



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2.1) a = b \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = 2$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

ВАРИАНТ 5

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

...чисел (x, y) удовлетворяющих системе неравенств

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) / (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$1) \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$0 = \sin^2 7x + \cos^2 7x + 2 \sin 7x \cos 7x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 7x \cdot \cos 7x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 7x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 7x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 7x = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x = \frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi k + \pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2\pi k + \pi}{28}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin 7x + \cos 7x \neq 0 \Rightarrow$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$$

$$-\sin 4x = \cos 7x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 7x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$= \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) + \sin 4x = 0$$

$$2 \cdot \sin(\frac{11x}{2} + \frac{3\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}) = 0$$

$$2.1) \sin(\frac{11x}{2} + \frac{3\pi}{8}) = 0 \Rightarrow \frac{11x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \pi k \Rightarrow$$

$$11x + \frac{3\pi}{4} = 2\pi k \Rightarrow 11x = 2\pi k - \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2\pi k}{11} - \frac{3\pi}{44}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2.2) \cos(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \pi k + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{3x}{2} = 2\pi k + \pi - \frac{3\pi}{8} = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{12}$$

Омбем:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2\pi k + \pi}{28} & k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2\pi k}{11} - \frac{3\pi}{44} & k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{12} \end{aligned} \right\}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

Рассчитывая все возможные варианты нормирования,
получаем что решения могут быть только в
4-х случаях

$$1) x = -3, 0 \leq y \leq 6$$

$$2) x = 3, 0 \leq y \leq 6$$

$$3) y = 6, -3 \leq x \leq 3$$

$$4) y = -6, -3 \leq x \leq 3$$

Рассмотрим каждый случай отдельно

$$1) x = -3, 0 \leq y \leq 6$$

$$49 + (y - 3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + (58 - a) = 0$$

имеет 0 реш., если $a \in (-\infty, 49) \cup (58, +\infty)$

имеет 1 реш., если $a = 49$

имеет 2 реш., если $a \in [49, 58]$

$$1) \text{ ~~также~~ } x = 3, 0 \leq y \leq 6$$

$$1 + (y - 3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + (10 - a) = 0$$

имеет 0 реш., если $a \in (-\infty, 1) \cup (10, +\infty)$

1 реш., если $a = 1$

2 реш., если $a \in [1, 10]$

$$3) y = 6 \quad -3 \leq x \leq 3$$

$$x^2 - 8|x| + (25 - a) = 0$$

имеет 0 реш - ~~никогда~~ $a \in (-\infty, 9) \cup (9, \frac{37}{4}) \cup (\frac{85}{4}, +\infty)$

имеет 1 реш - ~~если~~ $a \in \{9\} \cup [\frac{37}{4}, \frac{85}{4}]$

$$4) ~~если~~ y = -6, \quad -3 \leq x \leq 3$$

имеет 0 реш $a \in (-\infty, 9) \cup (9, \frac{37}{4}) \cup (\frac{85}{4}, +\infty)$

имеет 1 реш $a \in \{9\} \cup [\frac{37}{4}, \frac{85}{4}]$

Суммируя по всі получаем, что ровно 2 решения

уравнение имеет при $a \in (1, 9) \cup (9, \frac{37}{4}) \cup (10, 49) \cup (49, 58]$

Ответ: $a \in (1, 9) \cup (9, \frac{37}{4}) \cup (10, 49) \cup (49, 58]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x = -3$

3) $x = 3$ $6 \geq y \geq 0$

$$1 + (y - 3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + 10 - a = 0$$

$$D = 4a - 4 = 4(a - 1)$$

$$a > 1 \Rightarrow$$

Ореш $\Rightarrow a < 1, a > 10$

1 реш $- a = 1$

2 реш $- a \in (1, 10]$

$$3 + \sqrt{a - 49} \leq 6$$

$$\sqrt{a - 49} \leq 3$$

$$a \geq a - 49$$

$$58 \geq a$$

$$a - 49 \leq 9$$

$$a \leq 58$$

1) $y = 6$ $-3 \leq x \leq 3$

$$x^2 - 8|x| + (25 - a) = 0$$

$$D = 4 - 4(25 - a) =$$

$$= 4a - 36 = 4(a - 9)$$

~~$$a \leq 9$$~~

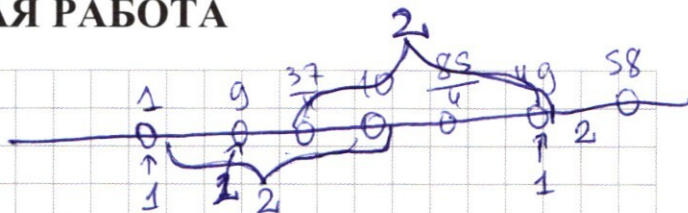
~~$$x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{a - 9}$$~~

~~$$0 \leq 4 \pm 2\sqrt{a - 9} \leq 3$$~~

Ореш $- a < 9, a \leq \frac{37}{4} / 9, a \geq \frac{85}{4}$

1 реш $- a = 9, \frac{37}{4} \leq a \leq \frac{85}{4}$

2 реш $- \text{X}$



2) $x = -3$ $6 \geq y \geq 0$

$$49 + (y - 3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + (58 - a) = 0$$

$$D = 36 - 4(58 - a) =$$

$$= 4(a - 49)$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{a - 49}}{2} = 3 \pm \sqrt{a - 49}$$

