

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

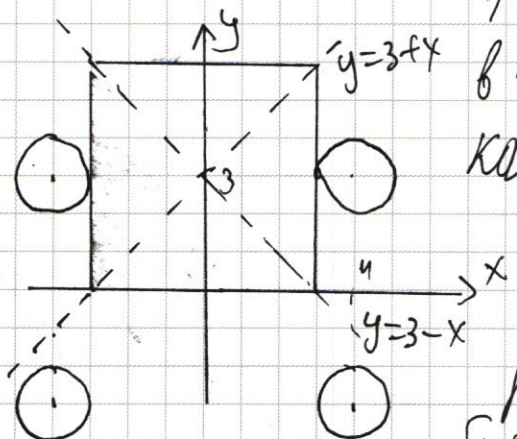
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $3375 = 15^3 = 3^3 \cdot 5^3$, чтобы число произв. цифр восьмизначного числа была равна 3375, оно должно состоять из 2 единиц, 3 троек и 3 пятёрок (11333555; например) чтобы посчитать количество таких чисел, представим, что все цифры разные, а потом поделим на кол-во повторений: $N = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$

Ответ: 560

5 $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ — квадрат со стороной 6
 $\{(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ — 4 окр. с радиусами $\sqrt{a}$, построим 1 из них, остальные все симметричны в силу симметрии верхние окр. каснутся квадрата одновременно, это соответ. 2 решения
 $\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$ ($a \geq 0$) и это ед. решение т.к. при других a будет либо 3 р-ия, либо 4, либо 0



7 $\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}$

Очевидно что при $x \leq 0$ сл-ва не имеют р-ш.
 перебором можно понять, что $x \in [7; 69] \Rightarrow$
 $y \in [2^7 + 6 \cdot 2^{64}; 70 + 69 \cdot 2^{64} - 69] \Rightarrow y \in [128 + 6 \cdot 2^{64}; 1469 \cdot 2^{64}]$
 x выбрать 63 способа, y выбрать $63 \cdot 2^{64} - 127$

Значит все способы $63 \cdot (63 \cdot 2^{64} - 127) = 63^2 \cdot 2^{64} - 63 \cdot 127$
 Отв: $63^2 \cdot 2^{64} - 63 \cdot 127$

$$2) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) / \sqrt{2}$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\cos 7x + \sin 7x = 0 \quad | : \cos 7x \neq 0 \quad = \sin \frac{\pi}{4} \quad = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\tan 7x = -1 \quad \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sqrt{2} \sin 4x = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = -\sin 4x$$

$$\frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi n = \pi + 4x$$

$$\cos 7x \neq 0$$

$$7x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{74} + \frac{\pi k}{7}$$

$$\frac{\pi}{74} + \frac{\pi k}{7} \neq -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \quad | \cdot \frac{28}{\pi}$$

$$2 + 4k \neq -1 + 4n$$

$$n \neq \frac{3}{4} + k \text{ по это всегда}$$

$$11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \text{ или все}$$

$$\frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi n = -4x$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

выполняется, 2-ое и 3-е решения, очевидно, не могут

Отв: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$

$$3 \left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{1/9x} = y^{2/9xy} \right.$$

$$x > 0, xy > 0 \text{ т.к. } x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Решим 2-е как квадрат относительно x

$$x^2 - (2y + 4)x - 3y^2 + 12y = 0 \quad x^2 - (2y + 4)x + 3y(4 - y) = 0$$

по п. Виета получаем: $x = \begin{bmatrix} 3y \\ 4 - y \end{bmatrix}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. поставим $x=3y$ в 1-ю ур-ие!

