

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 16$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

1) Разложим 64824 на простые множители  
 $64824 = 3^3 \cdot 4^4$

2) Нам нам единственная цифра, которая делится на 4 это 4, то в восьмизначном числе должно быть 4 единицы

3) Из 12 и 11 вычитаем, что произведений оставшихся четырех цифр = 24 ( $64824 : 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 24$ )

4) Есть 2 варианта представления 24 в виде 4 цифр

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9$$

~~XXXXXXXXXX~~

Рассчитаем количество получаемых чисел для каждого варианта, пользуясь правилами комбинаторики

числа 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

числа 1, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 9

$$X_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}{6} = 280$$

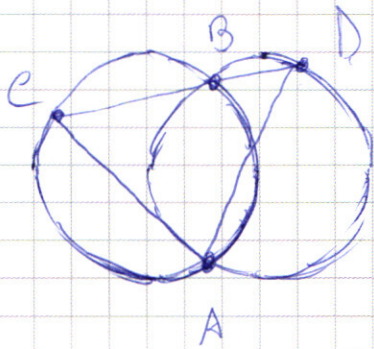
$$X_2 = \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}{2} = 840$$

$$\text{Всего чисел} = X_1 + X_2 = 1160$$

Ответ: 1160 восьмизначных чисел произведение цифр которого 64824



# #4 Задача №6



- 1) Так как окружности одинаковые, то они обе симметричны относительно точки A и B
- 2) из симметрии поймем, что  $\angle ACB$  на одной окружности равен дуге  $\angle ADB$  на другой окружности.

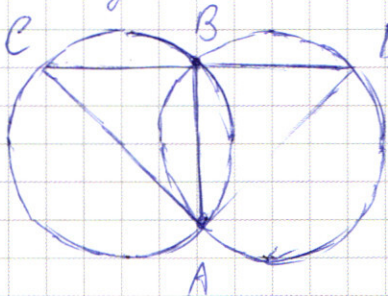
$$3) \angle ACB = \frac{1}{2} \text{ дуги } AB$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \text{ дуги } AB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

$$4) \angle ACB + \angle ADB = 90^\circ, \text{ т.к. } \triangle CAD - \text{прямоугольный}$$

5) из п.3 поймем, что C и D тоже симметрично расположены,



т.е. то есть весь рисунок симметричен

6) из п.5  $BC = BD \Rightarrow AB$  - высота

7) из п.3  $\triangle ACD$  - равнобедренный

8) т.к.  $AB$  - высота  $\angle CBA = 90^\circ$ ,  $\angle ABD = 90^\circ$ , тогда  $ABC$  и  $ABD$  - прямоугольные, так как эти углы на них опираются  $CA = AD = R \cdot 2 = 34$

9) т.к.  $AB$  - высота то F лежит на прямой  $AB$

10)  $AB$  - медиана в  $\triangle ABC \Rightarrow AB = BC = BD$

по двум катетам

11) из п.3 и п.10 следует что  $\triangle CFB = \triangle CAB$  - прямоугольный

$CB = BA = BF$  т.к.  $BF = BD$  по условию

12) из равенства  $CF = AC = 34$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} BC \cdot (AB + BF) = \frac{1}{2} 16 \cdot 32 = 256$$

$BC$  - высота т.к.  $\angle ABC = 90^\circ$   $AB = BF = BC = 16$  из п.10 и условия



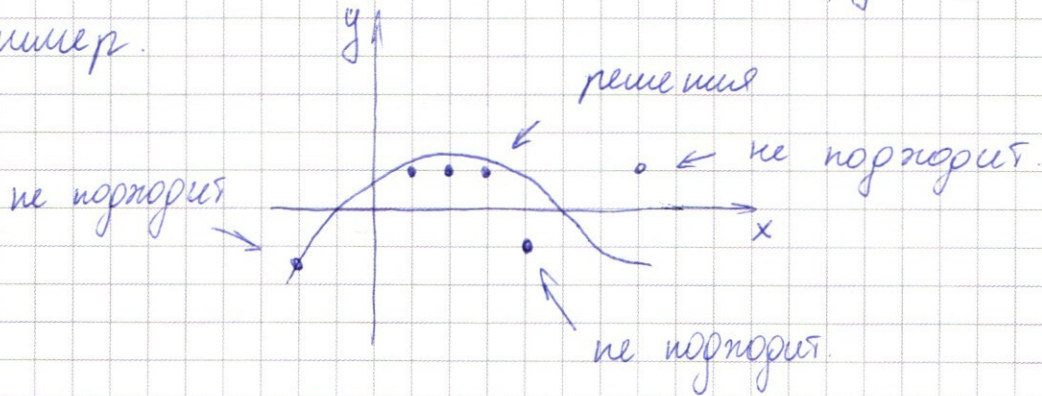
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Зарача  $N = 4$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{24} - 1)x \end{cases}$$

1) Рассмотрим функцию  $f(x) = 93 + 3(3^{28} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

2) Заметим, что решения нашей системы уравнений есть множество точек с целыми координатами лежащих выше оси  $X$  и ниже нашей функции пример.



3) ~~В~~ Найдем производную и найдем что функция имеет одну точку экстремума, то есть нулей функции максимум 2

4) Заметим, что  $f(4) = 0$   
 $f(31) = 0$  — граничные нули функции

5) Из п4 и п3 именные точки ~~каждой~~ имеют подструктуру  $x \in [5, 30]$  ~~Каждая~~ ~~каждой~~ ~~каждой~~

в) Найти количество точек для каждого  $x \in [5, 30]$



Количество упорядоченных точек равно (для координаты  $x$ ,  
 $93 + 3(3^{28} - 1)x_1 - (3^{28} - 4 \cdot 3^{28})$ )

разобьем ее на несколько слагаемых  
 $(93) + ((3^{28} - 3)x_1) - (3^{28}) - (4 \cdot 3^{28})$

Теперь получаем формулы арифметической и геометрической прогрессий найдем сумму ~~для  $x_1$~~  для каждого члена сделаем для  $x \in [5; 30]$

$$1) \underbrace{93 + 93 + \dots + 93}_{(30 - 5 + 1) \text{ раз}} = 93 \cdot 26 = S_1$$

$$2) (3^{28} - 3)5 + (3^{28} - 3)6 + \dots + (3^{28} - 3)30 = (3^{28} - 3) \cdot \frac{5 + 30}{2} \cdot 26 = \\ = (3^{28} - 3) \cdot 35 \cdot 13 = S_2$$

$$3) \cancel{3^5} + 3^6 + \dots + 3^{30} = \frac{3^{31} - 3^5}{3 - 1} = \frac{3^{31} - 3^5}{2} = S_3$$

$$4) (-4 \cdot 3^{28}) \cdot 5 + \dots + (-4 \cdot 3^{28}) \cdot 30 = -4 \cdot 3^{28} \cdot \frac{5 + 30}{2} \cdot 26 = \cancel{-4 \cdot 3^{28} \cdot 130} \\ = -4 \cdot 3^{28} \cdot \cancel{130} \cdot 35 \cdot 13 = S_4$$

