МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + \left(2^{64} - 1\right) x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x \cdot \sin 4x$

$\sin 3x - \sin 11x = 2\sin(-4x)\cos 7x = -2\sin 4x \cos 7x$

Тогда

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \cos 14x$

$\cos^2 7x - \sin^2 7x + \sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$(\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) + \sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$

$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x) = 0$

1) $\cos 7x + \sin 7x = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2} - 7x) + \sin 7x = 0$

$2\sin\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4} - 7x) = 0$

$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 0$

$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z}.$

2) $\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

$\sin(\frac{\pi}{2} - 7x) - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

$2\sin(\frac{\pi}{4} - 7x)\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

$\sqrt{2}(\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin 4x) = 0$

$2\sqrt{2}\,\cancel{\$}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0$

$\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$3x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

$\cos\left(\frac{11x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0$

$\frac{11x-\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$11x-\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$11x=\frac{5\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{5\pi}{44}+\frac{2}{11}\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{28}+\frac{\pi}{7}n,\ n\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{5\pi}{44}+\frac{2}{11}\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

№1.

Заметим, что $3375=3^3\cdot5^3$

1) Первый случай: число состоит из трех троек и трех пятерок. Остальные две цифры являются единицами.
Тройки можно расположить C_8^3
Пятерки – C_5^3, т.к 3 тройки уже расставили.
Тогда способов $C_8^3\cdot C_5^3=\frac{8!}{5!3!}\cdot\frac{5!}{3!2!}=$
$=\frac{6\cdot7\cdot8}{6}\cdot\frac{4\cdot5}{2}=56\cdot10=560$

2) Второй случай: число состоит из одной девятки, одной тройки и трех пятерок
Выбрать место для девятки – C_8^1
для тройки – C_7^1
для трех пятерок – C_6^3
Тогда способов: ~~8·7~~ $C_8^1\cdot C_7^1\cdot C_6^3=8\cdot7\cdot20=$
$=1120$
Других способов комплекта цифр нет, т.к каждый разряд может являться только 1, 3, 5, 9

Ответ: $560+1120=1680$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases}$$

1) Прологарифмируем первое уравнение по основанию 10

$$\lg x \cdot \lg\left(\frac{y^5}{x}\right) = 2\lg xy \cdot \lg y \quad (\log_a b^m = m\log_a b)$$

$$\lg x\,(5\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y)\cdot \lg(y)$$

(По св-ву $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
$\log_a(m\cdot n) = \log_a m + \log_a n$)

Пусть $\lg x = t$
$\lg y = z$

$$t(5z-t) = 2(t+z)z$$
$$5tz - t^2 = 2tz + 2z^2$$
$$2z^2 - 3tz + t^2 = 0$$
$$D = 9t^2 - 8t^2 = t^2$$

1. $z = \frac{3t+t}{4}$
$z = t$
$\lg y = \lg x$
$\Downarrow$
$x = y$

2. $z = \frac{3t-t}{4}$
$z = \frac{t}{2}$
$\lg y = \frac{1}{2}\lg x$
$\lg y = \lg x^{\frac{1}{2}}$
$\Downarrow$
$y = x^{\frac{1}{2}}$

1. $x = y$ Подстановка во второе урав.
$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$
$$-5x^2 + 8x = 0$$
$x = 0$ или $x = \frac{8}{5}$

Но из ООЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Значит $x=0$ не подходит

2. $y = x^{\frac{1}{2}}$

$x^2 - 2x\sqrt{x} - 4x - 3x + 12\sqrt{x} = 0 \quad | : \sqrt{x} \neq 0$

$\sqrt{x}^3 - 2\sqrt{x}^2 - 7\sqrt{x} + 12 = 0$

$\sqrt{x} = n \quad , n>0$

$n^3 - 2n^2 - 7n + 12 = 0$

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 2n^2 - 7n + 12 & n-3 \\ \underline{n^3 - 3n^2} \quad\quad\quad\quad & n^2+n-4 \\ n^2 - 7n \quad\quad & \\ \underline{n^2 - 3n} \quad\quad & \\ -4n+12 & \\ \underline{-4n+12} & \\ 0 & \end{array}$$

$(n-3)(n^2+n-4) = 0$

$n = 3$ или $n^2+n-4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$n = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\sqrt{x} = 3$

$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$

$\sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} x = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right); (9; 3); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение.

