

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

23.11

Представим 64827 в виде произведения простых чисел:

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 64827 \div 3 \\ \underline{63} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

$$7203 : 3 = 2401$$

$$\begin{array}{r} 2401 \div 7 \\ \underline{21} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$343 = 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Поэтому восьмизначное число можно записать, используя или одну или две единицы.

1) Число состоит только из 3, 7, 1.

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4 \cdot 1^1$$

□ □ □ □ □ □ □ □

1 можно поместить в 8 из 8-и способов.

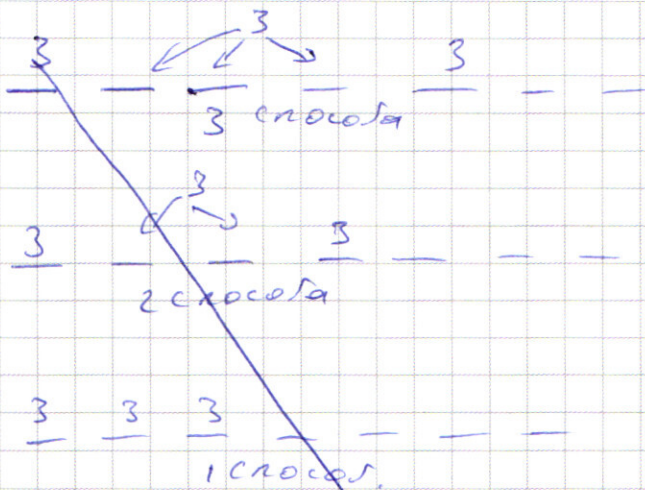
3 тройки в оставшиеся 7 ячеек: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

$\begin{array}{c} 3 \quad 3 \quad 3 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{3} \end{array}$ ① Пусть тройки стоят по краям, тогда оставшиеся ставятся 5 способами.

Связывая тройку на последнем месте, получаем еще 4 + 3 + 2 + 1 способа

$\begin{array}{c} 3 \quad 3 \quad 3 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \underline{3} \quad \underline{3} \quad \underline{3} \end{array}$ 4 способа

↓ см. ранее



Аналогично, сдвигаем левую тройку, и оставляем правую с края, не перебивая, получаем еще $4+3+2+1$ способ.

Итого ~~еще~~ поставить тройки можно:

$$5 + 2(4+3+2+1) = 25 \text{ способами.}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ + 10 \\ \hline 17 \end{array}$$

Остальные 4 семерки занимают 4 места ~~без вариантов~~
 Итого для I варианта: $210 \cdot 8 = 1680$
 ~~$8 \cdot 25 = 200$ способов для I варианта~~

(2) число состоит из 3, 8, 1, 7:

$$64877 = 3! \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7^4 \cdot 1 \cdot 1$$

Тогда единицы ставятся 8·7 способами: 56.

Одна девятка ставится 6 способами

Одна тройка 3

Остальные семерки ставятся без вариантов.

$$7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 = 280 \cdot 6 = 1680$$

↓
см. далее

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21 (продолжение)

единица ставится восьмью способами

3 тройки ставят 6 ~~всех~~ оставшиеся 7 ячеек:

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

Остальные 4 семерки расставляют без способов.

$$35 \cdot 8 = 280$$

2) число состоит из 3; 8; 7; 2; 7; 7; 1; 1.

~~Границы рас~~

3 расставляется 8ю способами, все число способами

двойки ставятся $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ способами (на 6 мест)

Остальные, семерки расставляют без вариантов.

$$15 \cdot 8 = 120$$

3) итого $280 + 120 = 400$ способов.

