

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

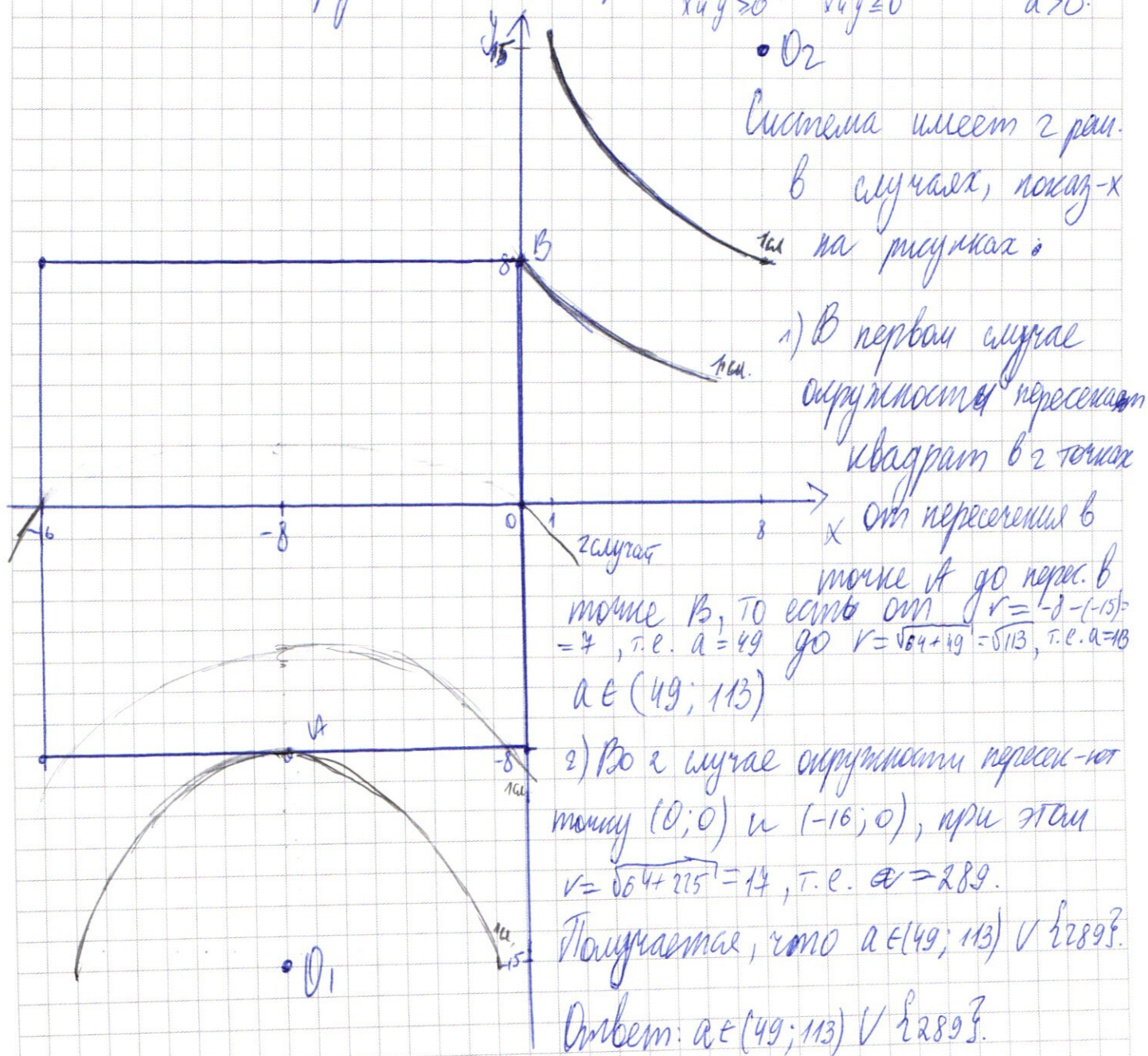
$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$
 равно 2 решения.

Равенство 1 - квадрат с вершинами $(-16; 8); (0; 8); (0; -8); (-16; -8)$
Равенство 2 - окружности с центрами $(8; 15); (-8; -15)$ и $r = \sqrt{a}$,
 $x \neq y > 0$ $x \neq y < 0$ $a > 0$.



№1. №2 Т.к. произведение цифр равно 64827, то ~~число~~ по признакам делимости число может состоять из цифр 1, 3, 4, 9.