Ореш $- \text{X}$ $a > 58, a < 49$

1 реш $- \text{X}$ $a = 49$

2 реш $- \text{X}$ $a \in (49, 58]$

2) $y = -6$ $-3 \leq x \leq 3$

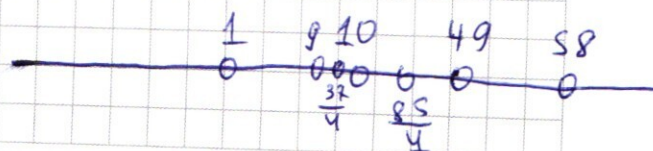
$$x^2 - 8|x| + (25 - a) = 0$$

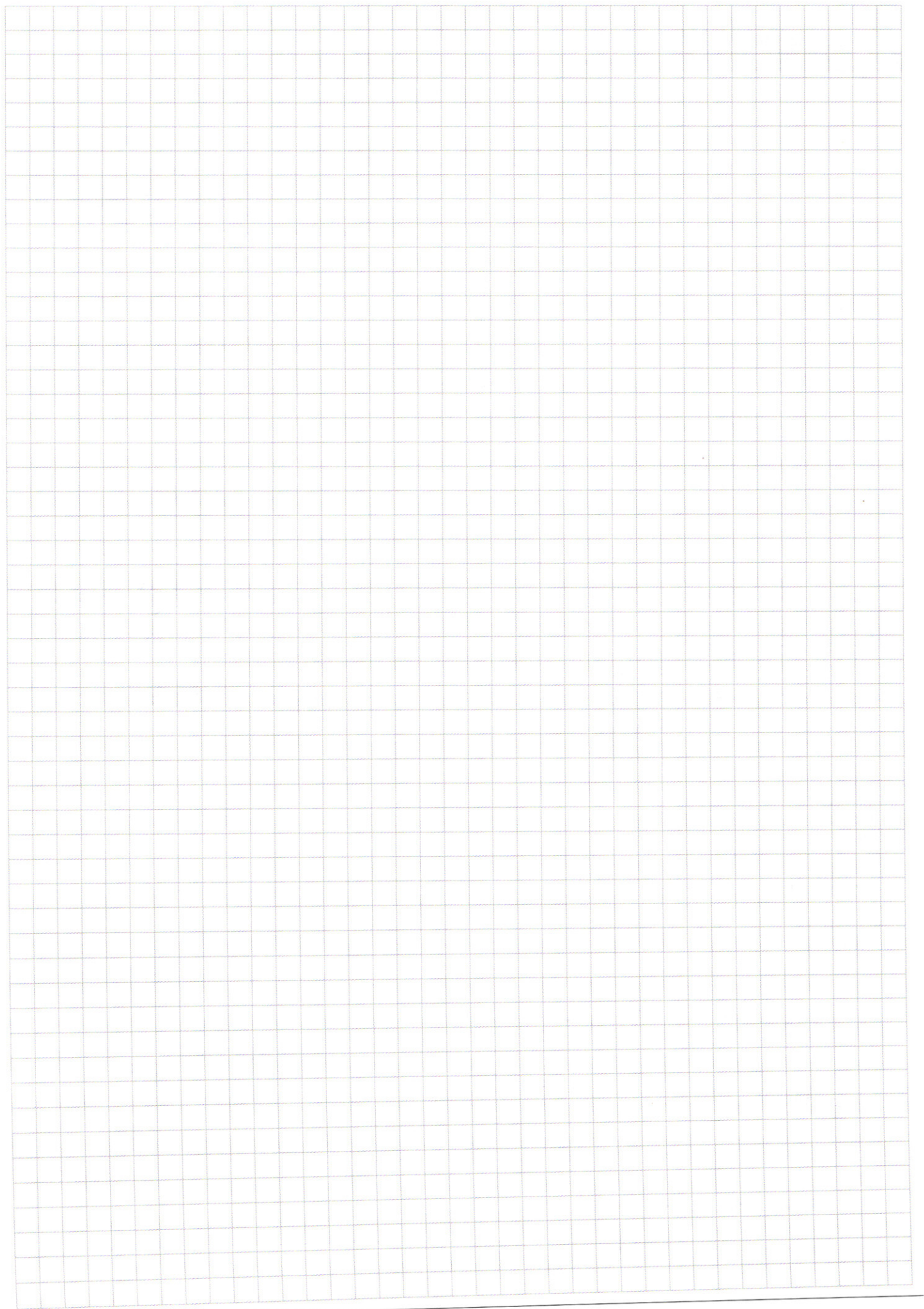
$$D = 4(a - 9)$$

Ореш $- a \leq \frac{37}{4} / 9, a \geq 88$

1 реш $- a = 9, \frac{37}{4} \leq a \leq \frac{85}{4}$

$$\frac{85}{4} = 21 \frac{1}{4}$$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $a > 21$

$$|x|_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{a-21}}{2} = 2 \pm \sqrt{a-21}$$

$a < 0$
 $b > 0$

~~Решение~~ $2 + \sqrt{a-21}$ ~~решение~~ $2 - \sqrt{a-21}$

~~$4-x-x-4+x-6-x=6$~~

~~$-2x=6$~~

Пусть $a > 25$. Тогда

$x = -3$ $y = 6$, $x = 2 + \sqrt{a-21}$, $2 - \sqrt{a-21}$ — решения

т.е. $a \leq 25$

~~$4-x-x-4+x-6-x=6$~~

~~$-2x=6$~~

~~$x = -3$~~

~~$y = 6$~~

~~$x = 2 + \sqrt{a-21}$~~

~~$2 - \sqrt{a-21}$~~

~~решения~~

~~$x = -3$~~

~~$y = 6$~~

~~$x = 2 + \sqrt{a-21}$~~

~~$2 - \sqrt{a-21}$~~

~~решения~~

только точные решения

3) $x = 3$ $6 \geq y \geq 0$

$$1 + (y-3)^2 = a$$

$$y^2 - 6y + (10-a) = 0$$

$$D = 36 - 4(10-a) = 4a - 4 = 4(a-1)$$

Если $a > 1 \Rightarrow$ имеет 2 р-е $\Rightarrow$ все 4 п-и

$a = 1 \Rightarrow$ 1 решение

$a \leq 1 \Rightarrow$ 0 решений

если им 2 р-е $\Rightarrow$ им 4 р-е.

