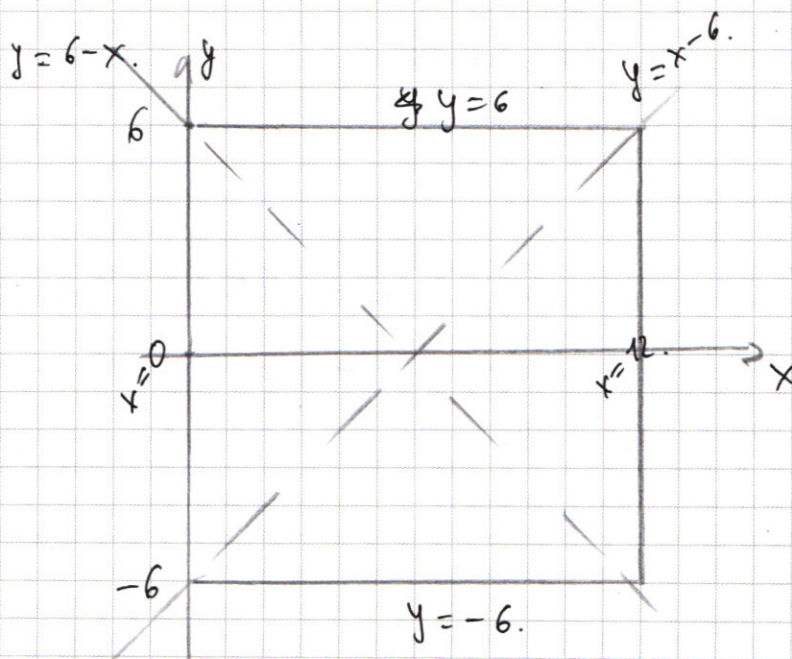
$$= 17^2 = 289.$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ACF} = 289.$$

Задача 5.

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 9$$



$$a=4.$$

$$a=100.$$

$$\text{Ответ: } a=4$$

$$a=100.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 4y^2 - x^2 - 2y^2 - xy - 4x - 8y = \\ &= \cancel{2y^2} (2y - x)(2y + x) - y(2y + x) - 4(2y^2) \\ &= (2y + x)(2y - x - y - 4) = (2y + x)(y - x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2y + x = 0 \\ y - x = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ x \cdot y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} y > 0 \\ yx < 0 \end{cases}$$

~~$x \neq 0$~~

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \in (0; 1) \cup (1; +\infty) \\ |xy| \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$x^{4\lg y} \cdot \frac{1}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$-y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{-5\lg y}$$

$$1) \text{ Дf: } x = -2y$$

$$\left(\frac{4y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(4y)^2 \lg y = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(4y)^2 \lg y = (2y)^{2\lg \sqrt{2}y}$$

$$2^{2\lg y - 2\lg \sqrt{2}y} \cdot y^{2\lg y} = y^{2\lg \sqrt{2}y}$$

$$y^{2\lg \sqrt{2}y - 2\lg y} = 2^{4\lg y - 2\lg \sqrt{2}y}$$

$$y^{2(\lg \sqrt{2})} = 2^{2\lg \frac{4}{\sqrt{2}}}$$

$$y^{\lg 2} = 2^{\lg \frac{4}{\sqrt{2}}}$$

$$2^{2\lg y - \lg 2} \cdot y^{-\lg 2} = 1$$

$$2 = 10^{\lg 2}$$

$$y = 10^{\lg y}$$

$$2 = 10^{\lg 2}$$

$$10^{2\lg 2 \cdot \lg y - \lg^2 2} \cdot 10^{-\lg 2 \cdot \lg y} = 1$$

$$10^{2\lg 2 \cdot \lg y - \lg^2 2} \cdot 10^{-\lg 2 \cdot \lg y} = 1$$

$$10^{\lg 2 \cdot \lg y - \lg^2 2} = 1$$

$$\lg 2 \cdot \lg y - \lg^2 2 = 0 \Leftrightarrow \lg y = \lg 2$$

$$\text{Ответ } y = 2 \Rightarrow x = -4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $y^2 \quad x = y - 4$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2} \right) \lg y = (y-4) \lg((y-4)y)$$

$$(y-4)^4 = (y^2 - 8y + 16)^2 = y^4 - 16y^3 + 64y^2 - 64y^2 + 64y^2 -$$

↑ левая часть ↑ при этом $y \in (0; 4)$
правая часть ↓
⇓

выражение может иметь ≤ 1 корень. ~~корней~~ корней.