1) $y-3-x+y-3+x=6$

$y=6$ при $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$

2) $y-3-x-y+3-x=6$

$x=-3$ при $y \geq x+3$, $y < 3-x$

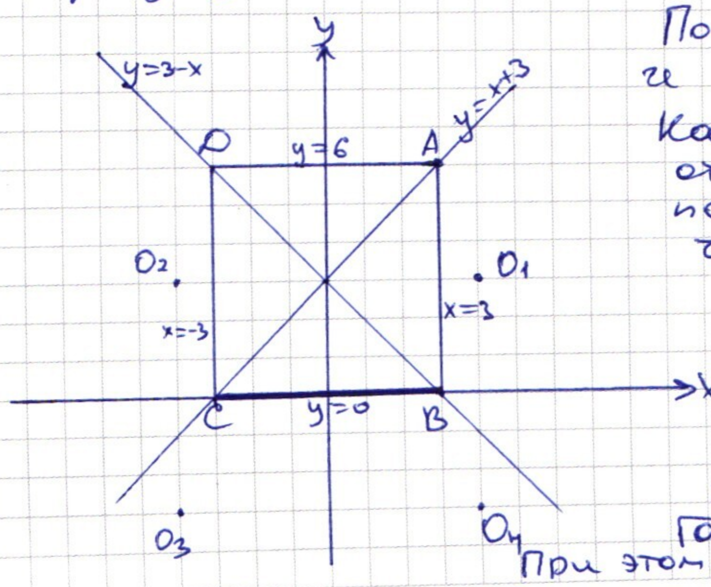
3) $-y+3+x+y-3+x=6$

$x=3$ при $y < x+3$, $y \geq 3-x$

4) $-y+3+x-y+3-x=6$

$y=0$ при $y<x+3$, $y<3-x$

Второе уравнение задает 4 окружности с центрами $(4;3)$; $(-4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;-3)$ с радиусами $\sqrt{a}$



Получили квадрат и 4 окружности. Картинка симметрична относительно OY, поэтому корней чётное число.

1) Нам нужно, чтобы окр с центром O_1 касалась стороны квадрата AB. Это достигается при $\sqrt{a}=1$; $a=1$. При этом a два решения.

2) Дальше, если мы будем увеличивать радиус, то у окр с центром O_1 будет 2 пересечения до тех пор пока $\sqrt{a} \le O_1D = \sqrt{58}$

То есть при $1 < \sqrt{a} \le \sqrt{58}$ окружности с цент. O_1 и O_2 будут пересекать квадрат дважды.

При большем радиусе у этих окр не будет общих точек с квадратом.

В этом случае рассмотрим окружности с центрами O_3 и O_4

В первый раз эти окружности касаются квадрата, когда $\sqrt{a} = O_4B = \sqrt{10}$, но при таком радиусе ~~окр. O_1 и O_2~~ окруж с ц. O_1 и O_2 пересекают квадрат.

Во второй раз окр с ц. в O_3 и O_4 касаются квадрата, когда $\sqrt{a} = O_4D = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$

При $a = 130$ квадрата касаются окр с центр в O_3 и O_4 и квадрат не пересекают окр. с центр. O_1 и O_2.

