

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

64827 | 3
27609 | 3
7203 | 3
2401 | 7
343 | 7
49 | 7
7 | 7
1

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

Таким образом, цифры восьмизначного числа должны содержать только цифры "3", "9", "7" и "1".
Первый случай) цифры "9" в разложении нет, тогда в числе 6 три тройки, четыре семёрки и единица.

Сначала выбираем место для единицы, потом для троек, оставшиеся автоматически семёрки, поэтому способов

$$8 \cdot C_7^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 105 = 840$$

Второй случай. - девятка есть, тогда выбираем место для девятки, (набор 93117777) потом для троек, потом для двух единиц, оставшиеся заполняем семёрками.

$$\text{Способов } 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 = 840$$

$$\text{Всего способов } 840 + 840 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел

№2

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

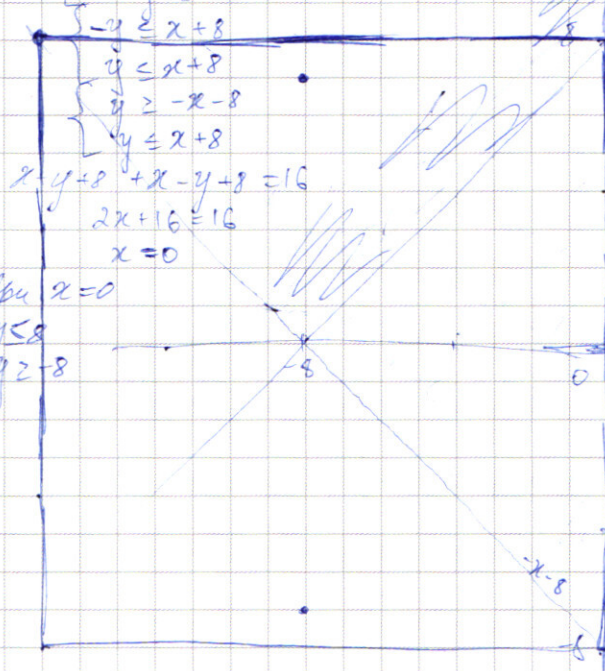
$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2(\cos 4x \cos 2 - \sin 4x \sin 2) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos \left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$5. \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 \geq 0 \\ -y \leq x+8 \\ y \leq x+8 \\ y \geq -x-8 \\ y \leq x+8 \end{cases}$$



$$2. \begin{cases} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+8 < 0 \\ -y \leq x+8 \\ y > x+8 \\ y \geq -x-8 \\ y > x+8 \end{cases}$$

$$x+y+8 - x+y-8 = 16$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$$3. \begin{cases} x+y+8 \leq 0 \\ x-y+8 \leq 0 \\ y < -x-8 \\ y > x+8 \end{cases}$$

$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

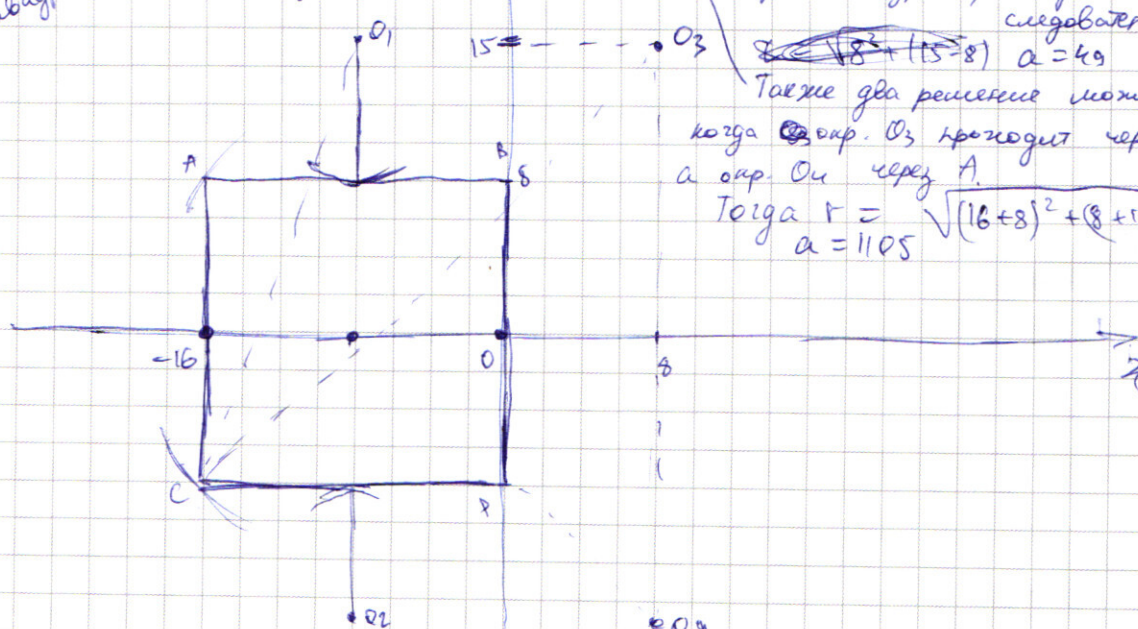
Первое уравнение системы на плоскости Oxy - это квадрат с центром $(0; -8)$, стороной 16, направленными вдоль осей. Второе уравнение системы - ~~две окружности~~ две окружности с центром $(8; 15)$; совокупность четырех окружностей (см. рисунок) с $r = \sqrt{a}$.