$y = 2$: $4 \lg 2 = 2 \lg 2$
 $4 \lg 2 = 4 \lg 2 \Rightarrow y = 2$ — единственный корень

Ответ: $y = 2$; $x = -4$; ~~$y = 2$; $x = -2$~~
 $y = 2$; $x = -2$.

Задача 2.

$$\cos 4x + \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 5x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$2) \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$

$$2) \cos 2x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0$$

$$\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{2x - \frac{\pi}{4}} \quad 2.1) \quad \frac{\pi}{4} - 3x = \pi k$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi \left(\frac{1-8k}{12} \right)$$

$$2.2) \quad \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$$

$$7x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{2}{7}\pi k + \frac{\pi}{28} = \frac{8k+1}{28} \pi$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \left(\frac{1-8k}{12} \right) \pi \\ x = \left(\frac{8k+1}{28} \right) \pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\begin{array}{c|c}
 16845 & 5 \\
 \hline
 3345 & 5 \\
 64 \cancel{22} 5 & 5 \\
 \hline
 2 \cancel{2} 1 & \\
 \hline
 135 & 5 \\
 \hline
 \cos 4 & \cos 3 - \sqrt{2} \cos \\
 \hline
 24 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 & 1
 \end{array}$$

$$4 \times 5 \times 4$$

$$3 \times 3$$

$$1 \times 1$$

$$A \quad E$$

1) Начала стоит

$$5: \cancel{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$8 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 64$$

2) $3: A_6^2 = 6!$

②

$$\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$\cos 7x = \cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 4x$$

$$\cos 4x = a, \cos 3x = b$$

то

$$a = b - \sqrt{2}ab$$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sqrt{2} \cos 4x \cdot \cos 3x = \sqrt{2} \sin 4x \cdot \sin 3x + \sin 4x + \sin 3x$$

$$\cos 4x - \sin 4x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2}(\cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x) = 0$$

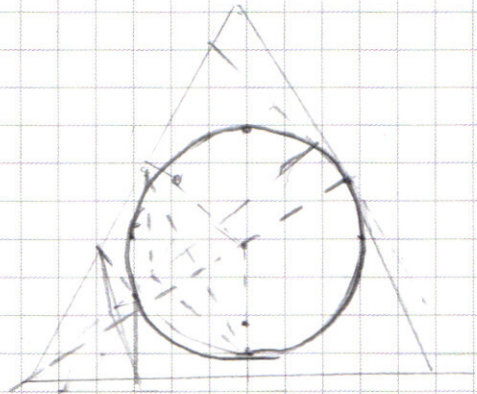
$$1) x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y + \sqrt{2} (\cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y) = 0$$

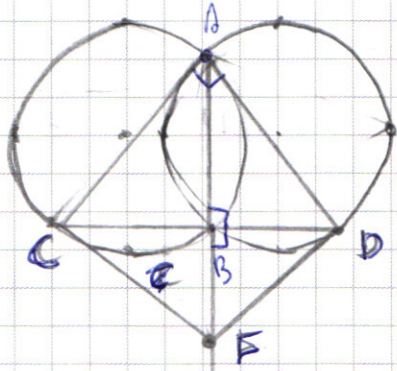
cos (1)

6



6

a)



$$CE = ? = ED.$$

$$AB = CB.$$

$$CD = CB = CA^2$$

$$CD = \sqrt{2} |CA|.$$

$$CA \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = CA^2$$

AD