Количество пар решений  $= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$

$$= 93 \cdot 26 + 3^{28} \cdot 35 \cdot 13 - 3 \cdot 35 \cdot 13 + \frac{3^{31} - 3^5}{2} - 4 \cdot 3^{28} \cdot 35 \cdot 13 = \\ = 1053 - 3^{28} \cdot 455 + \frac{3^{31} - 3^5}{2} = \frac{2106 + 3^{31} - 3^5}{2} - 3^{28} \cdot 455$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$1) y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$y+3x=0$$

$$y-x+4=0$$

$$y=-3x$$

$$y=x-4$$

пересаживаем во второе  
первое

$$3) y = x-4$$

$$\left(-\frac{x^2}{x-4}\right)^{\ln 4-x} = x^{2\ln(x-4)^2 x}$$

$$\frac{-x^{2\ln 4-x}}{x^{2\ln(x-4)^2 x}} = x-4$$

$$\frac{x^{\ln(4-x)^2}}{x^{\ln(4-x)^2 x^2}} = 4-x$$

$$4-x = x^{\ln(4-x)^3 x^2}$$

$$4-x = x$$

~~$$(4-x)^3 x^2 > 0$$~~

~~$$(4-x)^3 > 0$$~~

~~$$4-x > 0$$~~

~~$$x > 0$$~~

я не знаю, как это решать

$$2) \left(-\frac{x^2}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(9x^3)}$$

$$\frac{x^{6\ln 3x}}{x^{2\ln(9x^3)}} = 3^{\ln 3x}$$

$$\frac{x^{\ln 3^6 x^6}}{x^{\ln 3^4 x^6}} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 3^6 x^6 / \ln 3^4 x^6} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 9} = 3^{\ln 3x}$$

$$x=3 \Rightarrow y=-9$$

корней больше нет, так как  
обе функции возрастающие  
правая растет быстрее левой  
и корень

Проверка

$$-\frac{3^{4\ln 3}}{-9} = 3^{2\ln(3(-9)^2)}$$

$$3^{5\ln 9} = 3^{2\ln 3^5}$$

$$3^{10\ln 3} = 3^{10\ln 3}$$

все нормально.

Ответ:  $x=3; y=-9$



Задача №2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 4x + \cos 3x) + (\sin 4x - \sin 3x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos \frac{4x+3x}{2} \cos \frac{4x-3x}{2} + 2 \sin \frac{4x-3x}{2} \cos \frac{4x+3x}{2} + \sqrt{2}$$

$$+ \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

и не знаю как это решить

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{N}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{N}$$

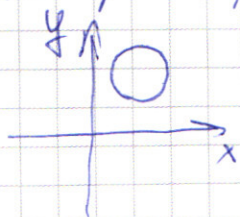
Ответ:  $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{N}$

Задача №5.

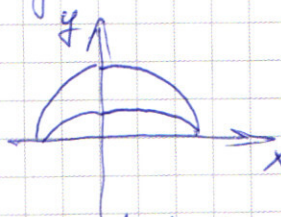
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

1) график первого уравнения

2) график второго в зависимости от  $a$



т.н.  $|y|$  отражение

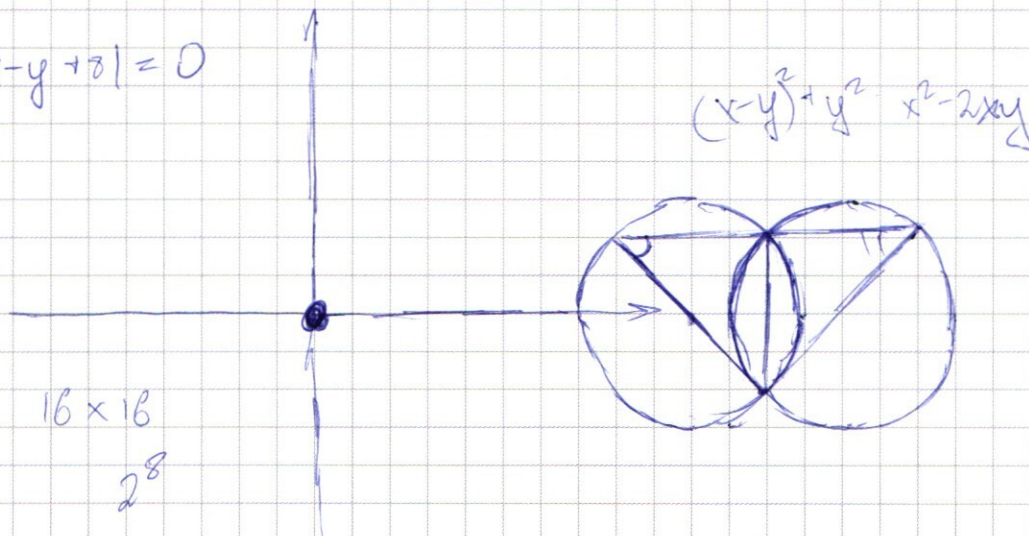


т.н.  $|x|$  симметричен относительно оси  $Y$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 0$$



$$16 \times 16$$

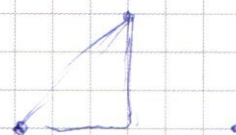
$$2^8$$

~~$$2x+16$$~~  

$$|8-y| + |8+y| = 16$$
  
~~$$16 \times 16$$~~

$$8 - 10$$

$$8 - y$$



$$18 - 2y = 16$$

~~$$8 - 1 + 8 + 1$$~~

$$8 - 2 + 8 + 2$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$$x + y + 8 > 0$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$2x + 16 = 16$$

$$x = 0$$

~~$$2y + 16 = 0$$~~



$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{24} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^x + (4-x)3^{28} < 93 - 3x$$

$$3^{x-1} + (4-x)3^{27} < 31 - x$$

$$x < 0$$

решений нет.

