

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

1) т.к. в произведении есть множитель "7" то в числе будет 4 цифры 7 (т.к. $7^2 = 49 > 9$ уже не цифра)

2) 2 варианта: ① 3 цифры 3, 4 ^{четыре} цифры 7 и одна оставшаяся цифра 1

② 4 цифры 7, одна цифра 3, одна цифра 9 и две оставшиеся цифры 1

больше нет вариантов, т.к. из трёх цифр можно сделать либо три цифры 3, либо цифру 3 и цифру 9

3) всего количество перестановок для n различных n -тов: $n!$

но т.к. у нас есть повторяющиеся n -ты, надо разделить ещё на $k!$ если у нас k -одинаковых предметов и $n-k$ остальных предметов все разные

$$\Rightarrow \text{ответом будет } \frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$$

$$= 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

N2.

$$\cos 7x + \cos 5x + 5 \sin 7x - 5 \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 2x \cos 5x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \sin 2x = -\cos 2x, \cos 2x \neq 0$$

$$\operatorname{tg} 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) 2 \cos x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 \quad | : 2$$

$$\cos x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = 0$$

$$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$$

$$2 \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad \begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi t \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi t \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases} \quad t, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi t, t \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№3.

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)} \quad (1)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \quad (2)$$

$$(2) y + y(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0$$

$$y = \frac{-2x-4 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$D = (2x+4)^2 - 4(-3x^2+12x) = 4x^2+16+16x+12x^2-48x = 16x^2-32x+16 = (4x-4)^2$$

$$y = \frac{-2x-4 \pm (4x-4)}{2} \quad \begin{cases} y = x-4 \\ y = -3x \end{cases}$$

$$(1) \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2 \ln(xy^2)}$$

$$-y \geq 0, xy^2 \geq 0 \Rightarrow y < 0, x > 0$$

$$\textcircled{1} y = -3x \Rightarrow \left(\frac{x^7}{3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 9x^3}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 9x^3}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} y = x - 4 \Rightarrow \left(\frac{x^3}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln(x(4-x)^2)}$$

$$\left(\frac{x^3}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln(4-x)}$$

$$\left(\frac{x^3}{4-x} \right)^{\ln(4-x)} = x^{2 \ln x}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2$$

Ответ: (3; -9), (2; 2).

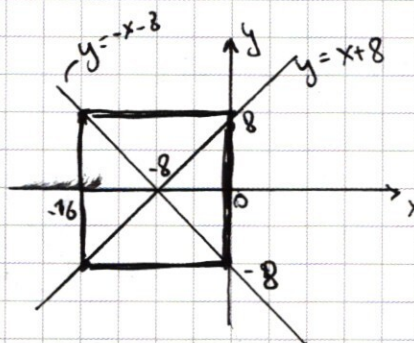
N5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (x-8)^2 + (y-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) |x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

раскрываем модуль:

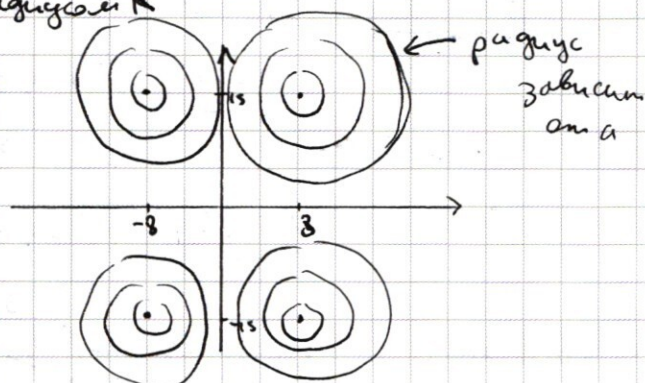
$a > 0$	$b > 0$	$x = 0$
$a > 0$	$b < 0$	$y = 8$
$a < 0$	$b > 0$	$y = -8$
$a < 0$	$b < 0$	$x = -16$



$$(2) (x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

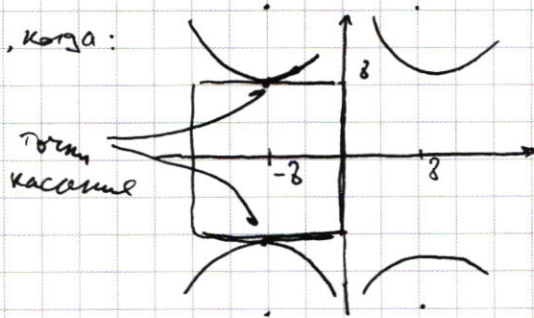
$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = R^2$ — уравнение окружности, с центром т.О $(x_1; y_1)$ и радиусом R

$$\begin{aligned} x > 0, y > 0: (x-8)^2 + (y-15)^2 &= a \\ x > 0, y < 0: (x-8)^2 + (y+15)^2 &= a \\ x < 0, y > 0: (x+8)^2 + (y-15)^2 &= a \\ x < 0, y < 0: (x+8)^2 + (y+15)^2 &= a \end{aligned}$$