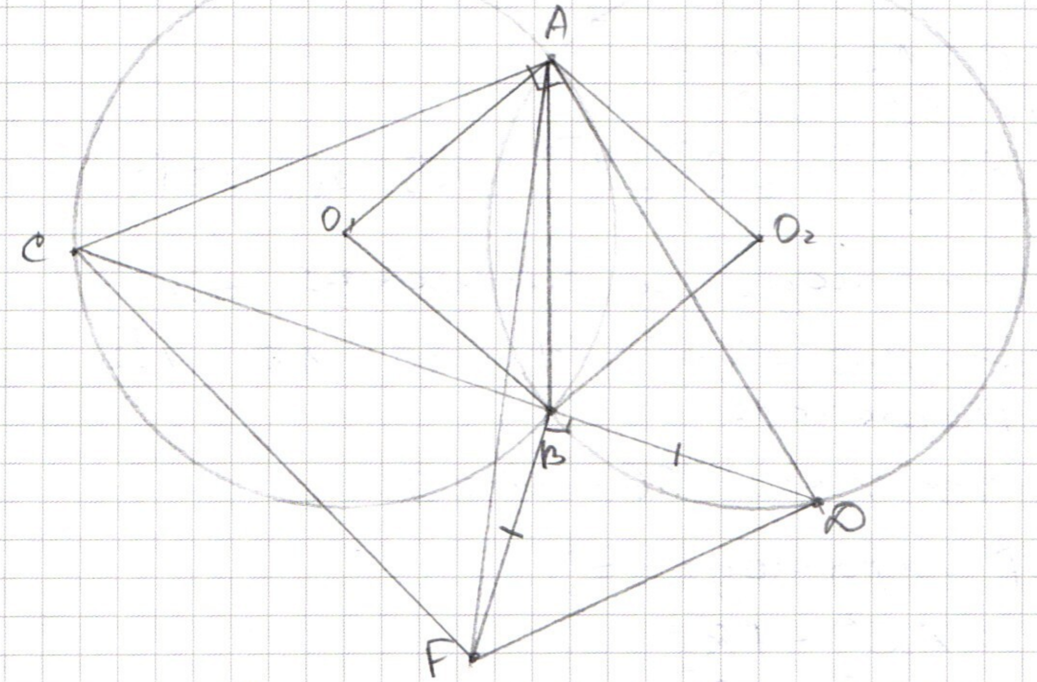
Ответ: $a = 1$; $a = 130$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$R=5$

$CF - ?$



1) В равных окружностях углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны $\Rightarrow$
$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
Тогда $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$, т.к они центральные и опираются на $\cup AB$
Тогда O_1AO_2B - квадрат и $AB = 5\sqrt{2}$
Пусть $\angle CAB = \alpha$
По т. синусов в $\triangle CAB$:
$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin\alpha}$; $BC = 10\sin\alpha$
По т. синусов в $\triangle DAB$: $\left(\angle CAB + \angle DAB = 90^\circ\right)$
$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)}$; $BD = 10\cos\alpha$
$BD = BF$ по усл $\Rightarrow BF = 10\cos\alpha$
По т. Пифагора в $\triangle CBF$
$CF^2 = BC^2 + BF^2 = 100\sin^2\alpha + 100\cos^2\alpha = \cancel{100}\ \cancel{100}\ 100$

$CF = 10$

2) $BC = 6$

Тогда $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 8 = BD$

В $\triangle ACB$ по т. косинусов

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle ACB$.

$50 = AC^2 + 36 - 12AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AC^2 - 6\sqrt{2}AC - 14 = 0$

$D = 72 + 56 = 128$

$AC = \frac{6\sqrt{2} + \sqrt{128}}{2} = \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{8}}{2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} = 7\sqrt{2}$

$\triangle ACD$ прямоуг и равнобедр $\Rightarrow$

$\cancel{CD = BC + BD = 6 + 8 = 14}$ $AC = AD = 7\sqrt{2}$.

~~по т. Пифагора~~

$\cancel{AD^2 = CD^2 - AC^2 = 196 - 98 = 9}$

$\triangle ADF$ - прямоуг. $\Rightarrow$

$AF^2 = AD^2 + FD^2$

$FD = BF \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$AF^2 = 98 + 128 = 226$

$AF = \sqrt{226}$

По формуле Герона найдем S_{ACF}

$P = AF + CF + AC = \sqrt{226} + 10 + 7\sqrt{2}$.