$$3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{27} \leq 31 + x < 0$$

$$y = 3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{27} - 31 + x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} - 3^{27}x + x - 31$$

$$3^{x-1} - 3^{27}x + x$$

$$1 - 3^{27}$$

$$3^{31} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3(3^{24} - 1)$$

$$93 + 3^{24}$$

$$93 \cdot 3^{24}$$

$$1 \ 3 \ 3 \ 3$$

$$1 \ 1 \ 3 \ 9$$

$$3$$

$$93 + 3^{28}$$

$$1 < 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5$$

$$\leq$$

$$93 + 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

$$3(31 + 3^{24}(x-4) - 1 - 3^{x-1})$$

$$x=1$$

$$3^0 + 3^{28} < 30 \text{ не}$$

$$x=2 \ 8$$

$$3 + 2 \cdot 3^{24} < 28 \text{ не}$$

$$x=3$$

$$8 + 3^{24} < 24 \text{ не}$$

$$x=4$$

$$24 + 0 < 24 \text{ не}$$

$$x=5$$

$$3^4 + 3^{24} < 26 \text{ да}$$

$$x=6$$

$$3^5$$

4

$$3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{27} = 31 - x$$

$$3^5 -$$

$$3^{x-1} + (4-x)3^{27} = 31 - x$$

$$3^5 - 3$$

$$31 - 4$$

$$4 - 31$$

$$31$$

$$x^{31} - 3$$

$$-3$$

$$3^{32} + 3^{20} - 3 \cdot 3^{24} = 0$$

$$3^{32}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{2}$$

$$2 \cos \alpha \cos \alpha$$

$$2 \cos 5x \cos 2x \neq 2 \sin 2x \cos 5x \cos 0 = 1$$

$$\sin 4x - \sin 3x =$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\sin 80 - \sin 60 =$$

$$\frac{1}{2} \quad 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$2 \sin 30 \cos 60$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin 15$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x.$$



$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$$

39

$$\begin{array}{r} 1 \\ 93 \\ \times 26 \\ \hline 558 \\ 186 \\ \hline 2418 \\ - 1365 \\ \hline 1053 \\ 35 \\ \times 13 \\ \hline 105 \\ 35 \\ \hline 455 \\ \times 3 \\ \hline 1365 \end{array}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3x$$

31

$$3^x + 3^{28} < 93 - 3x$$

$$3^x + 3^{28} < 3(31 - x)$$

$$3^{x-1} + 3^{28} < 31 - x$$

24

$$81 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} \cdot 4 - 12$$

$$81 + 3^{28} \cdot 4$$

$$81$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3(31 - x)$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{28} \leq 31 + 3^{28} - x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{28} \leq 31 + 3^{28}x - x$$

$$3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{28} \leq 31 - x$$

$$3^{x-1} + 3^{28} \leq 31$$

$$35 - 9 = 3^{26} - 1$$

$$x=2$$

$$2 + 3 \leq 31 - 4$$

24

$$x=4$$

$$81 \leq$$

$$3 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} \cdot 3 - 9$$

24

$$-3^4 \cdot \frac{3^{26} - 1}{2}$$

$$-3^{30} + 3^4$$

$$\frac{3^4 - 3^{30}}{2}$$

$$x \in [5; 30]$$

$$31 + 3^{28}(x-4) - 1 - 3^{x-1}$$

$$-3^4 - 3^5 \dots - 3^{28}$$

$$-3^4(1 + 3 + 9 \dots + 3^{25})$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 64824 & 4 \\ 9261 & 4 \\ 1323 & 3 \\ 189 & 3 \\ 27 & 3 \\ & 3 \\ & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4722 \\ 1333 \\ 1136 \\ 1119 \end{array}$$

$$y = -\cancel{3x} 3x$$

$$(y+3x)(y-x+4)=0$$

$$\cancel{y^2} + 3xy - xy - \cancel{3x^2} + 4y + 12x$$

$$\left(-\frac{x^3}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\cancel{(y+x)^2} - \cancel{4x^2} + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 \\ &= 4^2(x^2 - 2x + 1) = (4x - 4)^2 \end{aligned}$$

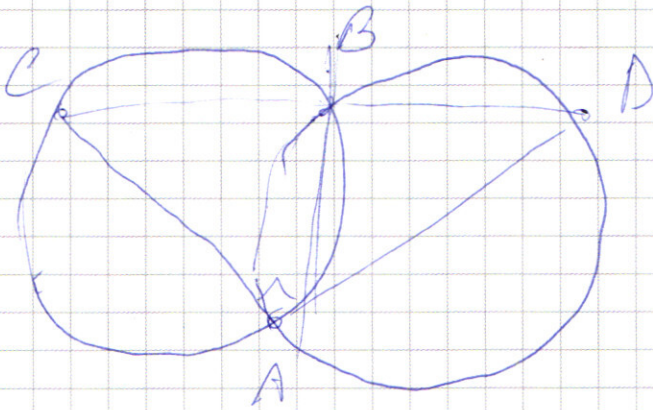
$$y = \frac{-2x - 4 \pm (4x - 4)}{2}$$

$$y_1 = \cancel{x} x - 4$$

$$y_2 = -3x$$

$$\begin{aligned} &-\frac{x^4}{-3x} \ln(3x) \\ &= x^2 \ln(3x^3) \\ &= x^2 \ln(3x^3) = 2 \ln \end{aligned}$$





$$x+y+8 = x-y+8$$

~~2y~~

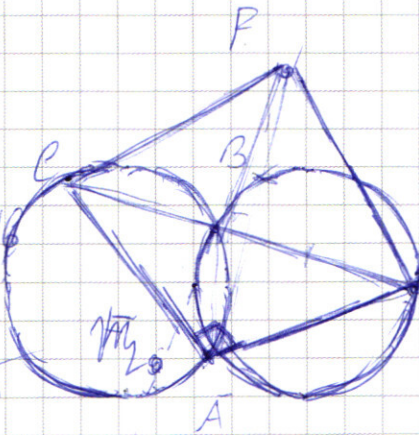


y

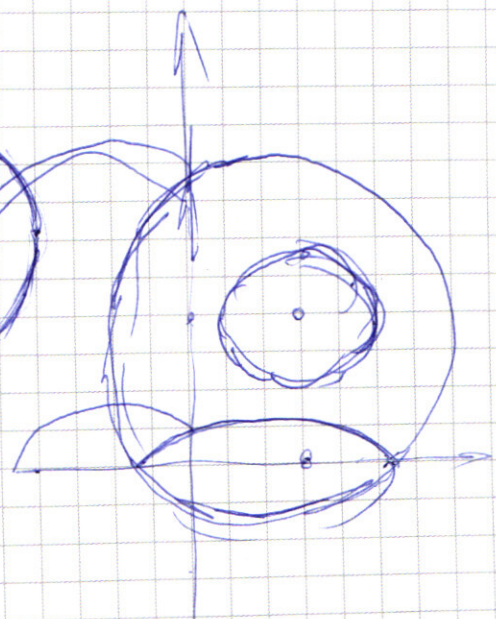
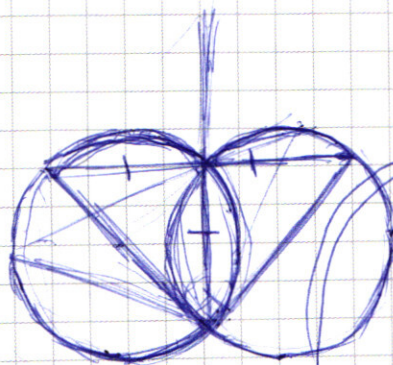
$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$|8+y| + |8-y| = 16$$

$$8.5 + 8.5$$



$$(1 \times 1 - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 9$$



$$(x-8)^2 + (y-15)^2$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + 3(3^{28} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 0 \quad \text{или} \quad 3(31 + 3^{28}x - x - 3^x - 3^{28})$$