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \cdot 3^{\lg 3y}$$

$$y^{4 \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2(\lg 3 + 2 \lg y)}$$

$$y^{4 \lg 3y} = y^{4 \lg y + 2 \lg 3} \cdot y^{2(\lg 3 + 2 \lg y)}$$

$$4 \lg 3y = 4 \lg y + 2 \lg 3 + 2 \lg 3 + 4 \lg y$$

$$4(\lg 3 + \lg y) = \frac{\lg 3}{\lg y} (\lg 3 + \lg y) + 4 \lg 3 + 4 \lg y \quad | \cdot \lg y \neq 0$$

$$3 \lg^2 y - \lg 3 \lg y + \lg^2 3 = 0 \quad \text{Решим как квадр. отн. } \lg y$$

$$D = \lg^2 3 - 12 \lg^2 3 < 0 \quad \text{Нет рещ.}$$

проверим, что будет при $\lg y = 0 \Rightarrow y = 1$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = 1 \Rightarrow x^{\lg x} = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ но это не удовл. 2 ур-ию}$$

поставим $x=4-y$

значит $(1; 1)$ - не рещ. сис-мы

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg(4-y)y}$$

$$y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y} = y^{\frac{\lg^2(4-y)}{\lg y}} \quad (y=1 \text{ уже рассматр.})$$

$$3 \lg(4-y) - 2 \lg y = \frac{\lg^2(4-y)}{\lg y} \quad | \cdot \lg y \neq 0$$

$$\lg^2(4-y) - 3 \lg(4-y) \lg y + 2 \lg^2 y = 0 \quad \text{по тл. Виета;}$$

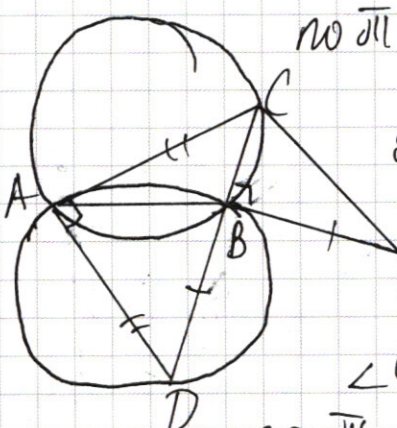
$$\begin{cases} \lg(4-y) = 2 \lg y & 4-y = y^2 \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ \lg(4-y) = \lg y & 4-y = y \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$\text{с учетом } y > 0 \text{ и } y < 4 \quad y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y=2 \Rightarrow x=2 \quad y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow x = 4 + \frac{\sqrt{17}+1}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Гмб: $(2; 2); (\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2})$

6



по п. sin: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 10 \quad \frac{AD}{\sin \angle ABD} = 10$

$\sin \angle BAC = \sin \angle ABD$ (смежные) $\Rightarrow AC = AD$

$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$, $BC = x$, $AC = a$

$BD = DC = \sqrt{2}a$ $BD = \sqrt{2}a - x$

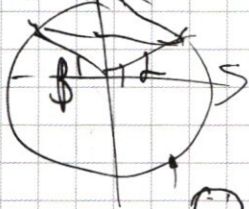
$\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = 90 - \alpha$

по п. sin: $\frac{BC}{\sin \alpha} = 10 \quad \frac{BD}{\sin(90 - \alpha)} = 10 \Rightarrow$

$\frac{BC}{BD} = \tan \alpha \quad \frac{x}{\sqrt{2}a - x} = \tan \alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \frac{11\pi}{44} - \cos \frac{3\pi}{44} - \sin \frac{11\pi}{44} + \sin \frac{3\pi}{44} = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{22} = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{22}$$

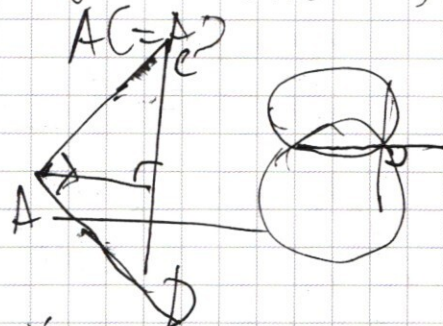


$$\frac{\pi}{4} - 7x = \pi - 4x \quad \pi - 4x + 2\pi \sin \alpha = \sin \beta = \lambda \quad \alpha = \beta + 2\pi n$$