$$S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{226}+10+7\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{226}+10+7\sqrt{2}}{2} - \sqrt{226}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{226}+10+7\sqrt{2}}{2} - 10\right)\left(\frac{\sqrt{226}+10+7\sqrt{2}}{2} - 7\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{226}+10+7\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{10+7\sqrt{2}-\sqrt{226}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{226}+7\sqrt{2}-10}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{226}+10-7\sqrt{2}}{2}\right)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(10+7\sqrt{2})+\sqrt{226}}{2}\cdot\frac{(10+7\sqrt{2})-\sqrt{226}}{2} =$$

$$= \frac{198+140\sqrt{2}-226}{4} = \frac{140\sqrt{2}-28}{4} = 35\sqrt{2}-7.$$

$$\left(\frac{\sqrt{226}+7\sqrt{2}-10}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{226}+10-7\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{226+\cancel{7\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{113}}-\cancel{10\sqrt{226}}+\cancel{10\sqrt{226}}+70\sqrt{2}-100-\cancel{7\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{113}}-49\cdot 2+70\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{126-98+140\sqrt{2}}{4} = \frac{28+140\sqrt{2}}{4} = 35\sqrt{2}+7.$$

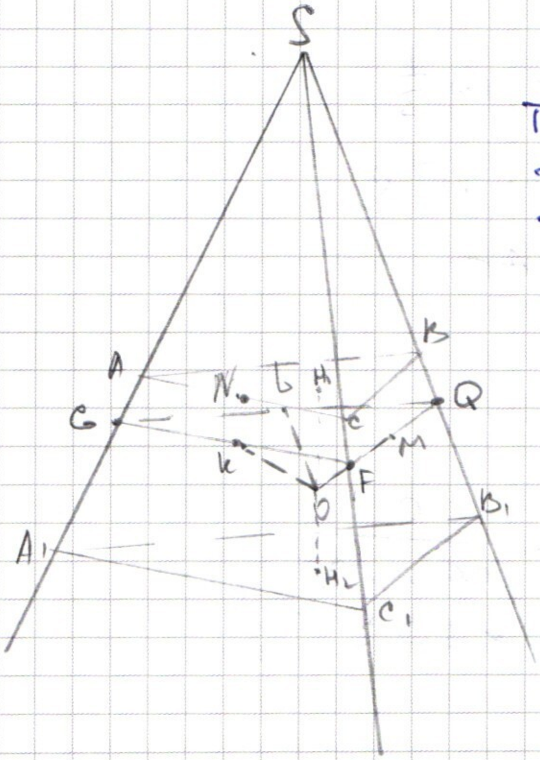
$$S = \sqrt{(35\sqrt{2})^2-49} = \cancel{\sqrt{1186}}\ \sqrt{2450-49} = \sqrt{2401} = 49$$

Ответ: а) 10

б) $\cancel{\sqrt{1186}}$ $\cancel{\sqrt{2201}}$ 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Пусть R – радиус сферы
Т.к сфера касается граней, то $\angle SKO = \angle SLO = \angle SMO = 90°$
Тогда
$SM^2 = SL^2 = Sk^2 = SO^2 - R^2$, т.е
$SM = SL = SM$.
Точка S равноудалена от вершин треугольника KLM.
Аналогично
$OM = Ok = OL = R \Rightarrow$
O равноудалена от вершин $\triangle KLM$
Это означает, что SO лежит на прямой, перпендикулярной (KLM) и проходящей через радиус опис окр $\triangle KLM \Rightarrow$
$SO \perp (KLM)$
Тогда плоскости, касающиеся сферы и перпендикулярные SO, будут параллельны (KLM)
Пусть данные в условии плоскости: (ABC) и $(A_1B_1C_1)$
$S_{ABC} = 1$; $S_{A_1B_1C_1} = 4$
Т.к $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{4} = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$, где k – коэффициент подобия
Тогда $SA = AA_1$; $SC = CC_1$; $SB = BB_1$
Пусть H_1 и H_2 – центры опис окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. $H_1, H_2 \in SO$, т.к на прямой SO все точки равноудалены от вершин треугольников

Рассмотрим $\triangle SH_1C$ и $\triangle SH_2C_1$. Они подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$, т.к $SC = CC_1$, $CH_1 \parallel C_1H_2$ и $SH_1 \parallel SH_2$

Тогда $SH_1 = H_1H_2 = 2R$

Тогда $SO = 3R$

$\sin \cancel{tg} \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \cancel{\operatorname{arctg} \frac{1}{3}} \; \arcsin \frac{1}{3}$

$SK^2 = 9R^2 - R^2 = 8R^2$; $SK = 2\sqrt{2}R$

~~Пусть N - середина AC~~

Пусть $N = SK \cap AC$

$\triangle SNH_1$ - прям оуг.