[5, ... 30]

$$93 \cdot (30 - 5 + 1) = 26 \cdot 93$$

$(3^{28} - 3) \cdot 130 \sim$

$$3(3^{28} - 1) \cdot 3^{28}x - x$$

$$-57 - 6; -4 \dots -30 = \frac{-30 - 5}{2} \cdot 26 = 13 \cdot (-35)$$

$$-35(3^{28} - 3) \cdot 13 = 8$$

$-455 \cdot 3^{28} \quad -455 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 13 \\ x - 35 \\ - 65 \\ \hline 38 \\ 455 \end{array}$$

$$(y + 3x)(y - x + 4) = 0$$

$$y = -3x$$

$$\left(-\frac{x}{-3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2/\ln(9x^3)}$$

$$\log_{10} x^3 = 3 \log_{10} x$$

$$\log_{10} 9x^3$$

$$\ln 3x = \ln 3 + \ln x$$

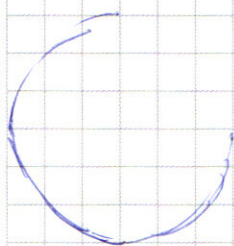
$$4 \ln 3 + 3 \ln x$$

$$x^{4 \ln 3 + 3 \ln x}$$

$$\frac{x^6}{3}^{\ln 3x} = x^{2/\ln 9x^3}$$











ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

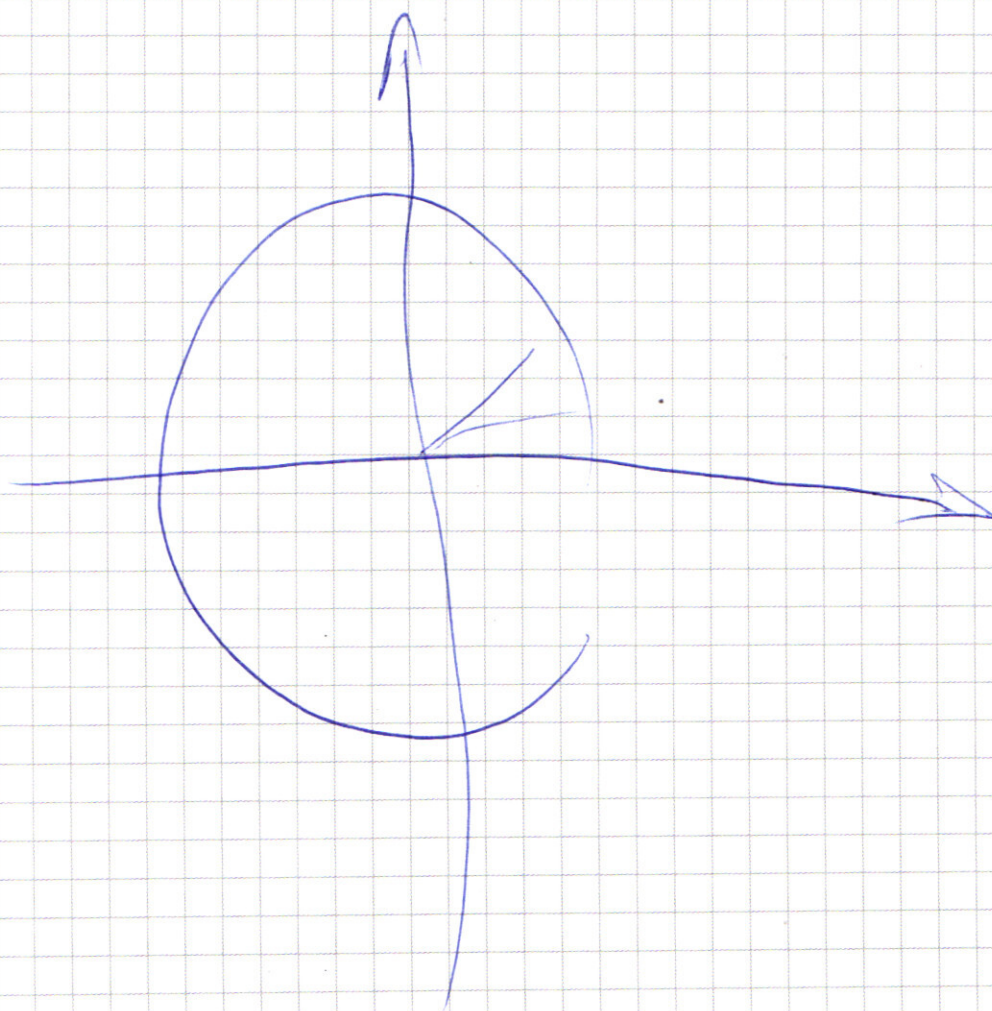
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)







Рег. №: М11-ИБ-0016

Класс участия: 11 класс

Место проведения: Иваново

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное): 11:00



## Олимпиада школьников «Физтех» по математике

Заключительный этап 2020 г.

### Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

|                                   |                                             |                        |                   |                   |
|-----------------------------------|---------------------------------------------|------------------------|-------------------|-------------------|
| <u>Щербакова</u>                  | <u>Виктория</u>                             | <u>Алексеевна</u>      | <u>20.12.2002</u> | <u>17 лет</u>     |
| Фамилия                           | Имя                                         | Отчество               | Дата рождения     | Возраст           |
| <u>Российская Федерация</u>       | <u>Ивановская обл</u>                       | <u>г Иваново</u>       |                   |                   |
| Страна                            | Регион                                      | Населенный пункт       |                   |                   |
| <u>Паспорт гражданина РФ</u>      | <u>24 16</u>                                | <u>843597</u>          | <u>27.12.2016</u> | <u>370-005</u>    |
| Документ, удостоверяющий личность | Серия                                       | Номер                  | Дата Выдачи       | Код Подразделения |
| <u>Российская Федерация</u>       | <u>Ивановская обл</u>                       | <u>г Иваново</u>       |                   |                   |
| Страна школы                      | Регион Школы                                | Населенный Пункт Школы |                   |                   |
| <u>11 класс</u>                   | <u>МБОУ "ЛИЦЕЙ № 33"</u>                    |                        |                   |                   |
| Класс обучения                    | Полное название образовательного учреждения |                        |                   |                   |
| <u>+7 910 983 55 56</u>           | <u>sveshherb2002@gmail.com</u>              |                        |                   |                   |
| Мобильный телефон                 | E-mail                                      |                        |                   |                   |

### Согласие на обработку персональных данных

Я согласна на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласна, что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирована, что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласна на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати диплома олимпиады в случае его получения. Я согласна на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлена с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников "Физтех", а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«10» февраля 2020 г.