ответ: 400

23

$$\begin{cases} \int \left(-\frac{x^2}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2) & (1) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \left(-\frac{x^2}{y} \right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$\begin{cases} -y > 0 \rightarrow y < 0 \\ xy^2 > 0 \rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$$\ln \left(\frac{-x^7}{y} \right) \ln(-y) = \ln x^2 \ln(xy^2)$$

$$\ln(-y) \cdot \ln \left(\frac{x^7}{-y} \right) = 2 \ln(xy^2) \ln x$$

решение (1; 1) не является (2)

$$\frac{\ln \frac{x^7}{-y}}{\ln x} = 2 \frac{\ln(xy^2)}{\ln(-y)}$$

$$\log_x \frac{x^7}{-y} = 2 \log_{(-y)} (xy^2)$$

$$\log_x x^7 - \log_x(-y) = 2 \log_{(-y)} x + 2 \log_{(-y)} y^2$$

$$7 - \log_x(-y) = 2 \log_{-y} x + 4$$

$$2 \log_{-y} x + \log_x(-y) = 3$$

$$\log_{-y} x = t, t \neq 0, x \neq 1 \text{ и } y \neq 1$$

$$2t + \frac{1}{t} = 3 \quad \log_x(-y) = t, t \neq 0$$

$$\frac{2}{t} + t = 3$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1 \text{ или } t = 2$$

$$\log_x(-y) = 1$$

$$-y = x$$

$$y = -x$$

$$\log_x(-y) = 2$$

$$-y = x^2$$

$$y = -x^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) y^2 + 2xy - 3x^2 + 8x + 4y = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$-4x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$x \neq 0$$

$$4x - 8 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$x \neq 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \quad | \quad x - 3 \\ \underline{-(x^3 - 3x^2)} \\ x^2 - 7x \\ \underline{-(x^2 - 3x)} \\ -4x + 12 \\ \underline{-(-4x + 12)} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \quad \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не ур. } x > 0$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \quad y = -x^2 = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{-4}$$

$$y = \frac{\sqrt{17} - 5}{2}$$

$$\text{Ответ: } (2; -2); (3; -5); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{\sqrt{17} - 5}{2} \right)$$

25

$$|x + y + 8| + |x - y + 8| = 16 \quad (1)$$

$$(1x1 - 8)^2 + (1y1 - 15)^2 = 9 \quad (2)$$

нарисуем (1) на координатной плоскости (стр 7)

$$(1) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} x+y+8 \geq 0 & y \geq -x-8 \\ x-y+8 \geq 0 & y \leq x+8 \\ x+y+8 + x-y+8 = 16 \\ 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