каждо уравнение имеет 2 решения $\Rightarrow$ 2 оду. точки

~~вариант~~ вариант, когда:



$$x = -8 \quad y = 8 :$$

$$0^2 + 8^2 = a \Rightarrow a = 64$$

при $a > 64$ будет больше 2х решений

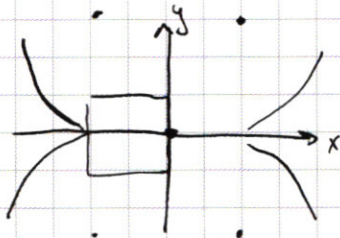
$$a < 64$$

$a = 64$ - ~~одно~~ ^{два} решения только

$a > 64$ - 0 решений
 $a < 64$ - 0 решений

где c - ~~какое~~ ^{какое} a при ком. $x = -16 \quad y = 0$

$$8^2 + 15^2 = a = 289 ; R = 17$$



$$x = 0 \quad y = 0 \quad 8^2 + 15^2 = a = 289 ; R = 17$$

Ответ: $a = 64$ и $a = 289$.

№7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

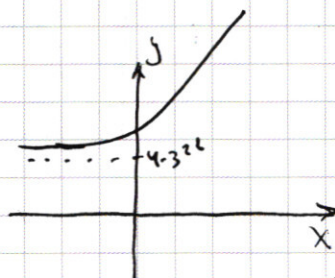
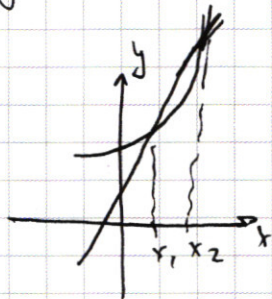


график при $y = 3^x + 4 \cdot 3^{28}$

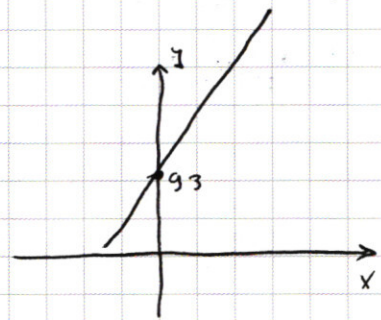


график при $y = 93 + 3(3^{27} - 1)x$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{27} - 1)x \quad \text{имеет max 2 решения}$$

$$x = 4 : 3^4 + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 4 \cdot 3^{28} - 12$$

$$3^4 = 93 - 12$$

$$81 = 81$$

$$x = 31 : 3^{31} + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3 \cdot 3^{31} - 3 \cdot 31$$

$$3^{31} = 3^{28} (31 - 4) = 3^{28} \cdot 27 = 3^{31}$$

Таким образом: $x = 4$ и $x = 31 \Rightarrow x \in (4; 31) \Rightarrow x \in [5; 30]$ (т.к. есть целые числа)

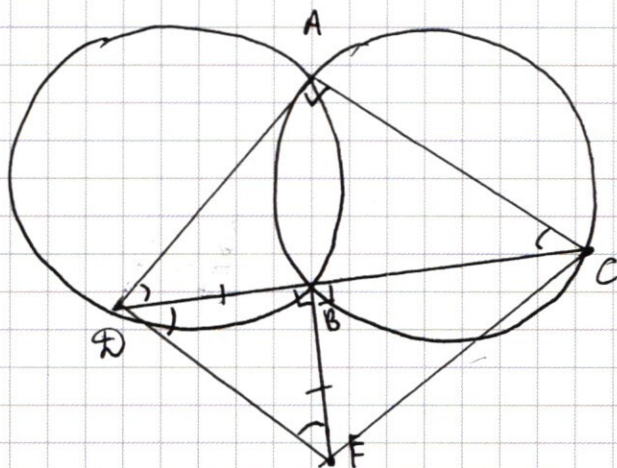
☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4