Подпись участника олимпиады

Щербакова Светлана Валериевна мать  
ФИО законного представителя Степень родства

Подпись законного представителя

**Анкета без подписи недействительна.  
Анкета обязательно должна быть вложена в работу!**







# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР



2 0 0 0 4 5 4 6

\_\_\_\_\_ подписывается ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .
- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 16$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.







## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N1)

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

П.е. восьмизначное число состоит из цифр либо: 1, 3, 7 I вариант  
либо: 1, 3, 7, 9 II вариант

I вариант:

цифры: 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, т.е. найдем все восьмизначные числа,  
состоящие из этих цифр:

$$8 \cdot C_7^3 \cdot 1 = 8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 1 = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 35 = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 40 \cdot 7 = 280$$

кон-во  $\leftarrow$   $\leftarrow$   $\leftarrow$   
позиций  $\leftarrow$   $\leftarrow$   $\leftarrow$   
для 1-го, для трех, единственная  
(варианта) трех расстановка четв-х

II вариант:

цифры: 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7, 7

$$8 \cdot 7 \cdot C_6^2 \cdot 1 = 56 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 56 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 56 \cdot 15 = 840$$

кон-во  $\leftarrow$   $\leftarrow$   $\leftarrow$   $\leftarrow$   
позиций для для для оставшихся  
для 3, 9, 1-го, 7-ми

П.е. в итоге получаем:  $280 + 840 = 1120$  чисел

Ответ: 1120

(N5)

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

— при каких  $a$  система имеет  
ровно 2 решения

$$(1) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

Рассмотрим по случаям:

$$1. \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ 2x+16=16 \\ y \geq -8 \\ y \leq 8 \\ x=0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -2y=16 \\ x \leq 0 \\ x \geq -16 \\ y=-8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ 2y=16 \\ x \geq -16 \\ x \leq 0 \\ y=8 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ -2x=-16=16 \\ y \leq 8 \\ y \geq -8 \\ x=-16 \end{cases}$$

при  $a < 0$   
система не  
имеет решений  
совсем

$$(2) (|x-8|)^2 + (|y-15|)^2 = a \rightarrow \sqrt{(x-8)^2 + (y-15)^2} = \sqrt{a} \quad (\text{при } a \geq 0!)$$

сохранение части графика в I и  
и симметрии её в II, III и IV четверти



Тогда получаем  
примерно такое  
изображение на  
координатной плоскости:

Тогда система  
уравнений  
будет иметь ровно  
2 решения  
тогда, когда

- 1) В окружности  
 $S_2$  и  $S_3$  (т.е. окружности  
в II и III кв.)  
будет касание  
квадрата:

это будет при  $r=7$ , т.е.  
 $a=49$

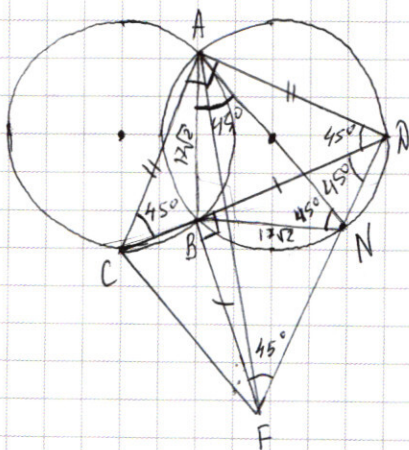
- 2) Все четыре окружности  
будут иметь 2 общие  
точки, т.е.  $(0,0)$  и  $(-16,0)$ : такое будет при  $r=\sqrt{15^2+8^2}=17$ , т.е.

$a=289$

При всех других  $a > 0$  и  $a \neq 49$  и  $a \neq 289$  система имеет ~~3~~ ровно  
2-ух решений

Ответ:  $a \in \{49, 289\}$

№6



Дано: две окружности  $R=17$ ;  $S_1, S_2$

$C \in S_1$

$D \in S_2$ ,  $B \in CD$ ,  $S_1 \cap S_2 = AB$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD$

$FB = BD$ ; б)  $BC = 16$

а) Найти:  $CF$

б) Найти:  $S_{\triangle ACF}$

Решение

- а)  $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ADB$  (т.к. окружности с равными радиусами)  
Тогда в  $\triangle ACD$ :  $\angle C = \angle D = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ , т.е.  
 $\triangle ACD$  - равноб. с осн.  $CD$  (по признаку) и  $\angle A = 90^\circ$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.  $\triangle FBD$  — равнобедренный (по опред.)  $\angle FBD = 90^\circ$ , т.е.  
 $\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$ , как углы при осн.  $FD$ , т.е.  
 $\angle ADF = \angle FDB + \angle BDA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

3.  $\angle CAD = \angle FAD = 90^\circ$ , т.е. а они односторонние при пересечении  $AC$  и  $FD$   
(их сумма:  $180^\circ$ )  $\rightarrow$  т.е.  $AC \parallel FD$ , т.е.

4. по обобщенной теореме синусов:  $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$ , т.е.  $AB = 17\sqrt{2}$

5. ДП:  $DF \cap S_2 = N$ , тогда  $\angle ADN = \angle ADF = 90^\circ$ , т.е.  $AN$  — диаметр и  $AN = 34 = 2R$

6. тогда  $\angle ANB = \angle ADB = 45^\circ = \angle BAN$ , т.е.  $AB = BN = 17\sqrt{2}$

7. Попробуем, что  $CF \parallel AN$  и  $AC \parallel FN$ , т.е.  $ACFN$  — паралл-м, т.е.  
 $CF = AN = 34$  как противоположные стороны

8. Из  $\triangle ACB$ : по т. косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos 45^\circ$$

$$289 \cdot 2 = 256 + AC^2 - 2 \cdot 16 \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC^2 - 16\sqrt{2} \cdot AC - 322 = 0$$

$$\frac{b}{2} = 8\sqrt{2}; \quad \frac{D}{4} = 128 + 322 = 450; \quad \sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{9 \cdot 25 \cdot 2} = 3 \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$$

$$AC = \frac{8\sqrt{2} + 15\sqrt{2}}{1}$$

$$AC = \frac{8\sqrt{2} - 15\sqrt{2}}{1}$$

$$AC > 0$$

$$AC = 23\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 289 \\ \hline 2 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 578 \\ - 256 \\ \hline 322 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 322 \\ + 128 \\ \hline 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 34 \\ \hline 34 \\ + 136 \\ \hline 102 \\ + 1156 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ \hline 69 \\ + 46 \\ \hline 529 \\ \hline 1098 \end{array}$$