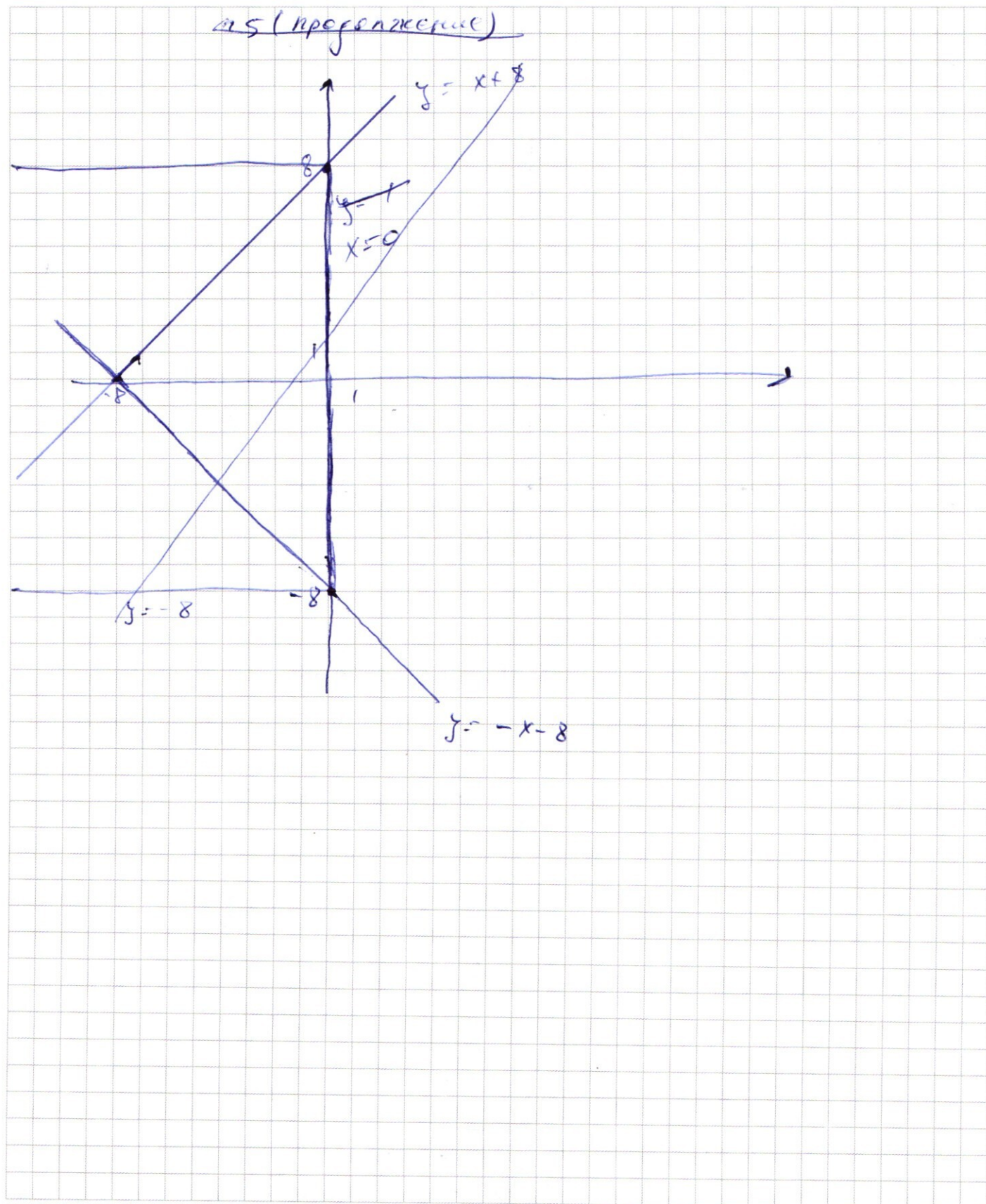
$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \begin{cases} x+y+8 < 0 & x < -x-8 \\ \cancel{x-y+8 < 0} \\ x-y+8 \geq 0 & x \leq x+8 \\ -x-y-8 + x-y+8 = 16 \\ y = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