если им 0 р-е $\Rightarrow$ им 0 р-е.

$$4 \pm 2\sqrt{a-9}$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{a-1}}{2} = 3 \pm \sqrt{a-1}$$

$$4 \pm 2\sqrt{a-9} - \text{нечис}$$

$$0 - a < 49, a > 58$$

$$1 - a = 49$$

$$\sqrt{a-1} < 3$$

$$4(a-9)$$

$$a-1 < 9$$

$$4 \pm 2\sqrt{a-9} \leq 3$$

$$a < 10$$

$$\text{оба}$$

$$4 \pm 2\sqrt{a-9} > 3 \rightarrow \text{оба не}$$

$$-3 \leq 4 - 2\sqrt{a-9} \leq 3$$

$$2 - a \in (49, 58]$$

при каком а оно
имеет 1, неч, 0 неч, 2 неч.

$$0 - a < 1, a \geq 10$$

2

$$y^2 - 6y + (10-a) = 0$$

$$a > 9 \Rightarrow$$

$$1 - a = 1$$

$$D = 36 - 4(10-a) =$$

$$2\sqrt{a-9} - 3 \leq 4 \leq 3 + 2\sqrt{a-9}$$

$$2 - a \in (1, 10]$$

$$= 4(a-1)$$

$$2\sqrt{a-9} \leq 7 \leq 6 + 2\sqrt{a-9}$$

$$y^2 - 6y + (58-a) = 0$$

$$D = 4(a-49)$$

$$a > 1 \Rightarrow y^2 - 6y + 9$$

$$a > 1$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{a-1}}{2} =$$

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{a-49}}{2} = 3 \pm \sqrt{a-49}$$

$$= 3 \pm \sqrt{a-1}$$

$$6 \geq 3 \pm \sqrt{a-49} \geq 0$$

$$\sqrt{a-1} > 3 - \text{оба не}$$

оба нех, если

$$\sqrt{a-1} \leq 3 - \text{оба не}$$

$$\sqrt{a-49} \leq 3$$

$$a-1 \leq 9$$

$$a-49 \leq 9$$

$$a \leq 10$$

$$a \leq 58$$

$$4 - 2\sqrt{a-9} \leq 3$$

$$\frac{37}{4} \leq a \leq \frac{85}{4}$$

$$-3 \leq 4 - 2\sqrt{a-9}$$

$$4 \leq 2\sqrt{a-9}$$

$$a \leq \frac{85}{4}$$

$$2\sqrt{a-9} \leq 7$$

$$1 \leq 4a - 36 \Rightarrow a \geq \frac{37}{4}$$

$$4a - 36 \leq 49$$

$$37 \leq 4a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 =$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ 675 \mid 5 \\ 135 \mid 5 \\ 27 \mid 3, 3, 3 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ 675 \mid 5 \\ 135 \mid 5 \\ 27 \mid 3, 3, 3 \end{array}$$

В числе 3375 только целые:

1, 3, 5, 9, 27

8, 5, 5,

5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1
5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1

SSS 111 9 3

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 1 =$$

$$= C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 3 =$$

$$= \frac{8! \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 = 1680$$

$$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{1 - \sin^2 11x} - \sin 11x$$

$$\cos 11x - \sin 11x =$$

$$= \cos^2 11x - \sin^2 11x = \cos 22x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2y + 4 - 4y + 4 = \frac{\sin 0 = 0}{\cos 0 = 1}$$

$$\frac{2y + 4 \pm (4y - 4)}{2} =$$

$$\frac{-8 - 2y}{2} = \frac{4 - y}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^{2 \lg xy} = \frac{6y}{2} ; 4 - y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$$

$$(2y - 3)^2 = 4y^2 + 9 - 12y$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \\ (x - y)^2 - 4x + 12y - 4y^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(x - y)^2 = 4$$

$$\lg x = \log_{20} x$$

$$x \neq y \quad (x - y)^2 - (2y - 3)^2 - 4x + 9 = 0$$

$$(x - y)^2 - (2y - 3)^2 = 4x - 9$$

$$\begin{aligned} y^{5 \lg x} - y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x} &= x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \\ y^{3 \lg x} &= x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y} \end{aligned}$$

$$x^2 + x(-2y - 4) + (12y - 3y^2) = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (2y + 4)^2 - 4(12y - 3y^2) = 16 + 4y^2 + 16y - 48y + 12y^2 = \\ &= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = (4(y - 1))^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2y - 4 \pm (4y - 4)}{2}$$

$$2 \lg 2 = 2 \lg 2$$

$$\lg -3y =$$

$$x_1 = \frac{-2y - 4 + 4y - 4}{2} = \frac{2y - 8}{2} = y - 4$$

$$4 - 8 - 8 - 12 + 24 =$$

$$= 12$$

$$x_2 = \frac{-2y - 4 - 4y + 4}{2} = \frac{-6y}{2} = -3y$$

$$-12 - 16 + 4 =$$

$$-24$$

$$1) x = -3y$$

$$xy = -3y^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$\lg xy$ — неопределен

$$2) x = y - 4$$

$$\left(\frac{y}{y-4}\right)^5 \lg(y-4) = y^{2 \lg(y^2 - 4y)} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y}{y-4}\right)^5 \lg(y-4) = y^{2 \lg(y^2-4y)}$$

$$x > 0, y > 0$$

$$y(y-4) > 0$$

$$y^{5 \lg(y-4)} = (y-4)^{\lg(y-4)} \cdot y^{2 \lg(y-4)} \cdot y^{2 \lg(y)}$$

$$y > 0 \Rightarrow y > 4$$

$$y^{3 \lg(y-4)} = (y-4)^{\lg(y-4)} \cdot y^{2 \lg(y)}$$

$$\lg(y-4) = 10$$

$$(y-4)^{\lg(y-4)} = 10$$

$$(y-4)^{\lg(y-4)} = 10$$

$$a^{\lg a} = (10^{\lg(a)})^{\lg(a)} = 10^{\lg^2 a}$$

$$10^{\lg(a)} = a$$

$$y^{3 \lg(y-4)} = y^{3 \lg(y) \cdot \lg(y-4)}$$

$$10^{3 \cdot \lg(y) \cdot \lg(y-4)} = 10^{\lg^2(y-4)} \cdot 10^{2 \lg^2(y)} = 10^{\lg^2(y-4) + 2 \lg^2(y)}$$