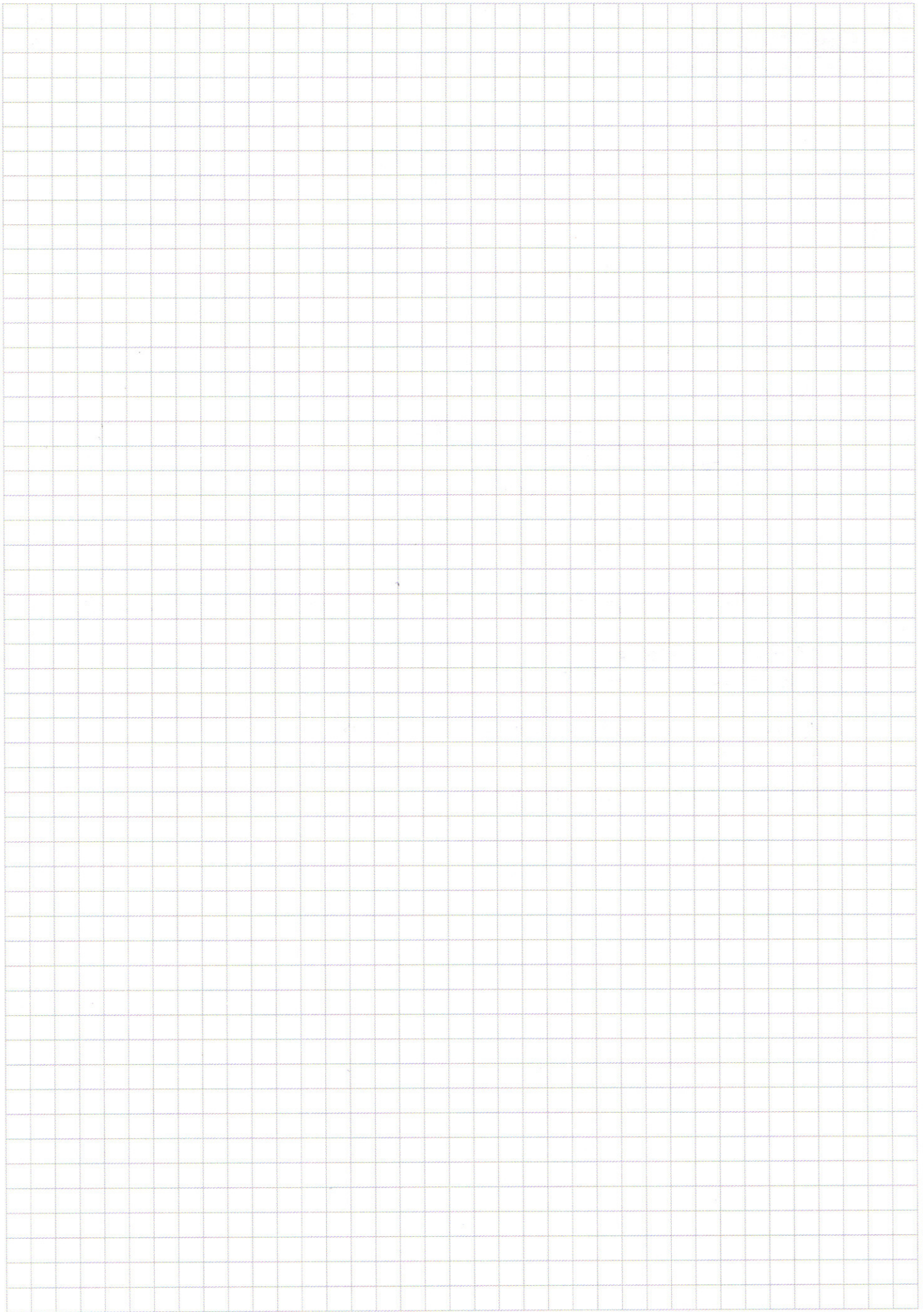
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\underline{\underline{N_6}}$$


C.F-?