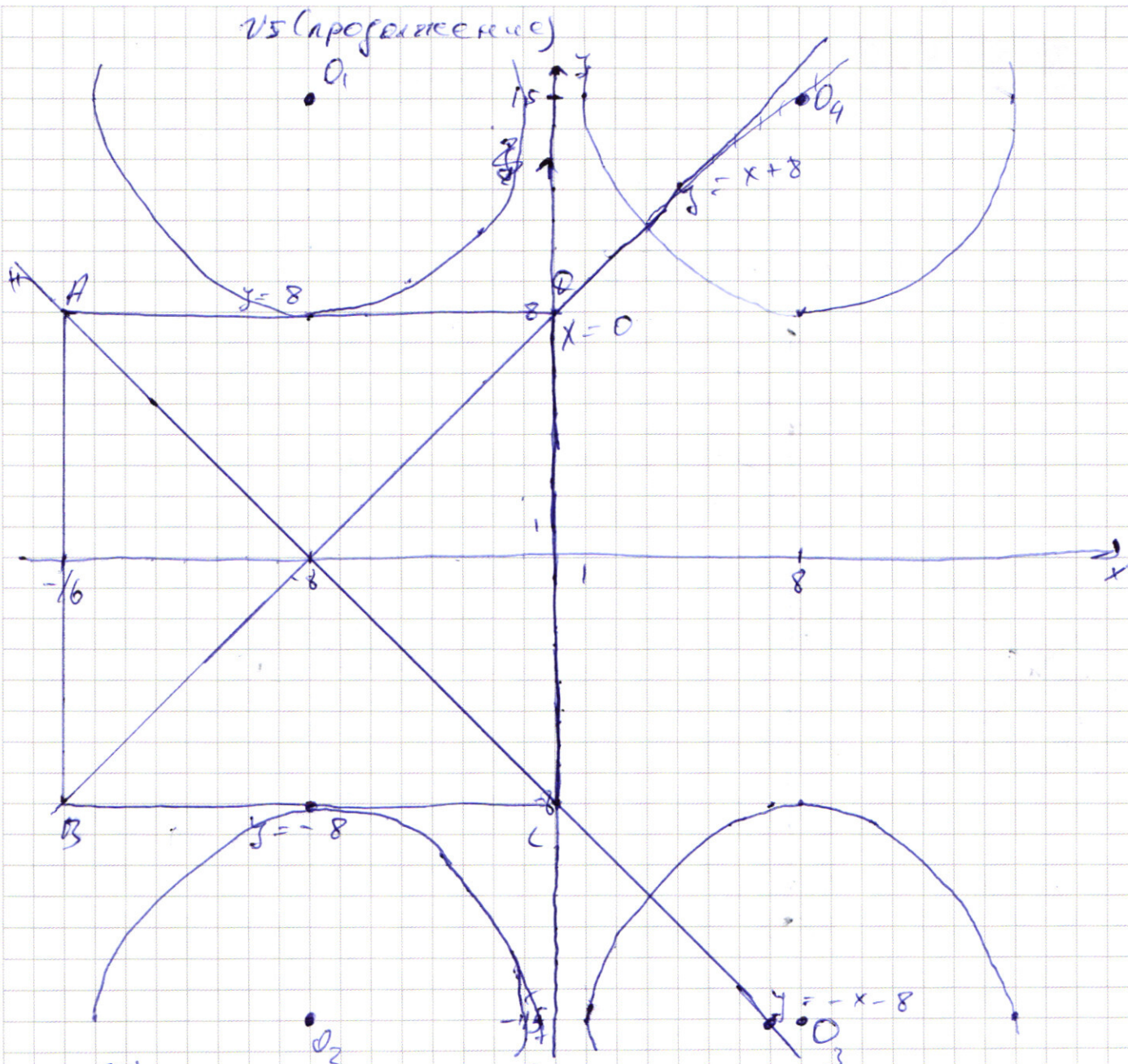
$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \begin{cases} x+y+8 \geq 0 & y \geq -x-8 \\ x-y+8 < 0 & y > x+8 \\ x+y+8 - x+y-8 = 16 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & \begin{cases} x+y+8 \leq 0 & y \leq -x-8 \\ \cancel{x-y+8 > 0} \\ x-y+8 \leq 0 & y \geq x+8 \\ -x-y-8 - x+y-8 = 16 \\ x = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. (1) - квадрат ABCD.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





(2) $(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a$ — 4 окружности радиуса $R = \sqrt{a}$ с центрами $(\pm 8, \pm 15)$

т.е.

Тогда 2 решения будут, когда I и II окружности касаются квадрата: $\sqrt{a} = 7$ (IV и III окр. не пересекают квадрат)
 $a = 49$ ответ: $a = 49$

А также, если окружности III и IV проходят через точки A(16; 8) и B(-16; -8) соответственно, ведь тогда I и II не пересекают квадрат (видно из рис.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos \frac{5x+2x+\frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{5x-2x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \text{ или } \cos \frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

27

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 53 + 3 \cdot 13^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + \sin 7x + \sin(-3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot 2 \cos \frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 5x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \left(\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x + \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