$$3 \lg(y) \cdot \lg(y-4) = \lg^2(y-4) + 2 \lg^2(y)$$

$$\lg(y) = a \quad \lg(y-4) = b$$

$$3ab = b^2 + 2a^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$0 = b^2 - ab - 2ab + 2a^2 = b(b-a) - 2a(b-a) = (b-a)(b-2a)$$

$$1) b = a$$

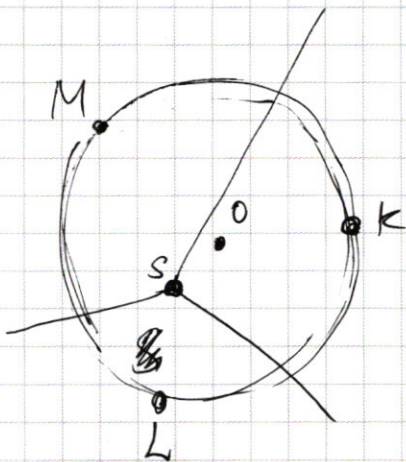
$$\lg(y) = \lg(y-4) \Rightarrow y = y-4 \quad \text{неверно}$$

$$2) b = 2a$$

$$\lg(y-4) = 2 \lg(y) = \lg(y^2) \Rightarrow y^2 = y-4$$

$$y^2 - y + 4 = 0$$

$$D = 1 - 4 < 0 \quad \text{не имеет решений}$$



$\angle KSO = ?$

$$\sin(45^\circ + \beta) =$$

$$= \sin 45^\circ \cos \beta + \sin \beta \cos 45^\circ =$$

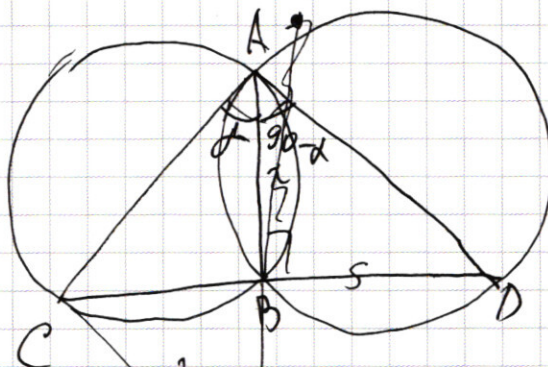
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

R_{25}

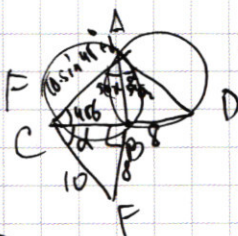
~~2 4 5 7~~

$$\frac{AC}{\sin(45^\circ + \beta)} = 10$$

ΔC



$$\frac{1}{2} \sin^2(45^\circ + \beta) \cdot 100 = 50 \cdot \sin^2(45^\circ + \beta)$$

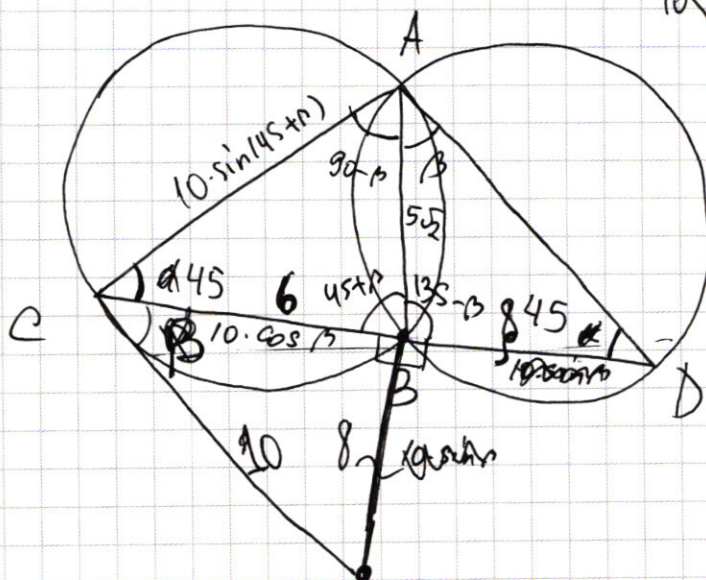


$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 10$$

$$AB = 10 \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{BD}{\sin \beta} = 10$$

$$BD = 10 \cdot \sin \beta$$



$$\sin \beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \sin \beta$$

$$10 \cdot \sin^2 \beta + 10 \cdot \cos^2 \beta = 10$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$10 \cos \beta = 6$$

$$10 \cos \beta = 3$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}$$

$$10 \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= 4 \cdot 2 = 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^{2\lg(3y)} = 3^{\lg(3y)} \cdot y^{2\lg(4)} = 3^{\lg(3)} \cdot 3^{\lg(4)} \cdot 10^{2\lg(4)}$$

$$y^{\lg(4)} = (10^{\lg(4)})^{\lg(4)} = 10^{\lg^2 4}$$

$$y^{\lg(2)} = (10^{\lg(4)})^{\lg(2)} = 10^{\lg(4) \cdot \lg(2)}$$

$$y^{2\lg(3)} \cdot y$$

$$y^{2\lg(4)} \cdot y^{2\lg(3)} = 3^{\lg(3y)} \cdot y^{2\lg(4)} \Rightarrow y^{2\lg(3)} = 3^{\lg(3)} \cdot 3^{\lg(4)}$$