9.  $AC = AD = 23\sqrt{2}$ ;  $AN = 34$ , т.е. из  $\triangle AND$  по т. Пифагора:

$$ND = \sqrt{AN^2 - AD^2} = \sqrt{34^2 - 23^2 \cdot 2} = \sqrt{1156 - 1058} = \sqrt{1098} = 3\sqrt{61 \cdot 2} = 3\sqrt{122}$$

$$\text{т.е. } FD = FN + ND = AC + ND = 23\sqrt{2} + 3\sqrt{122}, \text{ т.е.}$$

10. Из  $\triangle ADF$ : по т. Пифагора:  $AF = \sqrt{FD^2 + AD^2} = \sqrt{(23\sqrt{2} + 3\sqrt{122})^2 + (23\sqrt{2})^2}$

11. В  $\triangle ACF$ : мы знаем все 3 стороны  $CF = 34$ ,  $AC = 23\sqrt{2}$ , т.е. по формуле Герона:  
 $AF = \dots$   $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$   
и можем найти  $S = \dots$  (Ответ: а) 34, б)  $\rightarrow$



(N1)

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3(\underbrace{3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27}}) < y \leq 3(\underbrace{31 + x + x \cdot 3^{27}})$$

при  $x < 0$   $y$  не может быть целым

при  $x = 0$   $1 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 93$   $\emptyset$

при  $x = 1$   $3 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 90 + 3 \cdot 3^{27}$   $\emptyset$

при  $x = 2, x = 3$  аналогично  $\emptyset$

при  $x = 4$   $81 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 81 + 12 \cdot 3^{27}$   $\emptyset$

при  $x = 5$   $243 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 3 \cdot 26 + 15 \cdot 3^{27}$

$$243 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 78 + 3 \cdot 3^{27} + 12 \cdot 3^{27}$$

получаем  $y \in \mathbb{Z}$  и  $y \in \{244, \dots, 78 + 3^{28}\}$ , т.е.  $y = 78 + 3^{28} - 244 + 1 = 3^{28} - 165$

при  $x = 6$   $729 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 75 + 18 \cdot 3^{27}$

$$729 + 12 \cdot 3^{27} < y \leq 75 + 6 \cdot 3^{27} + 12 \cdot 3^{27}$$

$$n = 75 + 6 \cdot 3^{27} - 729 + 1 = 2 \cdot 3^{28} - 653$$

и так далее ...

(N2)

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0 \quad \| : \sqrt{2}$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sin(4x + 3x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 4x \cdot \cos(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin 4x \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

~~cos 4x~~ а (продолжение на 5 стр. чистовика  
(XXXX))

(N3) на следующем листе

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad (2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (1)$$

$$u) \quad y^2 + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{D}{4} = x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2; \sqrt{D} = 2(x-1)$$

$$y = -x - 2 + 2x + 2$$

$$y = -x - 2 - 2x + 2$$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$(2) \quad \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

при  $\begin{pmatrix} x > 0 \\ y < 0 \end{pmatrix}$  обе части  
положительны, те  
можно логарифмиро  
вать по  
основанию e

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = \ln x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\ln(-y)(\ln x^7 - \ln(-y)) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y)(7\ln x - \ln(-y)) = 2(\ln x + \ln(-y)^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) = a$$

$$\ln(x) = b$$

$$\begin{pmatrix} y < 0 \\ x > 0 \end{pmatrix} !$$

$$a(7b - a) = 2b(a^2 + b + a^2)$$

$$7ab - a^2 = 2b^2 + 2ba^2$$

$$7ab - a^2 - 2b^2 - 2ba^2 = 0$$

$$a^2 + 2ba^2 + 2b^2 - 7ab = 0$$

$$a^2(1 + 2b) - 7ab + 2b^2 = 0$$

$$2b^2 - b(7a - 2a^2) + a^2 = 0$$

$$D = 49a^2 + 4a^4 - 28a^3 - 4a^2 \cdot 2 = 41a^2 - 28a^3 + 4a^4 =$$

$$= a^2(4a^2 - 28a + 41)$$



(\*\*\*\*) прогнати (N2):

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cdot \sin \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} + 2 \cdot \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad || : 2$$

$$\cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \left( \sin \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 & (1) \\ \sin \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$(2) \quad \sin \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad || : 7$$

$$\underline{\underline{x = \frac{7\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}}}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N3)  $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$   
 ~~$y^2 + 2xy + x^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$~~   
 ~~$(y+x)^2 - 4(x^2 + 3x + y) = 0$~~

$$y^2 + y(2x + 4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\frac{b}{2} = x + 2 \quad \frac{D}{4} = x^2 + 4 + 2x - (-3x^2 + 12x) = \frac{4x^2 + 16x + 4}{4} = x^2 + 4x + 1$$

~~$3x$~~  
$$= x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x^2 - 2x + 1) = 4(x - 1)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{-x-2 - 2(x-1)}{-x-2 + 2(x-1)} \\ y = \frac{1}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-x-2-2x+2}{-x-2+2x-2} \\ y = \frac{-3x}{x-4} \end{cases}$$

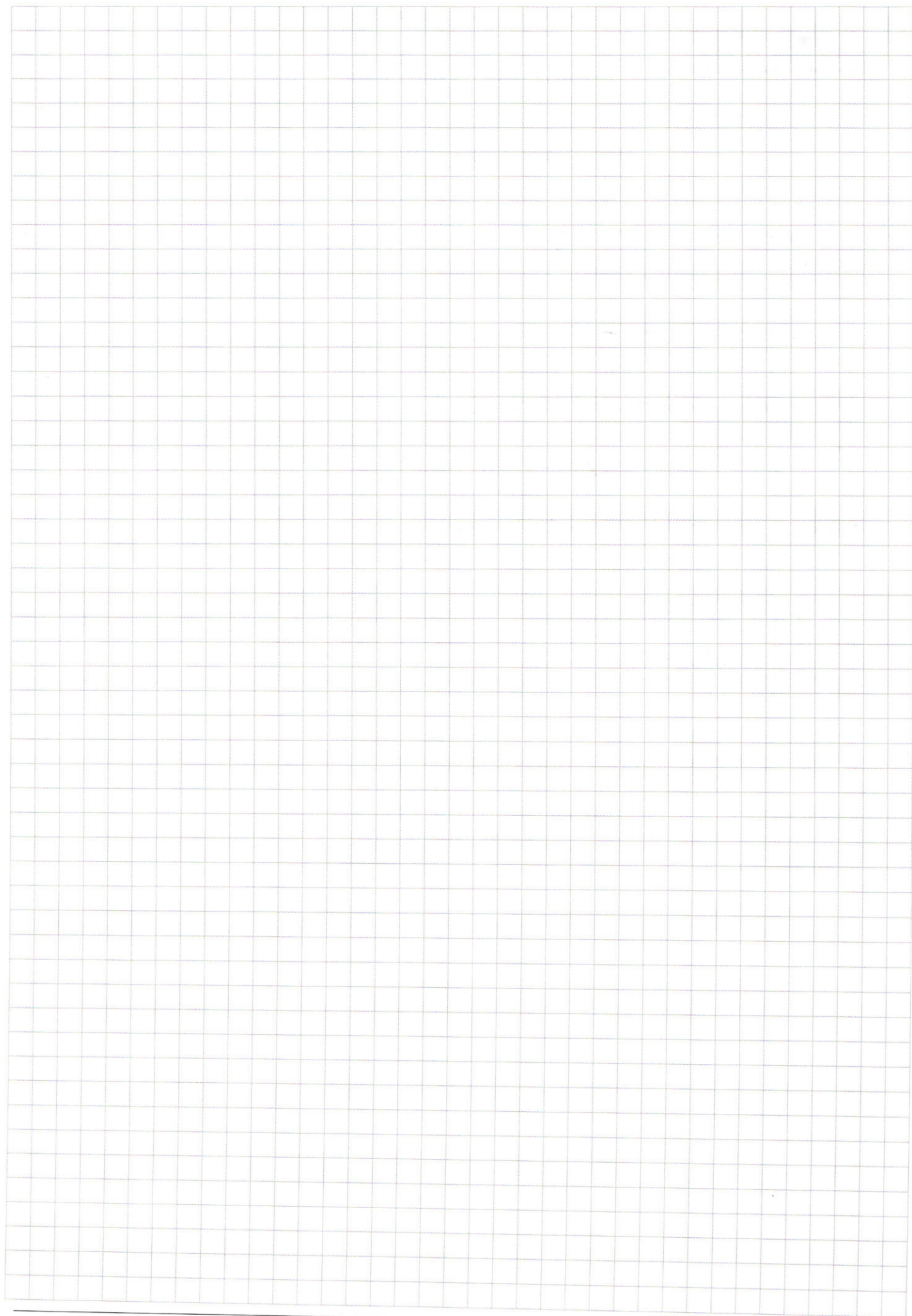
$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x-4 \end{cases}$$