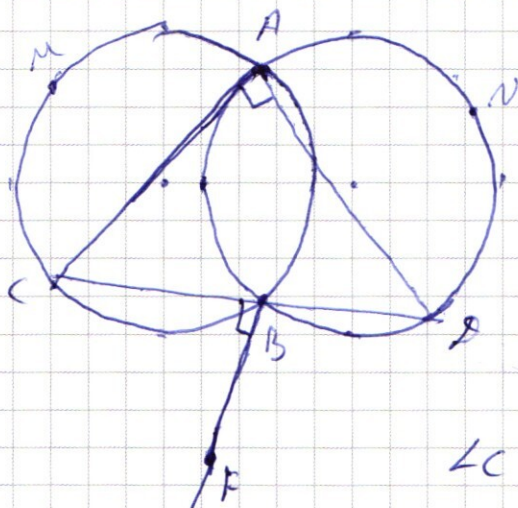
$$\downarrow \text{см. ранее}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3(3^{27} - 1)x - x, \text{ при которых}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x \quad \text{г существует}$$

2	6
---	---



$B \in CD$

$$\angle CAD = 50^\circ$$

$$R = 12$$

CF = ?

$$\angle C = \widehat{ANM}$$

$$LC = \frac{1}{2} \left(\cancel{A^T A} - AB \right)$$

$$\angle D = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AMC} - \overset{\frown}{AB})$$

малые $f_{\text{из}}$ $\sim$ ΔB разн. окружностей равны

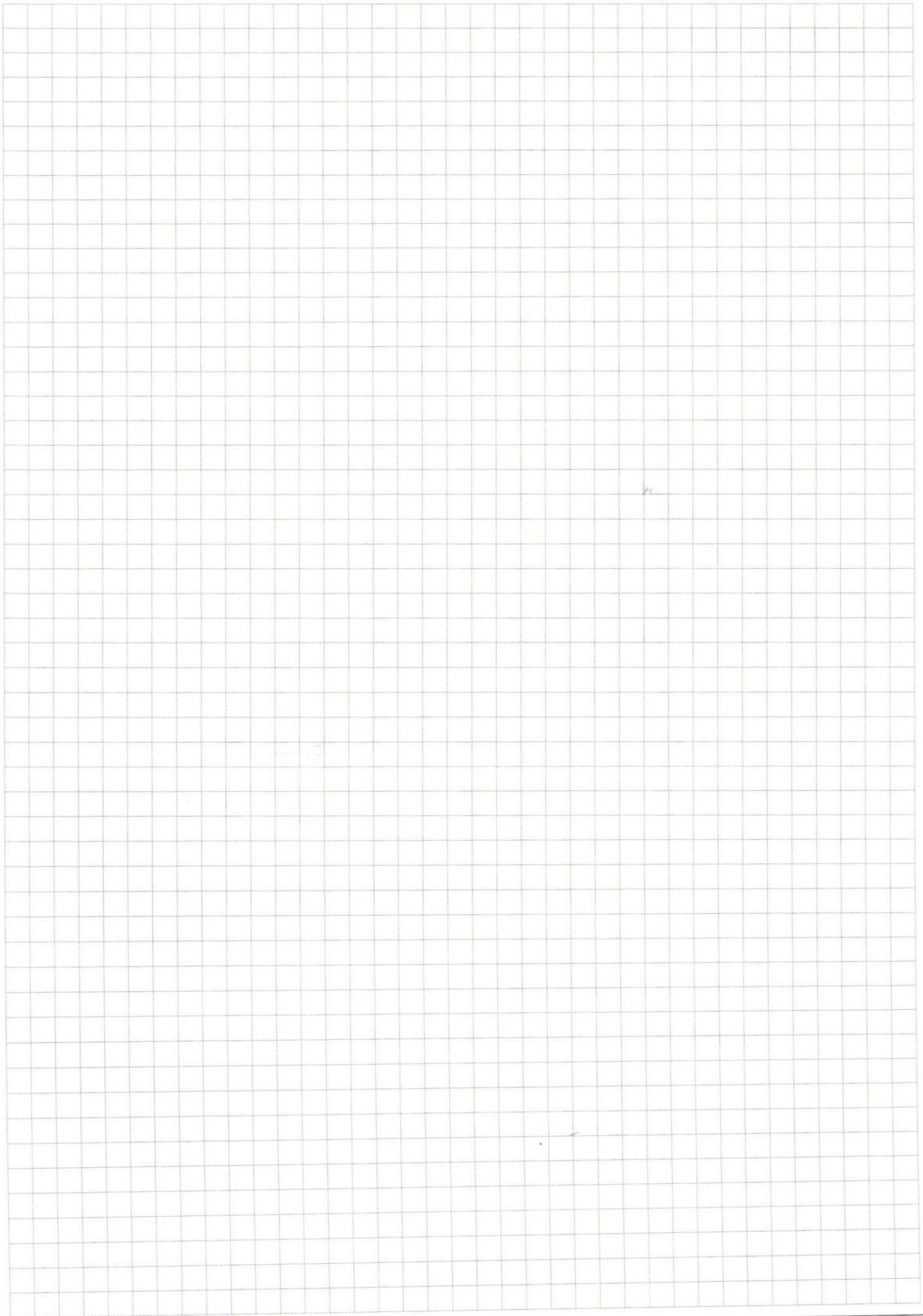
ΔACD - прямоугольный.