Равно 2 решения будет в момент, когда окружности с центром O_1 и O_2 касаются стороны квадрата, тогда $r = 7$, следовательно $a = 49$.

Также два решения может быть, когда окр. O_3 проходит через C , а окр. O_4 через A . Тогда $r = \sqrt{(16+8)^2 + (8+15)^2} = \sqrt{1105}$, $a = 1105$.

что означает, что окружности будут не касаться квадрата.

очевидно, что $O_3 \rightarrow O_1$ и $O_4 \rightarrow O_2$



Ответ: $a = 49$; $a = 1105$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} \left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Прологарифмируем первое уравнение системы.

$$\ln\left(\left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}\right) = \ln\left(x^{2\ln(xy^2)}\right)$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(\frac{-x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \ln(x)$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln(-x^7)) - \ln(-y) = 2(\ln(x) + \ln(y^2)) \ln(x)$$

$$\ln(-y) \cdot (7\ln(x) - \ln(-y)) = 2(\ln(x) + 2\ln(-y)) \ln(x)$$

$$\ln(x) = a; \quad \ln(-y) = b$$

$$b(7a - b) = 2(a + 2b)a$$

$$7ab - b^2 = 2a^2 + 4ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$a = b; \quad a = \frac{b}{2}$$

$$\begin{cases} \ln(x) = \ln(-y) \\ \ln(x) = \frac{1}{2} \ln(-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 = -y \end{cases}$$

подставим эти выражения во второе уравнение системы.

$$y^2 + 2y^2 - 3y^2 - 12y + 4y = 0$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0$$

$$-4y^2 - 8y = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

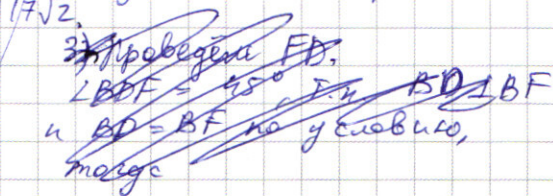
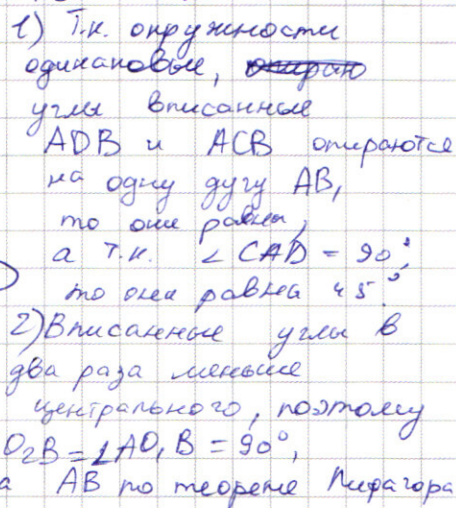
$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = 3 - \text{корень}; \quad (x-3)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$\text{Если } x = 3, \text{ то } y = -9; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad y = -\frac{(4 \pm \sqrt{17} - 1)^2}{4} = -\frac{18 - 2\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Ответ: } (2; -2); (3; -9); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{2\sqrt{17}-18}{4}\right); \left(\frac{-\sqrt{17}-1}{2}; \frac{2\sqrt{17}-18}{4}\right)$$

Решение:

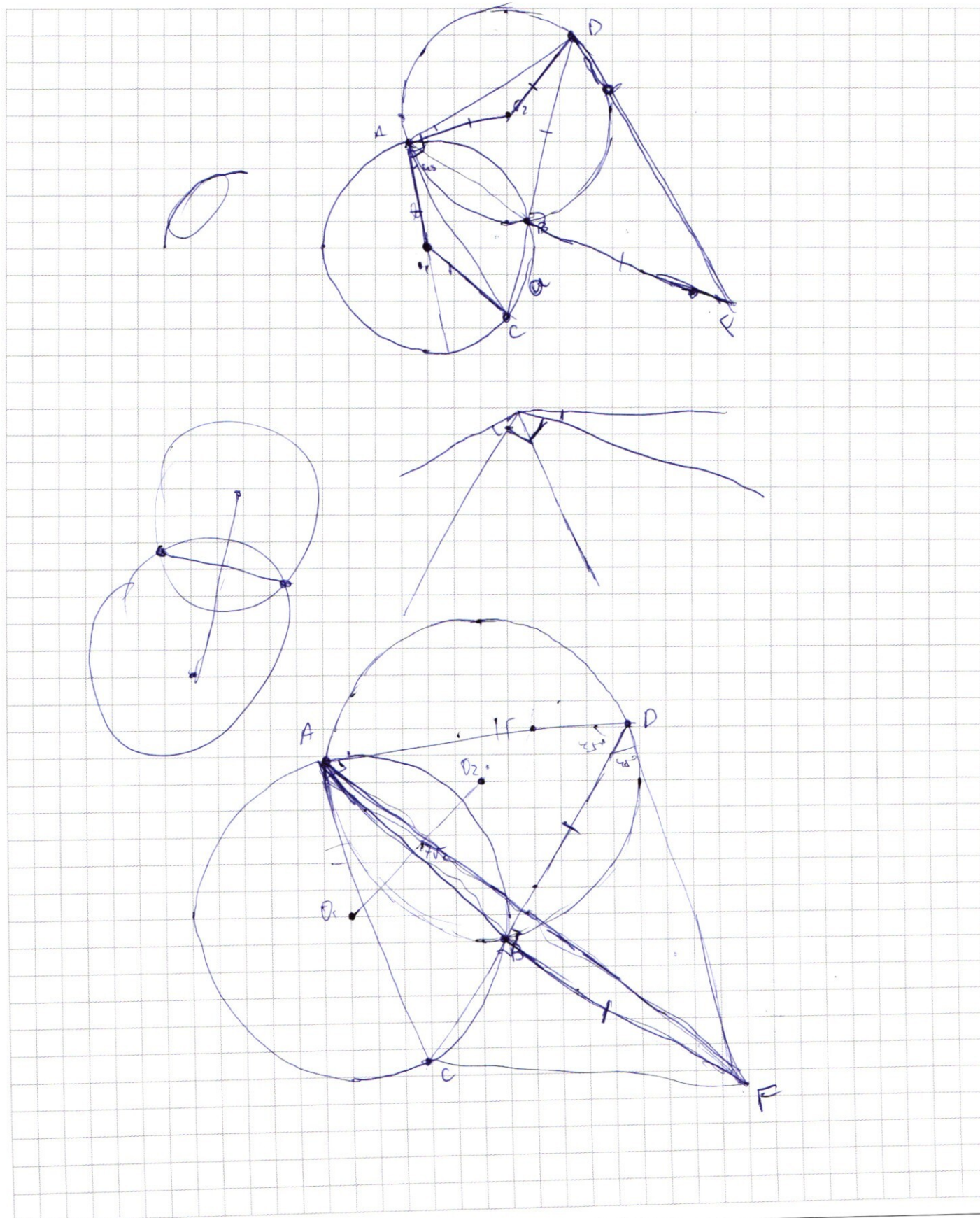


3) Т.к. $\angle A O_2 B = \angle A O_1 B = 90^\circ$,
 $A O_2 B O_1$ - четырехугольник с
 равными сторонами, то $A O_2 B O_1$ -
 квадрат

4) $\angle BDF = 45^\circ$, т.к. $BD \perp BF$ и $\angle BDF = 45^\circ$.
 $BD = BF$ по условию.
 $\angle ACD = \angle CDF$, поэтому $AC \parallel DF$.

$$7. \begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2) \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos 4x$$

$$2 \cos \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} + 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = -\cos 4x$$

$$2 \cos 5x \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos 4x \quad | \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 5x = -\cos 4x \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(4x - \frac{\pi}{2} \right) \cos 5x = -\cos 4x \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(4x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos 4x$$

$$\cos 4x (\cos 5x - \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)) = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi h, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 4x = 0$$

$$\cos 5x - \sin \left(5x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi h, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 4x = 0$$

$$\sin \left(5x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi h, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 4x = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi h, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x + \frac{\pi}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) + 2\pi h, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z};$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 648273 \\ 20609 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 206097 \\ 14 \\ \hline 66 \\ 63 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77731 \\ 7371 \\ 7317 \\ 73177 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 77731 \\ 73771 \\ 37771 \\ 77371 \end{array}$$

$$\cos(2x+2x) = \cos 2x \cos 2x - \sin 2x \sin 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \sin 2x \cos 2x$$

$$\cos 5x$$

$$\cos(7x-3x) = \cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$$

$$\begin{array}{r} 77773331 \\ 77771333 \end{array}$$

$$4x -$$

$$\frac{7!}{3!4!}$$

$$\sin \frac{2+3}{2} \cos \frac{2+3}{2}$$

$$2 \cos 2x (\sin 5x)$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$\cos 7x + \sin 7x =$$