and  $\cos(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$\sin(7x + \frac{\pi}{4})$  and  $\cos(3x + \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) + 2 \cdot \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$





☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

$$\begin{array}{r} 64.827 \overline{) 9} \\ \underline{63} \phantom{00} \\ 18 \phantom{00} \\ \underline{18} \phantom{00} \\ 02 \phantom{00} \\ \underline{0} \phantom{00} \\ 27 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ \underline{6} \phantom{00} \\ 12 \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ 0 \phantom{00} \\ \underline{0} \phantom{00} \\ 3 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 4} \\ \underline{21} \phantom{00} \\ 30 \phantom{00} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 21 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 63 \phantom{00} \\ \underline{63} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$
  

$$64827 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^4$$
  

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 15 \\ \hline 280 \\ 560 \\ \hline 840 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 = 56 \\ \phantom{0} 1 \\ \phantom{00} 40 \\ \phantom{000} 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$
  

Или восьмизначное число состоит из чисел: 1, 3, 7 — I вариант  
1, 3, 9, 7 — II вариант

I вариант:  $\underline{33377771}$   
и все перестановки этих чисел (1\*)

II вариант:  $\underline{13977771}$   
и все перестановки цифр (1\*\*)

(\*) где 1  $\Rightarrow$  8 позиций: 8.  
где 3-е оклико 7 позиций  
позиций, т.е. вариантов  $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$

Итого 7-ки занимают оставшиеся места, т.е.  
 $8 \cdot 35 \cdot 1 = 40 \cdot 7 = 280$  чисел.

(\*\*) где 3-и 8 позиций?  
где 9-ки: 7 позиций  
где 1-и: 6 позиций, т.е.  
 $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

тогда 7-ки занимают оставшиеся места  
т.е.  $8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$  чисел, т.е.

Итого:  $\underline{280 + 840 = 1120}$  Ответ: 1120



N2

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cdot \cos 4x &= 0 \\ (\cos 7x + \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x &= 0 \\ \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \left( \cos 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 3x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \sqrt{2} \cdot \cos 4x &= 0 \quad || : \sqrt{2} \\ \cos \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x &= 0 \\ \cos \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cdot \cos \left( \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) &= 0 \\ \sin \left( 7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x &= 0 \\ 2 \cdot \sin \frac{10x}{2} \cdot \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} + \cos 4x &= 0 \\ 2 \sin 5x \cdot \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \left( 7x - \frac{\pi}{4} \right) &= \cos \left( 4x + \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \cos 4x \cdot \cos \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) - \\ &- \sin 4x \cdot \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

N3

$$\begin{cases} \left| -\frac{x^7}{y} \right|^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)  $\left| -\frac{x^7}{y} \right|^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$   $\begin{matrix} y < 0 \\ x > 0 \end{matrix}$ , тогда обе части существуют и положительны

$$\ln \left( -\frac{x^7}{y} \right)^{\ln(-y)} = \ln x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$\ln(-y) \cdot \ln \left( -\frac{x^7}{y} \right) = 2 \ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln x^7 - \ln(-y)) = 2 \ln x (\ln x + \ln y^2)$$

$$7 \ln x \cdot \ln(-y) - \ln^2(-y) = 2 \ln^2 x + 2 \ln x \cdot \ln y^2$$

$$\ln y^2 = \ln(-y)^2$$

Пусть  $\ln x = a$   
 $\ln(-y) = b$ , тогда

$$7a \cdot b - b^2 = 2a^2 + 2ab^2$$

$$2a^2 + 2ab^2 + 7ab + b^2 = 0$$

$$\cancel{2a^2} + a(2b^2 + 7b) + b^2 = 0$$

$$b^2 + 2ab^2 + 7ab + 2a^2 = 0$$

$$b^2(1 + 2a) - b(7a) + 2a^2 = 0$$

Пусть  $\textcircled{I} \quad a = -\frac{1}{2}$ , тогда  $-b \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$$b \cdot \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad || \cdot 2$$

$$7b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{7}$$

при этом  
узнаем

$$\textcircled{II} \quad a \neq -\frac{1}{2}$$

$$D = 49a^2 - 4 \cdot 2a^2(1 + 2a) =$$

$$= 49a^2 - 8a^2 - 16a^3 =$$

$$= 41a^2 - 16a^3$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

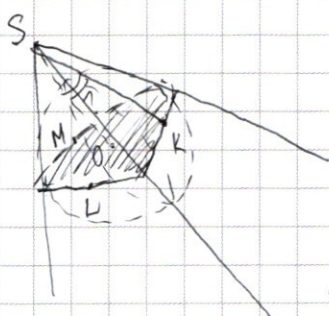
(2)  $y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$y^2 + 2xy$

$y^2 + 4y + 4 - 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2xy = 0$

$(y+2)^2 - 3(x-2)^2 + 2xy = 0$

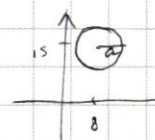
(N4)



(N5) Ответ:  $a = \{49; 289\}$

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$  (1)

$(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$  (2)



(1)  $|x+y+8| + |x-y+8| = 16$

1.  $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ 2x+16=16 \end{cases} \leftarrow x=0$