$$\angle C + \angle D = 180^\circ \text{ or } 90^\circ$$

~~$2(2c) + 2(\angle C + \angle D) = 180^\circ$~~

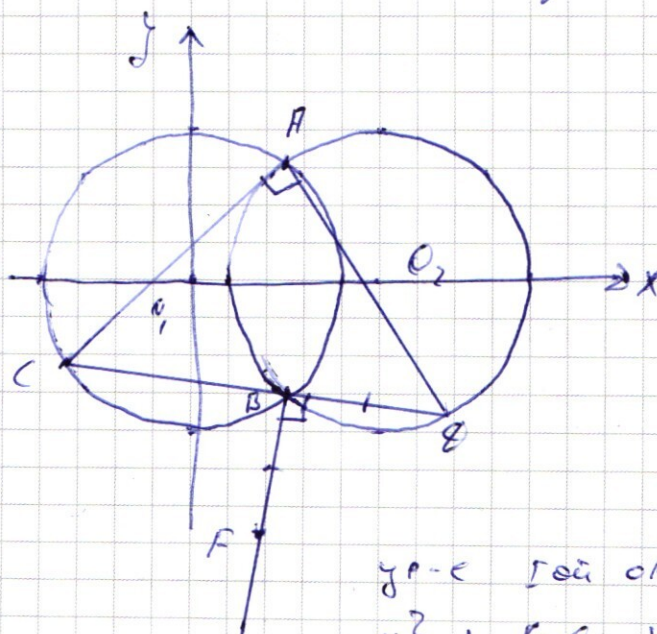
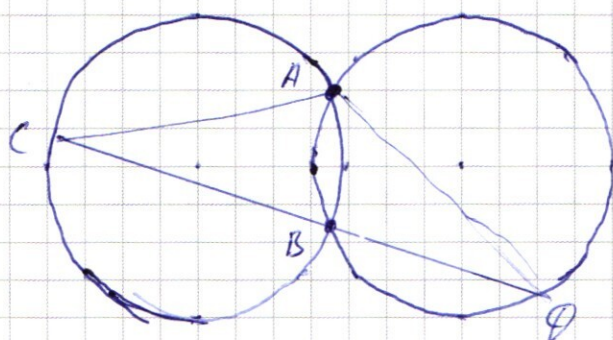
~~$A \cup M \neq A \cup B$~~

$$\overset{\frown}{\angle ACD} - \overset{\frown}{\angle ACB} + \overset{\frown}{\angle AMC} - \overset{\frown}{\angle ABC} = 180^\circ$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

26



$$R = 17$$

$$BE \perp CD$$

$$\angle CAD = 80^\circ$$

$$BF = BD$$

1) Введем координаты
касатель.

$$O_1(0;0) \quad O_2(26;0)$$

$$O_1O_2 = 26$$

тогда нуль коо

тогда проекции A и B
на OX лежат на
сегменте O1O2.