$SH_1 = 2R$

$\cos \angle KSO = \frac{2R}{SN}$; $SN = \frac{2R}{\cos \angle KSO}$

$\sin \angle KSO = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \angle KSO = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$SN = \frac{2R \cdot 3}{2\sqrt{2}} = \frac{R \cdot 3}{\sqrt{2}}$.

$SK = 2\sqrt{2}R$

$\frac{SN}{SK} = \frac{3R}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}R} = \frac{3}{4}$ (подобны соответств элементы $\triangle ABC$ и $\triangle FGQ$)

Тогда

$\frac{S_{ABC}}{S_{FGQ}} = \frac{9}{16} = \frac{1}{S_{FGQ}} \Rightarrow S_{FGQ} = \frac{16}{9}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

$S_{FGQ} = \frac{16}{9}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

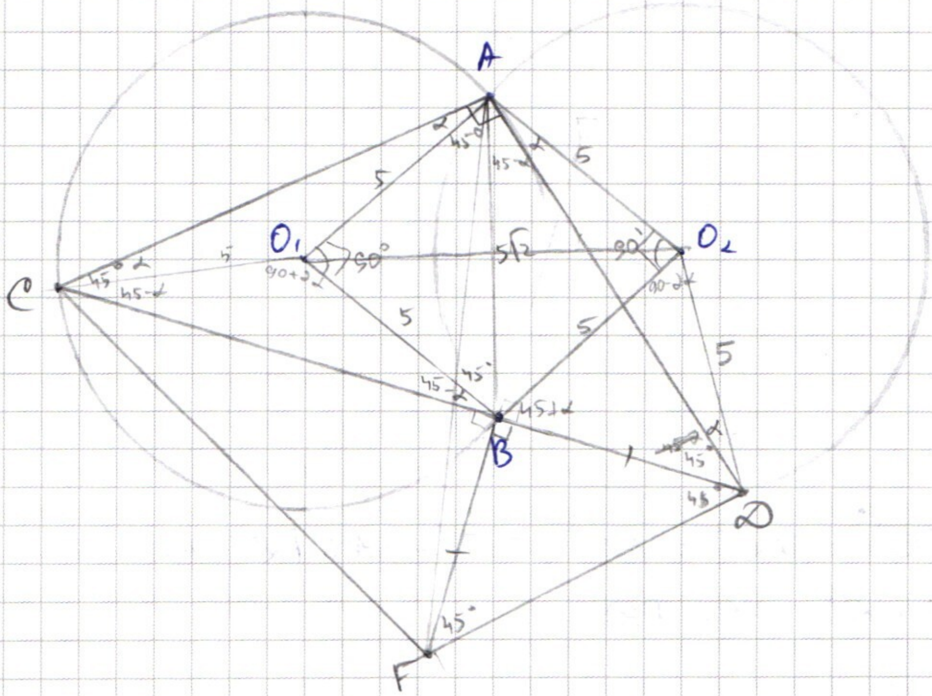
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

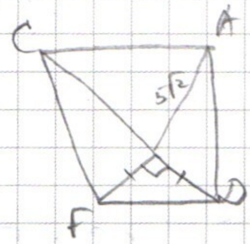
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