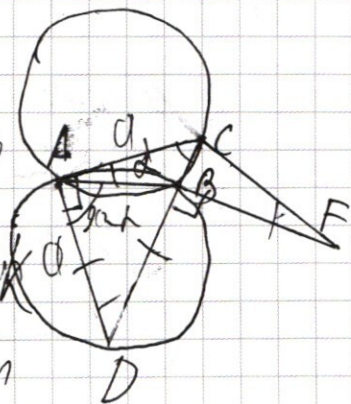
$$3x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\cos \alpha} \quad \frac{CB}{BD} = \tan \alpha$$

$$\frac{AC}{\sin \gamma} = 10 \quad \frac{AD}{\sin(180^\circ - \gamma)} = 10$$



$$\frac{x}{\sqrt{2} - x} = \tan \alpha$$



$$\cos 7x \neq 0 \quad \cos \alpha =$$

$$7x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{4} - 7x = \pi + 4x -$$

$$n \neq 3 + 7m$$

$$n \neq 3 + 4k$$

$$\frac{\pi}{4} - 7x + 2\pi n = -4x + 11x \quad x \neq \frac{\pi}{74} + \frac{\pi}{74}n$$

$$\frac{\pi}{74} + \frac{\pi k}{7} \neq -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \quad | \cdot \frac{28}{\pi}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \cos(\dots)$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$y^{4 \lg 3y} = (3^{\lg 3y})^{2(\lg 3 + 2 \lg y)}$$

$$4 \lg 3y = \lg 3y \cdot \lg 3 + 2(\lg 3 + 4 \lg y)$$

$$4 \lg 3y = \lg 3y$$

$$4(\lg 3 + \lg y) = (\lg 3 + \lg y) \lg 3 + 2 \lg 3 + 4 \lg y$$

$$4 \lg 3 \lg y + 4 \lg^2 y = \lg^2 3 + \lg 3 \lg y + 2 \lg 3 + 4 \lg y$$

$$3 \lg^2 y - \lg 3 \lg y + \lg^2 3 = 0$$

$$D = \lg^2 3 - 12 \lg^2 3 < 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\lg x} = 1 \quad x^{\lg x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$(2^3)^5$$

$$y < 4 \quad y \geq 0$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)y}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg(4-y)y}$$

$$y^{2.5 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$3 \lg(4-y) - 2 \lg y = \lg^2(4-y)$$

$$\lg^2(4-y) - 3 \lg(4-y) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg(4-y) = 2 \lg y$$

$$4-y = y^2 \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$(2^4)^{\lg 2} = 2^{2 \lg 4}$$