$$A(6; a) \quad B(6; -a)$$

$$\text{ура-е 1ой окружности: } x^2 + y^2 = 289$$

$$x^2 + (26 - y)^2 = 289$$

$$\text{ура-е 2ой окружности: } (26 - x)^2 + y^2 = 289.$$

найдем координаты A ∈ I и II окружности. A(6; a)

$$6^2 + a^2 = 289$$

$$a = \pm \sqrt{289 - 6^2}$$

$$A(6; \sqrt{289 - 6^2}) \quad B(6; -\sqrt{289 - 6^2})$$

2) пусть $C(m, n)$, а ур-е прямой CB :

$$ax + by + c = 0, \quad y = kx + z$$

при этом $D(d, l) \in CB$, и $D \in \text{окружности}$,

$C \in \text{окружности}$.

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 285 & - \text{окр.} \\ (2b - d)^2 + l^2 = 285 & - \text{окр.} \\ n = km + z & - C \in CB \\ -\sqrt{285 - b^2} = kb + z & - B \in CB \\ l = kd + z & - D \in CB \end{cases} \quad \sin x = +\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

22.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x + \sin 7x + \sin(-3x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cdot \cos 2x$$

$$2\cos 5x + 2\sin 2x$$

$$2\cos 5x \cdot \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x (\cos 2x + \cos(2x - \frac{\pi}{2}))$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x \cdot 2\cos \frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \cdot \cos \frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x \cdot 2\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\cos 5x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} =$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) = 0$$

$$\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2\sqrt{2} \cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

~~$$2 \cos 4x \sin 4x$$~~

~~$$2(\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$~~

$$2 \cos 5x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x\right) + \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\text{tg } 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \cos 2x + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + 2 \cos \frac{2x + 2x - \frac{3\pi}{2}}{2} \cdot \cos \frac{2x - 2x + \frac{3\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + 2 \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos 5x = \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

~~$$\cos 5x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$$~~

~~$$\cos 5x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$~~

$$\cos 5x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4} - \pi\right)$$

$$\cos 5x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \cos \frac{5x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{5x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а₁ а₂ а₃ а₄ а₅ а₆ а₇ а₈

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 64827 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} \overline{64827} \mid 5 \\ \underline{-63} \\ 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{64827} \mid 5 \\ \underline{-63} \\ 18 \\ \underline{-18} \\ 0 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} \overline{7203} \mid 3 \\ \underline{-6} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{7203} \mid 3 \\ \underline{-6} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{7203} \mid 3 \\ \underline{-6} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

1) рассмотрим вариант числа, состоящего только из 3, 7 и 1. $64827 = 3^3 \cdot 7^4$

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

34

$$64827 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1$$

□ □ □ □ □ □ □ □

8! ескажу в любое из 8 мест: 8.

3 тройки по 7 мест: 25.

□ □ □ □ и тогда остальные 4 семёрки занимают оставшиеся 4 места.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad \begin{matrix} 35 \\ 47 \end{matrix}$$

$$\cos(4x+3x) + \sin(4x+3x) + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \sin 4x \cos 3x - \cos 4x \sin 3x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 3x (\cos 4x + \sin 4x) - \sin 3x (\sin 3x + \cos 4x) + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos 4x + \sin 4x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 4x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 4x \right) = \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 3x + \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin 3x (\sin 3x + \cos 4x)$$

$$\begin{matrix} 12+6+5 \\ 8+5+4+3+2+1 \end{matrix} = 15$$

$$25.8 = 200$$

21 (продолжение)

$$\begin{matrix} 35 \\ 7 \\ \hline 245 \end{matrix}$$

$$2) 6827 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

5. Тогда ерники занимают 2 места 8.7 = 56 способами, ерниковая 8-й ряд занимает ^{и то 60 способами} ~~оставшиеся~~

6.5 ер. гевия 510.