$$AC^2 = CB \cdot CD$$

$$AD^2 = DB \cdot CD$$

$$\cos(3x+4x) + \sin(3x+4x) = \cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x + \sin 3x \cos 4x$$

$$\begin{aligned} 3^x + 4 \cdot 3^{28} &< 93 + 3 \left(3^{28} - 1 \right) x \\ 3^x + 4 \cdot 3^{28} &< 93 + 3^{29} x - 3x \end{aligned}$$

$$3^x + 3^{28} + 3^{28} < 93 + 3^{28} \quad x - 3x$$

$$3^x + 3^{29} + 3^{28}(1-x) \leq 93 - 3x$$

$$3^x + 3x < 93 + (x-26) \cdot 3^{28}$$

$$3 - (\cancel{3} + 2)$$

1) $x + y \geq 8$ $x + 8 \geq y$
 $\left\{ \begin{array}{l} y \leq x + 8 \end{array} \right.$ xy

$$\begin{array}{l} x+y+8 \geq 0 \\ x-y+5 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y \geq -x-8 \\ y \leq x+5 \end{array}$$

$$x+y+8+x-y+8=16$$

~~$22 + 16 = 16 \div 16$~~



A hand-drawn geometric diagram on graph paper. It features a circle with center O . Points A , B , and C are marked on the circle's circumference. Several lines are drawn: a vertical line through O , a line through A and B , and a line through B and C . There are also lines connecting O to A , B , and C . Angles are labeled with Greek letters: α at A , β at B , and γ at C . There are also labels like α' , β' , and γ' . A small table with numbers is visible on the right side of the diagram.

22	17
73	17
91	17

629

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ 46 \\ \hline 529 \\ + 576 \\ \hline 1105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1105 & 5 \\ 221 & \end{array}$$

$$\begin{matrix} 28 & 3x \\ 3x & \end{matrix}$$

$$2^8 \cdot 935 \cdot (3^{28} \cdot x - 3^2) \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x$$

$$x = 3$$
$$a_x = 3^{28}(u-x)$$

$$3^x - 3^x$$

$$\frac{17\sqrt{2}}{2} \quad \log^3 x \quad x^{28} \quad x^3 \quad x^3$$

$$(17\sqrt{2}) \cdot x = 17^2$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 4x =$

$3 + 4 \cdot 3^{28} \cdot 7 \cdot 93 + 3(3^{27} - 1) \cdot 2$

$5 \cdot 3^{28} \cdot 7 \cdot 93 + 3^{28} - 3 \cdot 2$

$(7x - 3x)$

$17\sqrt{2} - 17$

$5x = 2x + 3x$

$\cos(4x + x) = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$

$\left(\frac{3}{5-3x}\right)^{28} > 93 - 3 \cdot 28$

$17\sqrt{2} - 17$

$a+b=14$
 $a-b=6$
 $b=4$
 $a=10$

$\frac{a+b}{2} = 7$
 $\frac{a-b}{2} = 3$

$\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 4x + \cos$

$\cos 2x + \sin 2x =$

$\cos(2x + 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos 4x =$

$BF(BF + 17\sqrt{2}) = (BF\sqrt{2})^2$

$a \cdot \frac{1}{2} a\sqrt{2}(a+b) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{ab}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{\sin(5x + \frac{\pi}{2})}{\sin a} = \sin(4x)$

$$\cos 7x + \sin 7x + \cos 3$$

$$\cos 7x -$$

$$\cos 4x \cos x = (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cos x =$$

$$= (1 - 2\cos^2 2x)$$

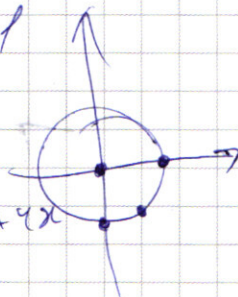
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\sqrt{2} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 7x \cos \frac{\pi}{4}$$

$$7x - 3x = \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 4x$$



$$\cos 3x - \sin 3x =$$

$$\sqrt{2} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 4x$$

$$2\cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 4x$$

$$\cos 5x \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 4x \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 4x$$

$$\cos 5x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin a = \sin b$$

$$a = \pi -$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 5x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} + 5x = \pi - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

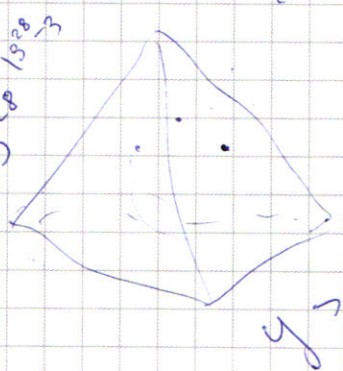
$$7x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 3x$$

$$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$$

$$y \geq \frac{93 \cdot 4}{3^{28} - 1} + 4 \cdot 3^{28} - 3x$$



$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} - 3x$$