$$10^{2\lg(3) \cdot \lg(4)} = 10^{\lg^2 3} \cdot 10^{\lg(4) \cdot \lg(3)}$$

$$2\lg(3) \lg(4) = \lg^2(3) + \lg(4) \cdot \lg(3)$$

$$2ab = a^2 + ab$$

$$ab = a^2$$

$$a \neq 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lg(3) = \lg(4) \Rightarrow y = 1$$

$$2\lg(4) - (\lg(3) + \lg(4)) = 2\lg(3) - \lg(4) + 3\lg^2(4)$$

$$ab = a^2 + b^2$$

$$10^{(2\lg(3) + 2\lg(4)) \lg(4)} = 10^{2\lg(3) \cdot \lg(4) + 2\lg^2(4)}$$

$$2ab + 2$$

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^3$$

$$3^{3\lg 9} = 3^{2\lg 3^3}$$

$$3^{6\lg 3} = 3^{6\lg 3}$$

$$3^4 - 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 3 + 12 \cdot 3 = 0$$

$$3^2 - 2 \cdot 3 - 4 - 3 + 4 =$$

$$= 9 - 6 - 1$$

$$x = 4 - y$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = y^{2 \lg(4)} \cdot y^{2 \lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$10^{5 \lg(4) \cdot \lg(4-y)} = 10^{2 \lg^2(4)} \cdot 10^{2 \lg(4-y) \cdot \lg(4)} \cdot 10^{\lg^2(4-y)}$$

$$\lg(4) = a \quad \lg(4-y) = b \quad a \neq b$$

$$5ab = 2a^2 + 2ab + b^2$$

$$3ab = 2a^2 + b^2$$

$$0 = 2a^2 - 2ab - ab + b^2 = 2a(a-b) - b(a-b) = (a-b)(2a-b)$$

$$2a = b \quad 2 \lg(4) = \lg(4-y) \quad \lg(y^2) = \lg(4-y)$$

$$y^2 = 4 - y \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17 \quad A = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y^{5 \lg(x)} = y^{2 \lg(x)} \cdot y^{2 \lg(4)} \cdot x^{\lg(x)}$$

$$16 = y^{3 \lg(x)} \cdot y^{2 \lg(4)} \cdot x^{\lg(x)} = 10^{2 \lg^2(4)} \cdot 10^{\lg^2(x)}$$

$$3ab = \lg(x) = a \quad \lg(4) = b$$

$$3ab = 2b^2 + a^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = a^2 - ab - 2ab + 2b^2 =$$

$$= a(a-b) - 2b(a-b) = (a-b)(a-2b) = 0$$

$$1) a = b \Rightarrow x = y \Rightarrow 4 - y = y \Rightarrow y = 2 \quad x = 2$$

$$2) a = 2b \Rightarrow \lg(x) = \lg(y^2) \Rightarrow x = y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$x = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2 \sin 4x \cos(7x + 45) = \cos 14x$$

~~cos 14x = cos 14x~~

$$\cos d - \sin d = \sqrt{2} (\cos d \cdot \cos 45 - \sin d \cdot \sin 45) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos (d + 45)$$

$$\cos 11x - \sin 11x = \sqrt{2} (11x + 45)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} (3x + 45)$$

$$\sqrt{2} (\cos (11x + 45) - \cos (3x + 45)) = \sqrt{2} - \cos 14x$$

$$\cos (11x + 45) - \cos (3x + 45) = \cos 14x$$

$$\cos (11x + 45) = \cos 14x + \cos (3x + 45)$$

$$1) \sin 7x + \cos 7x = 0$$

~~4-2 sin~~

$$0 = 1 + 2 \sin 7x \cdot \cos 7x$$

$$\sin 7x \cdot \cos 7x = -\frac{1}{2}$$

$$ab = -\frac{1}{2}$$

$$a + b = 0$$

$$-a^2 = -\frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 7x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin(7x + 45) = \cos 14x$$

$$\sin(7x + 45) = (\sin 7x + \cos 7x) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-\sqrt{2} \cdot \sin 4x \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x =$$

$$= (\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \Rightarrow \sin 7x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2) \sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2} \cdot \sin 4x$$

$$-\sqrt{2} \cos(7x + 45) = \sqrt{2} \cdot \sin 4x$$

$$-\cos(7x + 45) = \sin 4x$$

$$\cos 14x = -2 \sin 4x \cdot \sin(7x + 45) = \cancel{2} \cdot 2 \sin(7x + 45) \cdot \cos(7x + 45) =$$

$$= \sin(14x + 90)$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

~~xxx~~

$$(x, y) \text{ - перм.} \Rightarrow (-x, y), (x, -y)$$

$$(y, x) \text{ - перм.}$$

$$(x, y) \text{ - перм.}$$

↓

$$(-x, y) \text{ - перм.}$$

$$(x, y) \text{ - перм.} \Rightarrow (-x, y) \text{ - перм.}$$

$$x = 0$$

$$|y-3| + |y-3| = 6$$

$$|y-3| = 3$$

$$y = 6, 0$$

$$16 + (|y|-3)^2 = 9$$

$$a = 26, y = 0 \Rightarrow a = 25$$

$$y = 6 \Rightarrow a = 25$$

$$\Rightarrow a = 26$$

$$m, y, x$$

$$(x, y)$$

$$|x| = 8$$

$$x = \pm 8$$

$$y = 0$$

$$|-3-x| + |-3+x| = 6$$

$$\sin(2) - \sin(1) = 2 \sin \frac{2-1}{2} \cos \frac{2+1}{2}$$

$$x^2 - 8|x| + y^2 - 3|y| = 0$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$|y-3-x| = 6 - |y-3+x|$$

$$y^2 + x^2 + 6x - 6y - 2xy = 36 + y^2 + x^2 - 6x - 6y + 2xy - 12|y-3+x|$$

$$12x - 4xy - 36 = -12|y-3+x|$$

$$3x - xy - 12 = -4|y-3+x|$$

$$x^2 - 8x + y^2 - 3|y| = 0$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) =$$