и семёрки занимают оставшиеся:

$$56 \cdot 6.5 = 56 \cdot 30 = 1630$$

$$\begin{matrix} 156 \\ \times 30 \\ \hline 1680 \end{matrix}$$

$$\text{итого: } 1630 + 200 = 1830$$

Олет: 1830.

$$\begin{matrix} 28 \\ \times 6 \\ \hline \end{matrix}$$

$$7665$$

$$8.7.6.5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 — — — 3 3

$$5 + (4 + 3 + 2 + 1) \cdot 2$$

3 — — — 3 3

3 — — — 3 3

3 — — — 3 3

3 3 — — — 3

3 — — — 3 ~~3~~

тройка не на последнем месте

3 — — — 3

3 — — — 3

3 — — — 3

Теперь аналогично, но если 3 не перебивать

тройку, стоящую на первом месте еще $4 + 3 + 2 + 1$ вариантов

$$5 + (4 + 3 + 2 + 1) \cdot 2 = 25$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 1020} \end{array}$$

2 3

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2 - 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y > 0 \\ xy^2 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x^2)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} &= x^{2\ln x} + x^{2\ln y^2} \\ \frac{(x^2)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} &= \ln x^{2\ln(xy^2)} \\ \ln(-y) \ln\left(-\frac{x^2}{y}\right) &= 2\ln(xy^2) \ln x \\ \frac{\ln\left(-\frac{x^2}{y}\right)}{\ln x} &= 2 \frac{\ln(xy^2)}{\ln(-y)} \end{aligned}$$

$$\log_x\left(-\frac{x^2}{y}\right) = 2 \log_{-y}(xy^2)$$

$$\log_x x^2 - \log_x(-y) = 2 \log_{-y} x + 2 \log_{-y} y^2$$

$$2 - \log_x(-y) = 2 \log_{-y} x + 4$$

$$3 = 2 \log_{-y} x + \log_x(-y)$$

$$\log_x(-y) = t, t \neq 0$$

$$3 = \frac{2}{t} + t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3t = 2 + t^2$$

≈ 3 (проверка)

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1 \quad \text{или} \quad t = 2$$

$$\log_x(-y) = 1$$

$$\log_x(-y) = 2$$

$$\begin{cases} -y = x; y = -x \quad \text{или} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = x^2; y = -x^2 \end{cases}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$-4x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 12 - 4x = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$8 - 2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 12 = 0$$

$$27 - 2 \cdot 9 - 21 + 12 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ x^2 - 7x + 12 \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -4x + 12 \\ \underline{-4x + 12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ x^2 - 7x + 12 \\ \underline{x^2 + x - 4} \\ -8x + 16 \\ \underline{-8x + 16} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, x > 0$$

$$x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \quad y = -\frac{13 + 1 - 2\sqrt{13}}{4}$$

$$y = -\frac{14-2\sqrt{13}}{4} = -\frac{7-\sqrt{13}}{2}$$

other: $(2; -2)$

$(3; -5)$

$\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}, \frac{\sqrt{13}-7}{2}\right)$

2.5

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = 9 \end{cases}$$

нарисуем (1) на координатной плоскости.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} x+y+8 \geq 0 & y \geq -x-8 \\ x-y+8 \geq 0 & y \leq x+8 \end{cases} \\ & \begin{cases} x+y+8 + x-y+8 = 16 \\ 2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad & \begin{cases} x+y+8 < 0 & y < -x-8 \\ x-y+8 \leq 0 & y \geq x+8 \end{cases} \\ & \begin{cases} -x-y-8 - x+y-8 = 16 \\ -2x = 32 \\ x = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \begin{cases} x+y+8 \leq 0 & y \leq -x-8 \\ x-y+8 \geq 0 & y \leq x+8 \end{cases} \\ & \begin{cases} -x-y-8 + x-y+8 = 16 \\ -2y = 16 \\ y = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \begin{cases} x+y+8 \geq 0 & y \leq -x-8 & y \geq -x-8 \\ x-y+8 \leq 0 & y \geq x+8 & y \leq x+8 \end{cases} \\ & \begin{cases} x+y+8 - x+y-8 = 16 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

т.е. (1) - квадрат.