$$4-y = y^{\lg y^{y-4}}$$

$$y^{\lg y^{y-4}} = y^{\lg y \cdot \lg(4-y)}$$

$$\lg y \cdot \lg(4-y)$$

$$\lg y$$

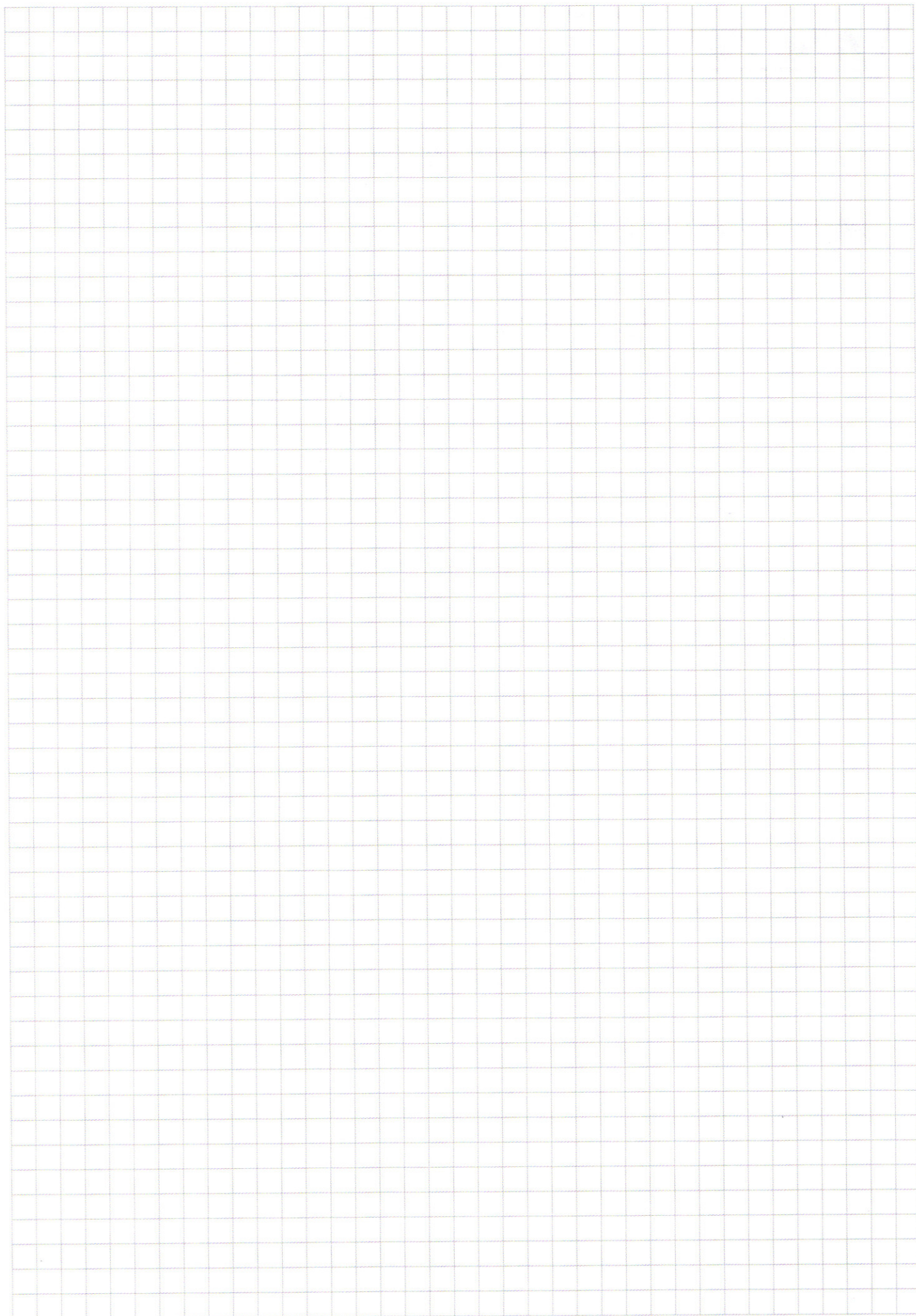
$$4-y = y \quad y = 2$$

$$x = +2$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 \Rightarrow AB^2 = a^2 + BD^2 - 2a \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ AB^2 &= a^2 + BC^2 - 2a \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ BD^2 - BC^2 - \sqrt{2}a \cdot BD + \sqrt{2}a \cdot BC &= 0 \\ (BD - BC)(BD + BC) - \sqrt{2}a(BC - BD) &= 0 \\ BD + BC &= \sqrt{2}a \\ BC &= \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x)$$

$$\cos(11x - 7x + 4x) - \cos(7x - 4x) = -2 \sin 7x \sin 4x \quad 3y(1.9-9)$$

$$\sin(7x + 4x) - \sin(7x - 4x) = \sin 4x \cos 7x$$

$$+ \sqrt{2} \sin 4x (\cos 7x \sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$1 - 3375 \pm 15 \quad 3375 = 15^3 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$\log_5 25 = \frac{\log_{25} 25}{\log_{25} 5} \quad \frac{1.5555333}{2.686} = \frac{8.78528}{2.686}$$

$$8.78528 = 560$$

$$3 \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - (2y + 4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-1)^2$$

$$x = \frac{2y + 4 \pm (4y - 4)}{2} = \begin{cases} 3y \\ -y + 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x \lg x} = y^{2 \lg x y} \quad y^{(5 \lg x - 2 \lg x y)} = x \lg x = y^{\lg y x \lg x}$$