Причем троек может быть ~~от~~ до 3 ^{три} штук;
семерок до 4 штук. (не делится без остатка на 7)
9 может быть только одна (Т.к. 64827 не делится без остатка на 81)

Тогда число может быть либо из

а) 3 троек, 4-х семерок и 1 единицы

б) 1 тройка, 1 девятка, 4-х семерок и 2-х единиц

$$а) N = \frac{8!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}{6} = 280$$

$$б) N = \frac{8!}{4! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 840$$

Всего: $280 + 840 = 1120$ чисел

Ответ: 1120.

$$№2. \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

$$\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos 5x = -\frac{\cos(\frac{\pi}{4} + 2x)}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = -\frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi \ell, \ell \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} n \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \ell \end{cases} \quad k, n, \ell \in \mathbb{Z}$$

Ответ: ...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.
$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$

$D = (2x+4)^2 - 4(-3x^2 + 12x) = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$

$y_1 = -(x+2) + 2|x-1|$

$y_2 = -(x+2) - 2|x-1|$

1) $x \in (0, 1)$; $y_1 = -3x$; $y_2 = x-4$

2) $x \in (1; +\infty)$; $y = -3x$

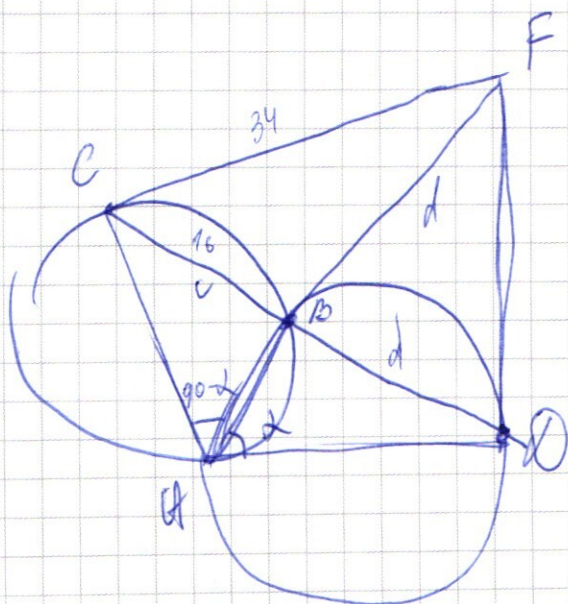
3) $x \in (1; 4)$; $y = x-4$

если $y = -3x$:

$\frac{x^{2\ln 3x}}{3^{\ln 3x}} = x^{2\ln(9x^3)}$

$3^{-\ln x} = (x^{\ln 3})^3$

№6.



а) по т. синусов.

$CB = c$ $DB = d$

$\frac{c}{\cos \alpha} = 2R = \frac{d}{\sin \alpha}$

$d = \operatorname{tg} \alpha \cdot c$

$CF = \sqrt{c^2 + d^2}$

$d = 2R \sin \alpha$

$c = 2R \cos \alpha$

$CF = \sqrt{4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 2R = 2 \cdot 17 = 34.$

2) т.к. $CF = 34$ $CB = 16$ $\Rightarrow BF = 30$ (по т. Пифагора.)
 $\angle CBF = 90^\circ$

Пусть $\angle ABD = \beta$, тогда $\angle ABC = \beta$, т.к. $\sin \beta = \sin(180 - \beta)$, то
из т. синусов $2R = \frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AD}{\sin \beta} \Rightarrow CA = CD \Rightarrow \triangle ACD$ - равност. $\Delta \Rightarrow CA = CD$

$$= \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{16+30}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$$

По т. синусов:

$$\frac{CA}{\sin \beta} = 2R = \frac{23\sqrt{2}}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{23\sqrt{2}}{2R} = \frac{23\sqrt{2}}{34} \quad \alpha + 45^\circ = \beta \text{ (как вкл-углы)}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + 45^\circ) \cdot CA \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{23\sqrt{2}}{34} \cdot 34 \cdot 23\sqrt{2} = 23^2 = 529$$

Ответ: а) 34.
б) 529

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^*}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y < 0 \\ xy^2 > 0 \\ \Rightarrow x > 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{aligned}$$

$$(1) \quad y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

16-48

$$D = (2x+4)^2 - 4(-3x^2 + 12x) = 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 32x + 16 = 16(x^2 - 2x + 1) = 16(x-1)^2$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 = 5$$

$$y_1 = \frac{-2(x+2) + 4|x-1|}{2} = -(x+2) + 2|x-1|$$

$$y_2 = \frac{-2(x+2) - 4|x-1|}{2} = -(x+2) - 2|x-1|$$

$$x \in (0; 1]$$

$$x \in (1; +\infty)$$

$$23 \cdot 20 = 460 + 69 = 529$$

$$1) \quad y = -x - 2 + 2(x-1) = -3x, \quad x \in (0; 1]$$

$$3) \quad y_1 = -x - 2 + 2(x-1) = x - 4, \quad x \in (1; 4)$$

$$2) \quad y_2 = -x - 2 - 2(x-1) = x - 4, \quad x \in (0; 1]$$

$$4) \quad y_2 = -3x, \quad x \in (1; +\infty)$$

если $y = -3x$: $\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x^3)}$

$$\ln 3x = \ln 3 + \ln x$$

если $y = x$: $\frac{x^{6\ln 3x}}{3^{\ln 3x}} = x^{2\ln(3x^3)}$

$$x^{6\ln 3x} = (x^{\ln 3x})^6 = (x^{\ln 3} \cdot x^{\ln x})^6 = (e \cdot x^{\ln 3})^6 \quad (x^{\ln(3x^3)})^2 =$$

$$3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln x} = e \cdot 3^{\ln x} = (x^{\ln 9} \cdot x^{\ln x^3})^2 =$$