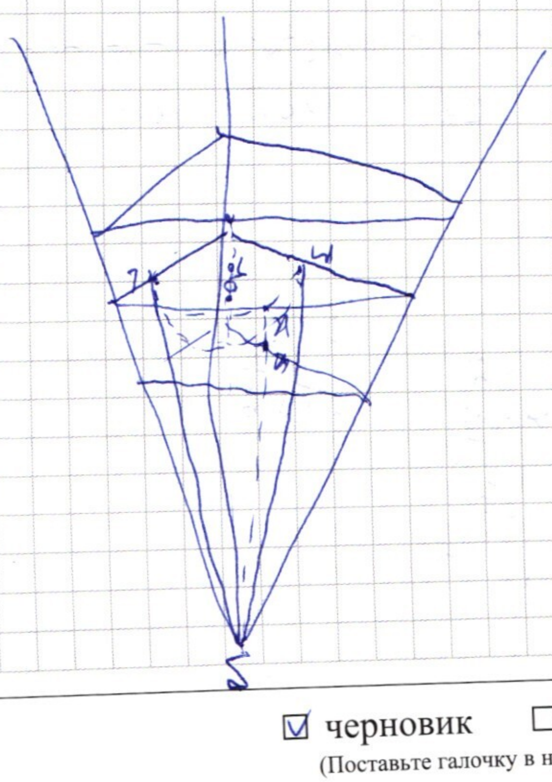
$R = 5$

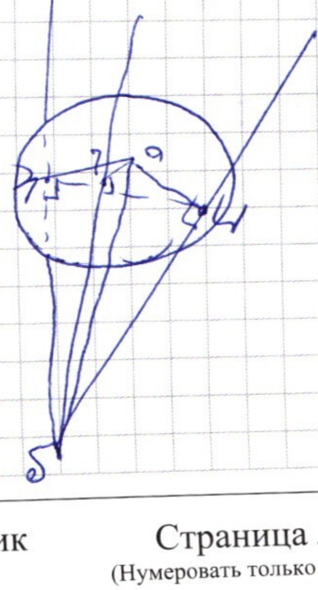
$BF = BD$

$AC \parallel FD$



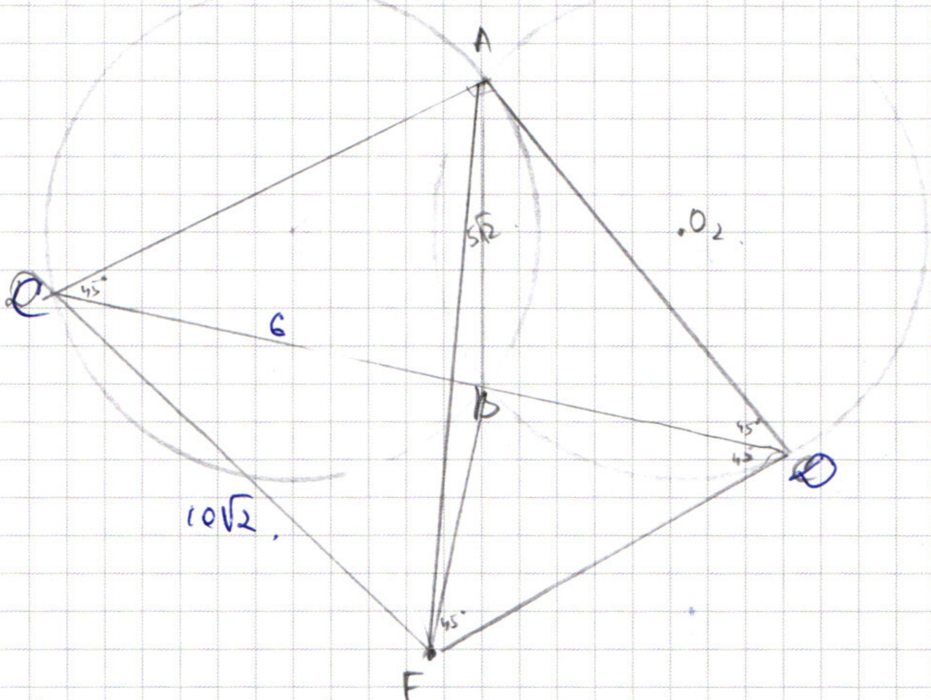






$\begin{array}{r|l} 1186 & 2 \\ 593 & \end{array}$

593



$CF^2 = (AC - FD)^2 + AD^2 = AC^2 + FD^2 - 2AC \cdot FD + AD^2 =$
$= CD^2 + FD^2 - 2AC \cdot FD.$

$2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{CB}{\sin\angle CAB}$ $\quad$ $CB = 10 \sin\angle CAB$