- 1) $\overline{AB}$ (у раён. ды-тца) – павыш, т.к. напрымаваны зяманавце
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC$
 т.к. $\angle A = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$
- 2) $DB = DF$, $\angle DBF = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$
- 3) $\angle ACD = \angle CDF = 45^\circ \Rightarrow AC \parallel DF$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$64827$$

$$2 = 27 : 9$$

$$\begin{array}{r} 64827 \overline{) 19} \\ 63 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7203 \overline{) 3} \\ 7203 \\ \hline 003 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401 \overline{) 7} \\ 21 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -21 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ & \sin 2x + \cos 2x = 0 \end{aligned}$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$8 \text{ чл.}$$

$$\begin{array}{l} 7 \times 4 \\ 3 \times 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \text{ "7"} \\ 3 \text{ "3"} \\ 1 \text{ "1"} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \text{ "7"} \\ 1 \text{ "3"} \\ 1 \text{ "9"} \\ 2 \text{ "1"} \end{array}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 280 + 840 = 1120$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y + \cos x - y &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ &= 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y \\ &= 2 \cos 2x \cos 5x \\ &= 2 \cos 5x \sin 2x \\ &= \sqrt{2} \cos 7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x + y - \sin x - y &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cos^2 5x (1 + 2 \sin 2x \cos 2x) + 2 \cos 4x &= 0 \\ \cos^2 5x (1 + \sin 4x) + 8 \cos 4x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{y} \right)^{\ln(-y)} &= x^{2 \ln(-y)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y &= 0 \\ (x+y)^2 - 4x^2 + 12x + 4y &= 0 \\ 4(-x^2 + 3x + y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(y + 2x + 4) - 3x(x - 4) &= 0 \\ y^2 + y(2x + 4) - 3x^2 + 12x &= 0 \\ y = \frac{-2x - 4 \pm \sqrt{4x^2 + 16x + 16 - 12x^2 + 48x}}{2} \\ &= \frac{-2x - 4 \pm \sqrt{16x^2 - 32x + 16}}{2} \\ &= \frac{-2x - 4 \pm 4(x - 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{-48x + 16x + 16}{32x}$$

$$(4x - 4)^2$$

$$y = \frac{-2x - 4 + 4x - 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2x - 4 + 4x - 4}{2} = \frac{2x - 8}{2} = x - 4 \\ y = \frac{-2x - 4 - 4x + 4}{2} = \frac{-6x}{2} = -3x \end{cases}$$

$$(11) \left(\frac{-x^2}{-3x} \right)^{\ln(+3x)} = x^{2 \ln(+3x^3)} \\ (x^6)^{\ln 3x} = x^{2 \ln 9x^3}$$

$$(x^2)^{3 \ln 3x} = (x^2)^{\ln 9x^3}$$

$$\Rightarrow 3 \ln 3x = \ln 9x^3$$

$$\ln 27x^3 = \ln 9x^3$$

$$27x^3 = 9x^3$$

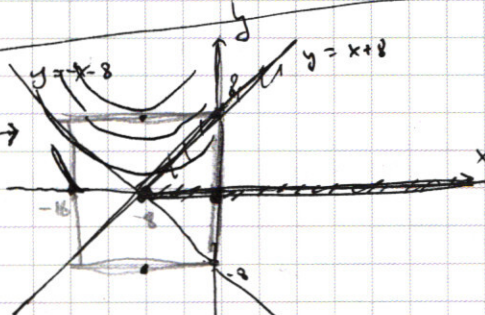
$$x=0$$

$$y=0$$

$$\log_a b = c \\ \ln \log_2 8 = 3$$

$$\frac{3^5}{3} \ln 5 = 3^{2 \ln 3^5} \quad 3^{5 \cdot 2 \ln 3} = 3^{5 \cdot 2 \ln 3}$$

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((x-8)^2 + (y-15)^2 = a \end{cases}$$



$$1) \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ y > -x-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+8 > 0 \\ y < x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+8 > 0 \\ y > -x-8 \\ x-y+8 < 0 \\ y < x+8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+8 - x+y-8 = 16 \\ 2y = 16 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ y < -x-8 \\ x-y+8 > 0 \\ y < x+8 \end{cases}$$

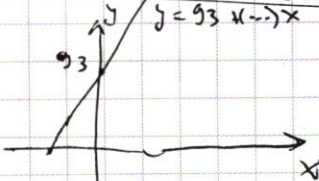
$$\begin{cases} -x-y-8 + x-y+8 = 16 \\ -2y = 16 \\ y = -8 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+8 < 0 \\ x-y+8 < 0 \end{cases}$$