$$\frac{e^5 \cdot (x^{\ln 3})^6}{e \cdot 3^{\ln x}} = e^5 \cdot \frac{x^{\ln 3}}{3^{\ln x}} = 34 \cdot 34 - 16 \cdot 16 = 4(12 \cdot 12 - 8 \cdot 8) = 4(144 - 64) = 4 \cdot 80 = 320$$

$$\frac{e^5 \cdot x^{\ln 3}}{3^{\ln x}} = x^{4\ln 3} \cdot e^6 = (x^{2\ln 3} \cdot e^3)^2 =$$

$$\frac{1}{3^{\ln x}} = x^{3\ln 3} \cdot e \quad \boxed{3^{-\ln x} = (x^{\ln 3})^3} = 4 \cdot x^{4\ln 3} \cdot e^6$$

$$4 \cdot (289 - 64) = 4 \cdot 225 = 900$$

2.15 = 30

$$3^{-\ln x} = x^{3 \ln 3}$$

$$\text{let } y = x-4 : \left(-\frac{x^2}{x-4} \right)^{\ln(x-4)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$3^{-\ln x} = x^{3 \ln 3}$$

$$3^{-\frac{1}{x} \ln e} = x^{3 \ln 3}$$

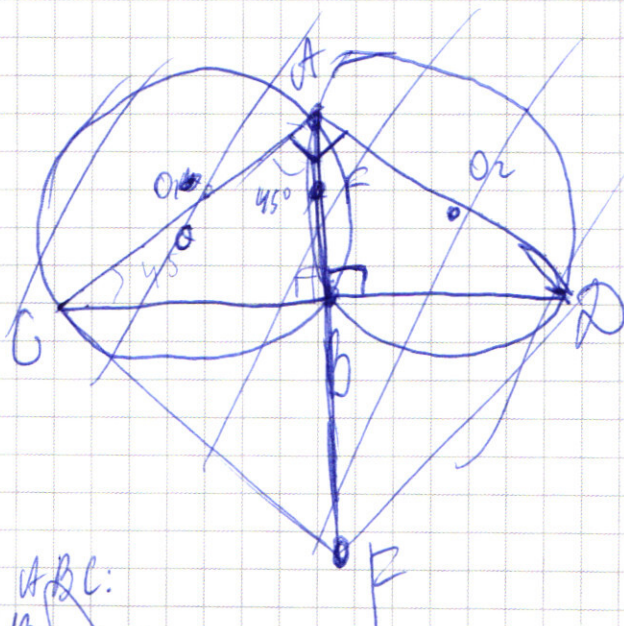
№6.

$$r = 14$$

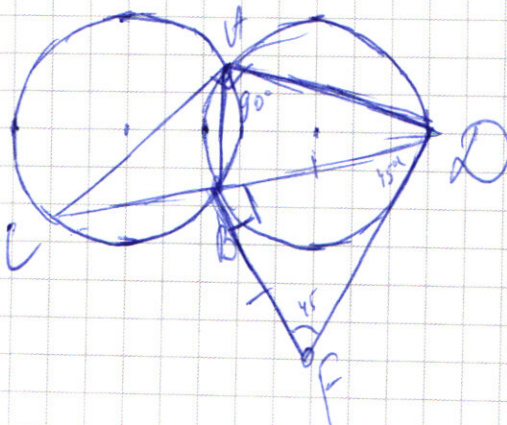
$$r = 14$$

$$BF = BD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$



$$\triangle ABC: \frac{AB}{\sin 45^\circ} =$$



$\angle F = ?$

$$AC = AD = 2r$$

$$CD = \sqrt{156 + 156} =$$

$$= 2\sqrt{289} = 2 \cdot 17 = 34$$

$$\Rightarrow CB = BD = 17\sqrt{2} \Rightarrow BF = 17\sqrt{2}$$

$$CF =$$

$$r = 14$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \\ - 8 \\ \hline 1156 \\ - 36 \\ \hline 1120 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$\sqrt{5}. \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(2) - вып. с. с-ми (8; 15)

$$r = \sqrt{a}$$

два перс.

$$64 = a$$

$$a = 8$$

$$a = 20$$

$$176 =$$

$$119 =$$

$$289$$

$$49 + 64 =$$

$$= 100 + 13 =$$

$$113^2$$

$$r = \sqrt{113}$$

$$a = 113$$

$$3 \cdot 8 = 24$$

$$4 \cdot 5 = 20$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$4 \cdot 6 = 24$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$16 \cdot 4 = 64$$

$$104$$

$$21$$

$$8$$

$$16$$

$$8$$

$$8$$

$$\sin \alpha - \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$N4. \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3^x(1 + 4 \cdot 3^{28-x}) \\ y \leq 3(31 + (-1 + 3^{28-x})) \end{cases}$$

$$N2. \cos 4x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha = 5x$$

$$\beta = 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x =$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$= 2 \cos^2 2x - 1 = 1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\cos^2 x \geq 1$$

$$- (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \cos(\alpha + \beta)$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \beta = 2x$$

$$\cos x \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta = -\sin(\alpha - \beta)$$

☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