$= \frac{BD}{\cos\angle CAB}$ $\quad$ $BD = 10\cos\angle CAB. = BF$

$100\cos^2\alpha + 100\sin^2\alpha = 200$

$CF = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$

$200 - 36 = 164$

$BF = \sqrt{164}. = BD$

$2^3 + 3 \cdot 2^{65} = 2^3(1 + 3 \cdot 2^{62})$

$3^{\cancel{36}}\ 3 \cdot 2^{64} + 67$

$3\ 8 + 3 \cdot 2^{64} \cdot 2$

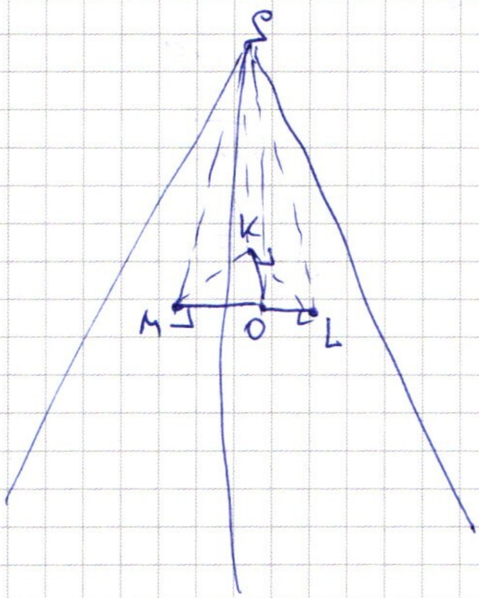
$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 185 \\ +105 \\ \hline 1235 \end{array}$

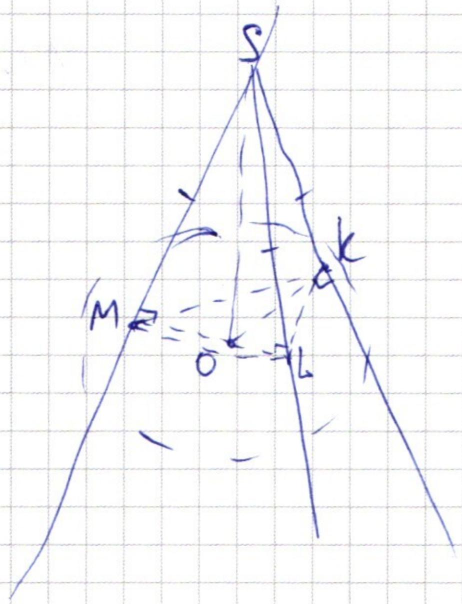
$\begin{array}{r} 1235 \\ - 49 \\ \hline 1186 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

y

$y - 3 - \cancel{x} + y - 3 + \cancel{x} = 6$

$y = 6$ при $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$

$\cancel{y} - \cancel{3} - x - \cancel{y} + 3 - x = 6$

$x = -3$ при $y \geq x+3$, $y < 3-x$

$-\cancel{y} + 3 + x + \cancel{y} - \cancel{3} + x = 6$

$x = 3$ при $y < x+3$, $y \geq 3-x$

$-y + 3 + x - y + 3 - \cancel{x} = 6$

$y = 0$ при $y < x+3$, $y < 3-x$

$128 \,|\, 16$

$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$y \le 70 + (2^{64} - 1)x.$

$$\begin{array}{r} \times\ 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ +105\ \ \\ \hline 1225 \end{array}$$

2250

2450

$$\begin{array}{r} \times\ 49 \\ 49 \\ \hline 441 \\ +196\ \ \\ \hline 2401 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

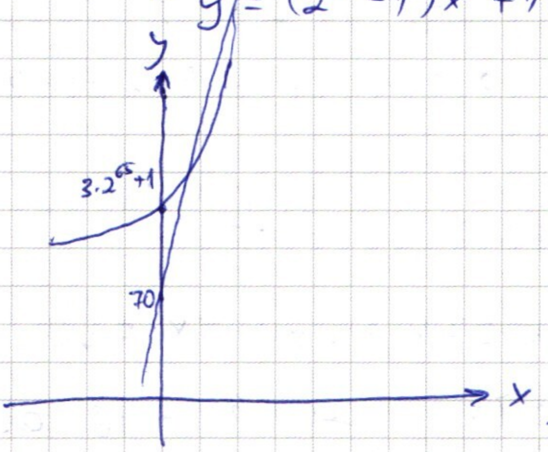
$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y = (2^{64}-1)x + 70 \end{cases}$$

$y - 3\cdot 2^{65} = 2^x$

$x = \log_2 (y - 3\cdot 2^{65})_2$

$= \dfrac{y-70}{2^{64}-1}$



$2^{\frac{y-70}{2^{64}-1}} = y - 3\cdot 2^{65}$.