$\begin{cases} y+8 \geq 0 \\ -y+8 \geq 0 \\ y \leq 8 \\ y \geq -8 \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{отрезок} \\ \text{на оси} \\ \text{Oy: } [-8; 8] \end{matrix}$

2.  $\begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ x+y+8 - x-y-8 = 16 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -16 \\ x \leq 0 \\ y = 8 \end{cases}$

3.  $\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -x-y-8 + x-y+8 = 16 \end{cases}$

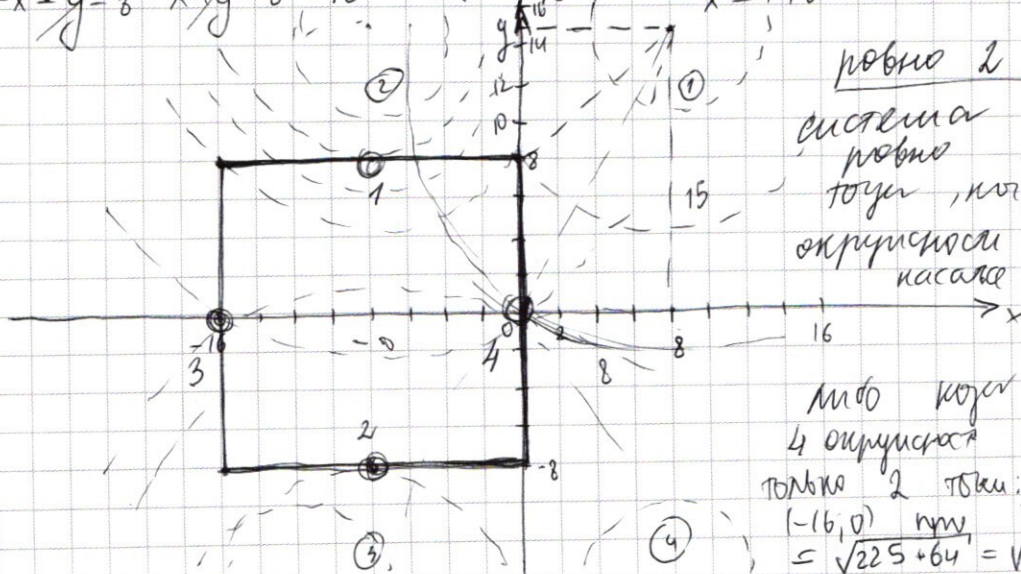
$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -16 \\ y = -8 \end{cases}$

4.  $\begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ -x-y-8 - x-y-8 = 16 \end{cases}$

$\begin{cases} y-8 \leq 0 \\ -y-8 \leq 0 \\ x = -16 \end{cases}$

(2)  $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$   
сохр. значения  
в I, II, III, IV  
и сумме  
и разности  
координат  
 $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$  —  
окружность  $O(8; 15)$  и  $r = \sqrt{a}$   
при  $a \geq 0$  (при  $a < 0$   
воображ. радиус)  
Решение

$\begin{matrix} 225 \\ + 64 \\ \hline 289 \end{matrix}$



ровно 2 решения  
система будет иметь  
ровно 2 решения  
тогда, когда ② и ③  
окружности будут  
касаться квадрата, т.е.

$a = r^2 = 49$

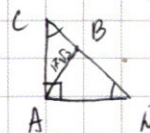
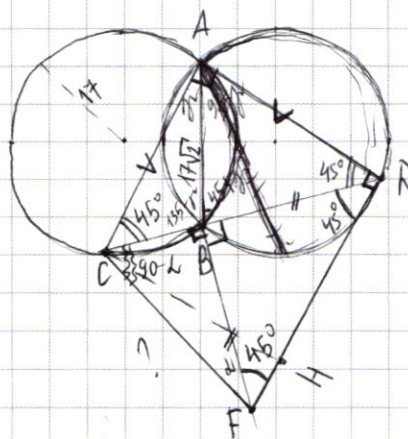
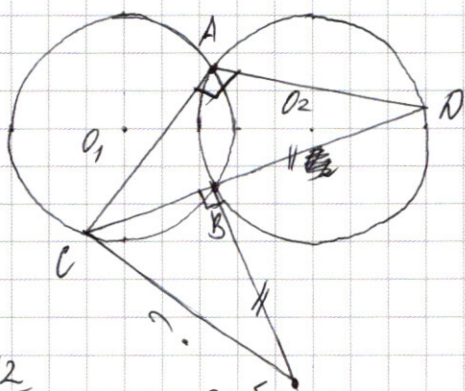
либо когда все  
4 окружности будут касаться  
только 2 точки:  $(0; 0)$  и  
 $(-16; 0)$  при  $r = \sqrt{15^2 + 8^2} =$   
 $= \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17, \text{ т.е. } a = 289$



№6

$$R = 17$$

а) Найти:  $CF$  - ? б) Найти:  $S_{\triangle ACF}$   
если  $BC = 16$



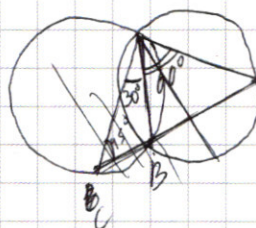
$$\begin{array}{r} 1098/2 \\ 10 \overline{) 549} \\ \underline{-9} \\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 549/9 \\ 5 \overline{) 61} \\ \underline{-9} \\ 61 \end{array}$$

т.е.  $FACD$  - трапеция прямоугольная с осн.  $FD$  и  $AC$  и  
 $AD \perp FD$   
 $AD \perp AC$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$AB = 2 \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$



№7 количество пар  $(x, y)$ , где  $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$3 \cdot 31$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 3^x + (3+1) \cdot 3^{28} = 3^x + 3^{29} + 3^{28}$$

$$93 + 3(3^{27} - 1)x = 3 \cdot 31 + 3x(3^{27} - 1) = 3(31 + x \cdot 3^{27} - x)$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \quad || : 3$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < y \leq 31 + x(3^{27} - 1)$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} < y \leq 31 - x + x \cdot 3^{27}$$

при  $x = 4$ :  $27 + 4 \cdot 3^{27} < y \leq 27 + 4 \cdot 3^{27}$

при  $x = 5$ :  $81 + 4 \cdot 3^{27} < y \leq 26 + 5 \cdot 3^{27}$

$$81 < y \leq 26 + 3^{27} - 81$$

$$81 + 4 \cdot 3^{27} < y \leq 26 + 3^{27} + 4 \cdot 3^{27}$$

т.е.  $y \in \{82, 83, \dots, 26 + 3^{27}\}$  и  $x = 5$

т.е. количество пар:  $26 + 3^{27} - 82 + 1 = 3^{27} - 55$

$$\{1, \dots, 5\}$$

$$\{2, \dots, 5\}$$

$$5 - 2 = 3$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ 27 \\ \hline 55 \end{array}$$