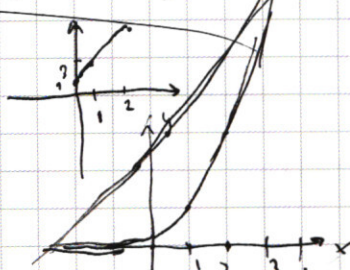
$$\begin{cases} -x-y-8 - x+y-8 = 16 \\ -2x = 32 \\ x = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{-93} + 3x = (x-4) \cdot 3^{28} \\ 3^{-93} + 3 \cdot 9 = 5 \cdot 3^{28} \\ 3^{-93} + 93 = 12 \cdot 3^{28} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \\ 3 \cdot 31 \end{cases}$$



$$3^{28} + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28} \cdot 8 \quad \begin{cases} x > 4 \\ x = 31 \\ x \in (4; 31) \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2.

$$\cos 2x + \cos 3x + \sin 2x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 2x \cos 5x + 2 \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (\cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x + \sin 2x = 0 & (1) \\ \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \sin 2x = -\cos 2x, \cos 2x \neq 0$$

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) 2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x + \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = 0$$

$$\cos 5x + \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0$$

$$2 \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi t}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} t, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi t}{7} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} t, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi t}{7}, t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

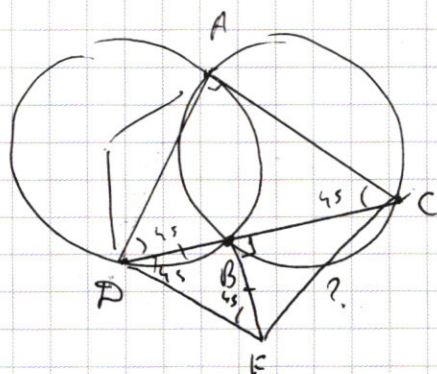
$$2DB^2 + CD^2 - 2DF \cdot AC$$

$$\frac{DF}{DC} = \frac{BF}{AE}$$

$$CF^2 = DB^2 + DC^2$$

$$DB^2 + DC^2 = DF^2 + FC^2$$

$$2DB^2 + CD^2 - 2DF \cdot AC$$

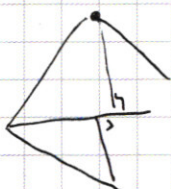
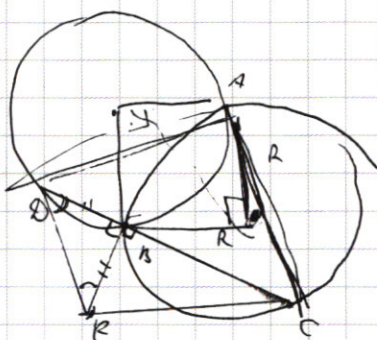


$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$



$$\begin{matrix} 23 \\ 12 \\ \hline 35 \end{matrix}$$



$$\begin{cases} y > 3^{x+4} \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{29} - 1)x \end{cases}$$

$$x = 4; 31$$

$$\begin{cases} y > 3^5 + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{28} - 15) \end{cases}$$

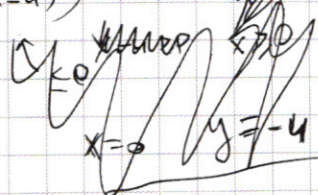
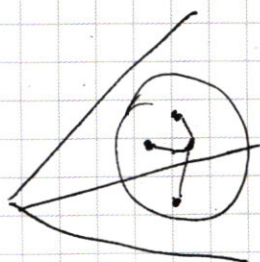
$$\begin{cases} (4; 31) \\ [5; 30] \end{cases}$$

$$93 - 15 = 78$$

$$\begin{matrix} 3^{28} \\ 3^5 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 93 + 3^{28} - 15 \\ 3^{28} + 78 \\ 4 \cdot 3^{28} + 3^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{x-4} \right) \ln(x-4) &= x^2 \ln(x(x-4)^2) \\ \left(-\frac{x^2}{x-4} \right) \ln(x-4) &= (x^4) \ln(x-4) \cdot x^2 \ln x \\ \left(-\frac{x^3}{(x-4)} \right) \ln(x-4) &= x^2 \ln x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left(-\frac{x^2}{x-4} \right) \ln(x-4) &= x^2 \ln x \\ \left(-\frac{x^3}{(x-4)} \right) \ln(x-4) &= x^2 \ln x \\ \left(-\frac{x^3}{(x-4)} \right) \ln(x-4) &= x^2 \ln x \\ \left(-\frac{x^3}{(x-4)} \right) \ln(x-4) &= x^2 \ln x \end{aligned}$$