$f_1(x)' = \cancel{2^x} \; \cancel{\frac{1}{x\cdot \ln 2}} \; x \cdot \ln 2 = 2^{64} - 1$.

$x_0 = \dfrac{2^{64}-1}{\ln 2}$

$y =$

$y =$

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x.$

$\cancel{2s}$

$-2\sin 4x \cdot \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x.$

$\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$2\cos^2 7x - 1 + \sqrt{2}\sin 4x \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x \cos 7x = 0.$

$D = 2\sin^2 4x - 4(\sqrt{2}\sin 4x \sin 7x - 1)$

$2\sin^2 4x - 4\sqrt{2}\sin 4x \sin 7x + 4$

$\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\cos 7x = \frac{-\sqrt{2}\sin 4x + \sqrt{D}}{4}$

$4\cos 7x + 2\sin 4x = \sqrt{D}$

$16\cos^2 7x + 4\sin^2 4x + 16\cos 7x \sin 4x = 2\sin^2 4x - 4\sqrt{2}\sin 4x \cdot$
$\cdot \sin 7x + 4 \cancel{\sin}$

$\cos 11x + \sin 3x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - 11x) + \sin 3x = 2\sin(\frac{\pi}{4} - 4x)\cos(\frac{\pi}{4} - 7x)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x.$

$(\cos 4x - \sin 4x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\sin 11x + \cos 3x$

$\sin 11x + \sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = 2\sin(\frac{\pi}{4} + 4x)\cos(7x - \frac{\pi}{4})$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x.$

$(\cos 4x + \sin 4x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\cos 14x + \sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0.$

~~2cos~~

$\cos^2 7x - \sin^2 7x + \sqrt{2}\sin 4x \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x \cos 7x$

$\cos 7x(\cos 7x + \sqrt{2}\sin 7x) +$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 5 \\ 75 & 5 \\ \cancel{2}15 & 5 \\ 3 & 3 \end{array}$$

3 3 3 5 5 5

- - - - - - - -

1) 3 3 3 5 5 5 1 1.

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{6\cdot7\cdot8}{6} \cdot \frac{4\cdot5}{2} = 56\cdot10 = \cancel{56}\ 560$$

2) 9 3 5 5 5 1 1 1

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 = 8\cdot 7 \cdot \frac{4\cdot5\cdot6}{\cancel{2\cdot3}} = 20\cdot56 = 1120$$

~~3) 3 3 3 9~~

№2

1680

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$-2\sin 7x \sin 4x + (\sin 3x - \sin 11x)$$

$$-2\sin 7x \sin 4x + -2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x.$$

$$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 7x)$$

$$\sin 7x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-2\sqrt{2}\sin 4x \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 14x$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$-1\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) + \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \sin(11x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)$$

$$\sin 3x - \cos 3x = \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(2\sin(-4x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\right)$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

$-2\sin 4x \cos(7x-\frac{\pi}{4}) = \cos 14x$

$\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = 2\cos^2 7x - 1$

$2\cos^2 7x - 1 + \sqrt{2}\sin 4x \cos 7x - \sqrt{2}\sin 4x \sin 7x = 0.$

$D = 2\sin^2 4x - 4 \cdot 2(-\sqrt{2}\sin 4x \sin 7x - 1)$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$3\sin x - 4\sin^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x.$

$3(\sin x + \cos x) - 4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

$(\sin x + \cos x)(4\sin x \cos x - 1)$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$\lg x(5\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y)\lg y.$

$\lg x = a$

$\lg y = b.$

$a(5b - a) = 2(a+b)b.$

$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$

$2b^2 - 3ab + a^2 = 0.$

$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$

$b = \frac{3a + a}{4} = a \qquad b = \frac{3a - a}{4} = \frac{a}{2}.$

$\lg y = \lg x \qquad\qquad \lg y = \frac{1}{2}\lg x = \lg x^{\frac{1}{2}}.$

$x = y$

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$-5x^2 + 8x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8

(Нумеровать только чистовики)