$$2 \sin x \cos y + \sin y \cos x +$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$-3 < y < 9$$

$$-6 < x < 6$$

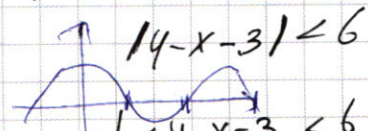
$$|y| < 9 \Rightarrow$$

$$|y|-3 < 6$$

$$(y-3)^2 < 36$$

$$(x-4)^2 < 100$$

$$a < 136$$



$$-3 < y-x < 9$$

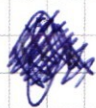
$$-9 < x-y < 3$$

$$-3 < y+x < 9$$

$$-12 < 2x < 12$$

$$-6 < x < 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



0200547

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

~~$$\cos 11x - \cos 3x$$~~

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 4x \sin 7x$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$= (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

1) $\cos 7x = \sin 7x$ - просто решить

2) $\sqrt{2} \sin 4x = \sin 7x + \cos 7x$

$$\sin 4x = \sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4} =$$

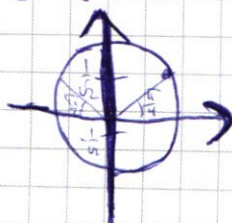
$$= \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

~~$$\sin 4x = \sin$$~~
$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin 4x = 0$$

$$\sin \left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin 4x = \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$\sin 4x = \left(\cos 7x + \frac{\pi}{4} \right) =$$

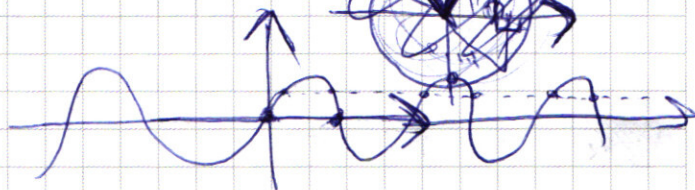
~~$$\sin(7x - \frac{\pi}{4})$$~~
~~$$\sin \alpha = \cos \beta$$~~

~~$$7x + \frac{\pi}{4}$$~~

$$\sin(7x + \frac{3\pi}{4})$$



$$\sin \alpha = \sin \beta$$



$$\sin 4x = \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow 7x + \frac{3\pi}{4} - 4x =$$

$$\sin(7x + \frac{3\pi}{4}) - \sin 4x = 0$$

~~$$\sin(7x + \frac{3\pi}{4}) - \sin 4x = 0$$~~

$$2 \cdot \sin \frac{3x + \frac{3\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{11x + \frac{3\pi}{4}}{2} = 0$$

$$1) \sin \frac{3x + \frac{3\pi}{4}}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{3x + \frac{3\pi}{4}}{2} = \pi k$$

$$3x = 2\pi k - \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{4} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin \frac{11x + \frac{3\pi}{4}}{2} = 0$$

$$11x + \frac{3\pi}{4} = 2\pi k - \frac{3\pi}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

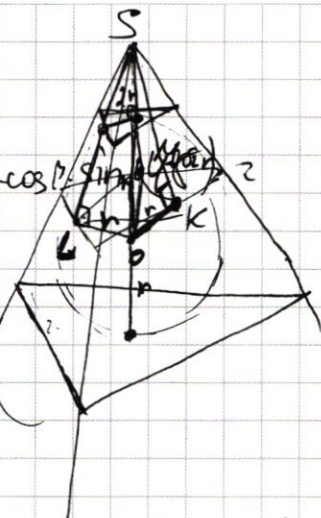
$$\cos \theta - \cos \theta = 0$$

五

$$\sqrt{2} (\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ - \cos 135^\circ \cdot \sin 135^\circ)$$

$$= 52/48$$

$$\sqrt{2}(\sin 45^\circ - x)$$



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x$$

$$\cos d - \sin d =$$

~~$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

$$= \sqrt{2} (\cos \alpha \cdot \cos 45^\circ - \sin \alpha \cdot \sin 45^\circ):$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos(1+45) \right) = \cancel{\text{...}}$$

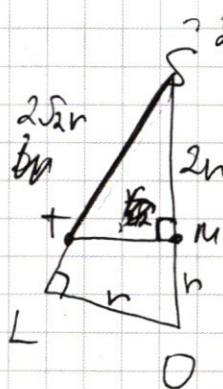
S

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$
$$\sin \alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \beta}$$

mesh $\frac{1}{3}$

$$\sqrt{gr^2 - v^2} = \sqrt{gr^2}$$

$\approx 252 \text{ V}$



$$\frac{2\sqrt{2}R}{\cancel{X}} = \frac{2R}{\cancel{X}} \Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ST. $2\sqrt{2} = 2n-3$

$$ST = \frac{3r}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} (\cos(11x+45^\circ) - \sqrt{2} \cos(3x+45^\circ)) = \sqrt{2} \cos 14^\circ$$

$$\cos(11x+45) - \cos(3x+45) = \cos 14x$$

$$= 2 \sin\left(\frac{8x}{2}\right) \cos\left(\frac{14x+90}{2}\right) = \cos 14x$$

$$11x + 40 - 3y$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos (7x + 45) = \cos 14x - \cos 18x$$

$$\cos 2\alpha - \cos 2\beta = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha =$$

$\alpha + \beta = 0$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = x$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = y$$

$$x + y = \alpha$$

$$y - x = \beta$$

$$\cos \alpha + \cos \beta =$$

$$= \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$+ \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$= 2 \cos x \cos y$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \cos x \sin y$$

$$\sin x \cos y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) =$$

$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - (\cos x \cos y + \sin x \sin y) =$$

$$= -2 \sin x \sin y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin \cdot \cos$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(x, y) - решение $\Rightarrow (-x, y)$ - решение