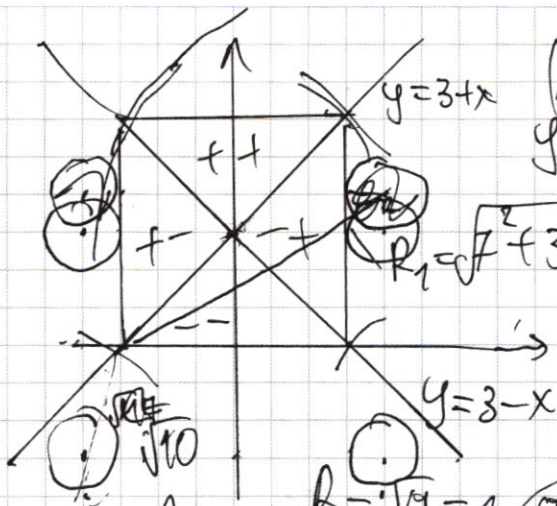
$$5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y = \lg y x \cdot \lg x \quad \lg y x = \frac{\lg x}{\lg y}$$

$$3 \lg x - 2 \lg y = \frac{\lg^2 x}{\lg y}$$

$$\left(\frac{y^5}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \quad \left(\frac{y^5}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{4 \lg 3y}$$

$$y^{4 \lg 3y} = y^{4 \lg 3y} \cdot 3 \lg 3y \quad \lg 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \quad x = 1$$

$$(y^5)^0 = 1 = y^{2 \lg y} \Rightarrow y = 1 \quad \lg y = 0 \quad y = 1$$



~~(A+B) = A+B~~
 $y = 3 - x + y = 3 + x = 6$
 $2y = 12 \quad y = 6$
 $-y + 3 - x - y + 3 - x = 6$
 $y = 0$
 $-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$
 $x = 3$

$R_1 = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
 $(1; 3) \quad R_2 = \sqrt{7^2+7^2} = \sqrt{98} = \sqrt{130}$

$\sin(7x-4x) = \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x$

$3-1=2 \quad 70 + 69 \cdot 2^{64} - 64$
 $3 \quad x = ? \quad y > 2^{64} + 6 \cdot 2^{64}$
 $x = 6 \quad x$
 $x = 7 \quad x = 64 \quad y > 2^{64} + 6 \cdot 2^{64} \quad y \leq 70 + 2^{64} \cdot 2^{64} - 64$
 $x = 70 \quad y = 2^{70} + 6 \cdot 2^{64} \quad 70 + 70 \cdot 2^{64} - 70$

$x = [7; 69] \quad 63 \Rightarrow y = 63 \quad [2^{70} + 6 \cdot 2^{64}; 2^{64}]$
 $y = 64 \cdot 2^{64} + 126 \quad N = (64 \cdot 2^{64} + 126) \cdot 63$

$\cos 8x \cos 3x - \sin 8x \sin 3x = \cos 11x$
 $\cos 3x (\cos 8x - 1 - \sin 8x) - \sin 3x (\sin 8x - 1 + \cos 8x) + \sin 3x$
 $\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) + \sin 3x - \sin 11x$
 $-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$
 $-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$
 $\cos 7x + \sin 7x = 0 \quad \cos 7x + \sin 7x - \sqrt{2} \sin 4x = 0$

$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \sin 4x$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x = \sin 7x$
 $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x = \cos 7x$

$\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right) = \sqrt{2} \sin 4x$
 $\frac{\pi}{4} - 7x = 4x + 2\pi n$
 $11x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n$
 $x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$