$x > 0$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

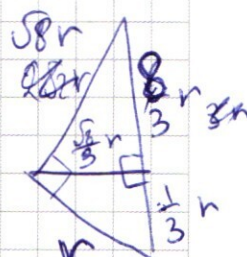
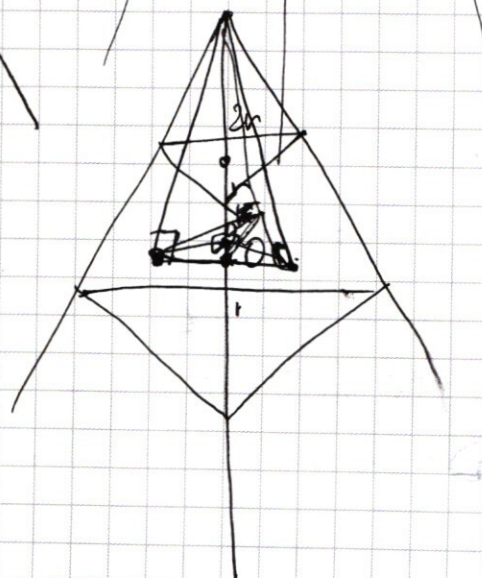
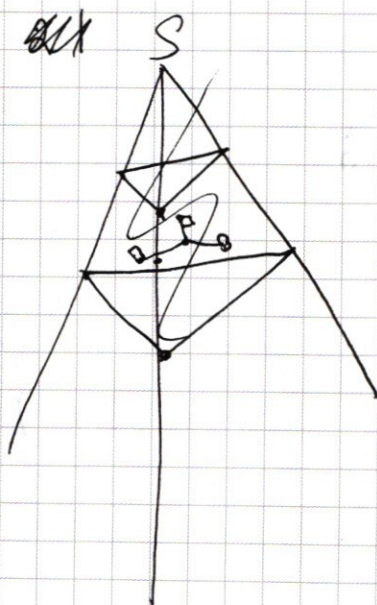
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$(y-3-x)^2 + (y-3+x)^2 = 6(|y-3-x| + |y-3+x|)$$

$$(y-3)^2 + x^2 - 2x(y-3) + (y-3)^2 + x^2 - 2x(y-3) = -4x(y-3)$$

$$1 + 1 - 2x = -2x \quad |y-3| = 3$$

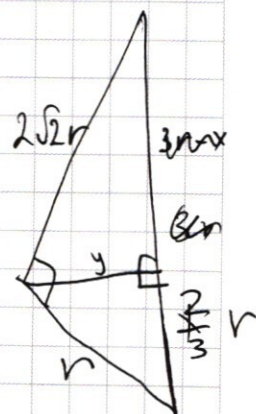
$$1 + 1 = 6 \quad |y-3| = 3$$



$$r^2 = \frac{r^2}{9} + \frac{8}{9}$$

$$\frac{5/8 r}{x} = \frac{3/8 r}{5/8 r}$$

$$x = \frac{8}{3} r \quad 3r - \frac{2}{3} r = \frac{7}{3} r$$



$$r^2 = 8r^2 - (3r-x)^2$$

$$2r^2 = 8r^2 - 9r^2 - x^2 + 6rx$$

$$2r^2 = 6rx \quad x = \frac{2}{3} r$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + (25 - a) = 0$$

Решить

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

ММ

$$70 + (2^{64} - 1)x \geq y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$(2^{64} - 1)x - 2^x > 3 \cdot 2^{65} - 70$$

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases} \quad \text{— имеет 2 решения}$$

$$y \neq x \quad y \neq -x \quad x, y > 0$$

$$y \geq 0$$

$$y > 3$$

$$y - 3 = y_1 > 0$$

$$a > 25 \Rightarrow 4 \text{ реш}$$

$$a <$$

$$|y_1 - x| + |y_1 + x| = 6$$

$$3 > x > -3$$

$$y = 3 - x$$

$$1) a, b > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 6 = 6$$

$$2y = 12 \quad y = 6$$

$$|3 - x| + |3 + x| = 6$$

$$(3 - x)(3 + x) > 0 \Rightarrow$$

$$3 > x > -3 \quad x > 0$$

$$(|x| - 4)^2 + 9 = a$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$x^2 - 4x + (25 - a) = 0$$

$$16 - 100$$

$$D = 16 - 4(25 - a) = 4a - 84 = 4(a - 21)$$

если

если $a < 21 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow$ решений нет вообще

~~если $a > 21 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow$ решения есть~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$3375 = 5^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$ в восьмизначном числе могут быть только числа 1, 3, 5, 9.

Процверение чисел: $5^3 \Rightarrow$ в числе есть три пятерки. Если в числе есть 9, то оставшиеся ^(цифры) числа такие:

3, 1, 1, 1. Таких чисел $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$ (C_8^3 - кол-во способов расставить пятерки, C_5^3 - кол-во способов расставить единицы на оставшиеся места, и 2 - кол-во способов расставить 9 и 3 на оставшиеся места). Если в числе 9 нет, то кол-во цифр определяется однозначно: 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1. Таких чисел $C_8^3 \cdot C_5^3$ (C_8^3 - расставляем пятерки, C_5^3 - расставляем тройки на оставшиеся места, поместим единицы однозначно).

$$\text{Итого способов } C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 40 \cdot 42 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^{\lg(xy)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases} \quad x > 0, y > 0$$

$$x^2 - x(2y + 4) + (12y - 3y^2) = 0.$$

Решим это квадратное уравнение относительно x

$$D = (2y + 4)^2 - 4(12y - 3y^2) = 16 + 4y^2 + 16y - 48y + 12y^2 = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = (4y - 4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2y + 4 \pm (4y - 4)}{2} = 3y; 4 - y$$

1) $x = 3y$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{\lg(3y^2)} \Leftrightarrow y^{\lg(3y)} = 3^{\lg(3y)} \cdot y^{\lg(3y)} \cdot y^{\lg(4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{\lg(3y)} = 3^{\lg(3y)} \cdot y^{\lg(4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2\lg(3y) \cdot \lg(4)} = 3^{\lg(3) \cdot \lg(4)} \cdot 10^{2\lg^2(4)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^{2\lg(3) \cdot \lg(4)} = 10^{\lg^2(3)} \cdot 10^{\lg(4) \cdot \lg(3)} \cdot 10^{2\lg^2(4)} \Leftrightarrow$$

$$\lg(3) = a \neq 0 \quad \lg(4) = b$$

$$2b^2 + 2ab = a^2 + ab + 2b^2 \Leftrightarrow a^2 = ab \Leftrightarrow a = b$$

$$\lg(3) = \lg(4) \Rightarrow y = 3, x = 9$$

Представим, проверим проверку. Алгорит

2) $x = 4 - y$

$$\frac{y^5}{4-y} = y^{\lg(4-y)} \Leftrightarrow y^{\lg(4-y)} = y^{\lg(4)} \cdot y^{\lg(x)} \Leftrightarrow$$

$$10^{3\lg(x) \cdot \lg(4)} = 10^{2\lg^2(4)} \cdot 10^{\lg^2(x)} \Leftrightarrow 3\lg(x) \cdot \lg(4) = 2\lg^2(4) + \lg^2(x) \Leftrightarrow$$

$$3\lg(4-y) - \lg(4) = 2\lg^2(4) + \lg^2(4-y) \Leftrightarrow$$

$$[\lg(4-y) = a \quad \lg(4) = b] \quad 3ab = 2b^2 + a^2 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.1) $a = b \Rightarrow x = y \Rightarrow x = y = 2$

Представим. Проверим

2.2) $a = 2b \Rightarrow \lg(4-y) = 2\lg(y) = \lg(y^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 4-y \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17 \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad y > 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$

$x = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0.$

Аналогично проверим

Ответ: $(9, 3); (2, 2); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$

№6

а) т.к. радиусы окружности равны

равны, то $\angle APB = \angle BDA =$

$= \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 45^\circ$

Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$

По Т.синусов

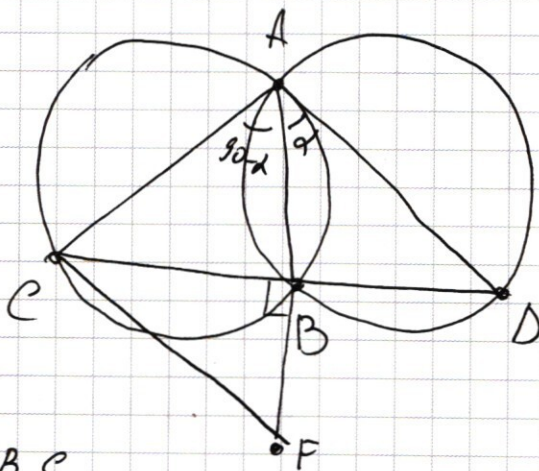
$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R = 10 = \frac{BC}{\sin 90^\circ - \alpha} = \frac{BC}{\cos \alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 10 \cos \alpha; BD = BF = 10 \sin \alpha$

По Т.Пифагора $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} =$

$= \sqrt{100 \cos^2 \alpha + 100 \sin^2 \alpha} = 10\sqrt{1} = 10$

Ответ: 10



$$8) BC=6 \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8 = BD$$

$$\frac{BD}{\sin d} = \frac{8}{\sin d} = 2R = 10 \Rightarrow \sin d = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{поэтому } \cos d = \sin(90-d) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \sin d \Rightarrow (\text{м.и. угла } \angle BCF < 90^\circ),$$

$$\angle BCF = d \quad \angle ACF = 45^\circ + d$$

$$\angle ABC = (45^\circ + d)$$

$$\frac{AC}{\sin(45^\circ + d)} = 10 \Rightarrow AC = 10 \cdot \sin(45^\circ + d)$$

$$\sin(45^\circ + d) = \sin 45^\circ \cdot \cos d + \sin d \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} \sin(45^\circ + d) \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \sin^2(45^\circ + d) \cdot 10 \cdot 10 =$$

$$= 50 \cdot \frac{49}{25 \cdot 2} = 49$$

Ответ: 49

~ 4

Пира ABC и $A_1B_1C_1$ - сечения,
плоскости которых параллельны и 4 соотв.

сечения пирамиды (ABC) в T, ($A_1B_1C_1$) в T_1

$DT \perp (ABC)$, $SD \perp (ABC) \Rightarrow$

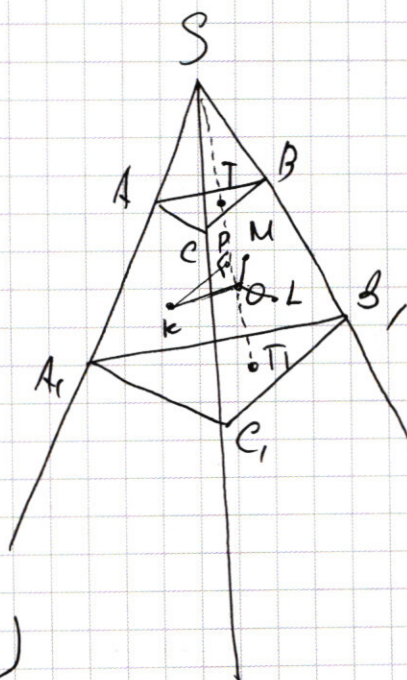
$\Rightarrow T \in SD$. Аналогично $T_1 \in SD$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом 2

(м.и. их площади относятся как 4)

$SA = \frac{1}{2} SA_1 \Rightarrow ST = \frac{1}{2} ST_1$. Если r-радиус сечения, то

$$ST = TT_1 = 2r$$



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

