

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \quad \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \alpha - \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

$$\Rightarrow \cos 11x - \sin 11x - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) - \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \cos 4x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = 2 \sin \left(-4x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = -\sqrt{2} \sin 4x \left(\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) \right) =$$

$$= -\sqrt{2} \sin 4x \cdot (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\cos 4x = \cos(2 \cdot 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\Rightarrow \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\text{или} \quad -\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\text{или} \quad \tan x = -1$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad \forall m, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11}$$

$$\boxed{3} \quad \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (a) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (b) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \lg x > 0 \Rightarrow x > 0 \\ \lg xy > 0 \Rightarrow xy > 0 \Rightarrow y > 0 \end{cases} \Rightarrow xy > 0.$$

$$\text{Если } \lg x = a \quad \lg y = b \quad (a) \Rightarrow \lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg(y^{2 \lg xy}) =$$

$$\Rightarrow \lg x \cdot \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \cdot \lg y \Rightarrow a(5b - a) = 2(a + b)b$$

$$\Rightarrow 5ab - a^2 = 2ab + 2b^2 \Rightarrow 2b^2 - 3ab + a^2 = 0 \Rightarrow (a - 2b)(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a = b \\ \Downarrow \\ \lg x = \lg y \\ \Downarrow \\ \boxed{x = y} \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} a = 2b \\ \Downarrow \\ \lg x = 2 \lg y \\ \Downarrow \\ \boxed{x = y^2} \end{matrix}$$

$$(b) \Rightarrow x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = x^2 - 2xy - 3y^2 - (4x - 12y) =$$

$$= (x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) = (x - 3y)(x + y - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 3y} \quad \text{или} \quad \boxed{x + y = 4}$$

$$\text{Если } \begin{cases} x = y \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \emptyset \quad \text{т.к. } x, y > 0.$$

$$\text{Если } \begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = y = 2}$$

$$\text{Если } \begin{cases} x = y^2 \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3y \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = 3 \\ x = 9 \end{matrix}}$$

$$\text{Если } \begin{cases} x = y^2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{matrix}}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y_3 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$\prod_{1 \leq i \leq 8} a_i = 3375$

$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \Rightarrow a_i$ возможно равно 1, 3, 9, 5

Может $a_i \in \{3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1\}$ или $a_i \in \{3, 9, 5, 5, 5, 1, 1, 1\}$

Если (1) $\Rightarrow C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3!3!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot 1 = 560$

Если (2) $\Rightarrow C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 6 \cdot 20 = 1120$

} All is 1680

Ответ: Если только положительных чисел 1680.

~~(Здесь был текст)~~

5. $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$

if $y-3-x=a$ $y-3+x=b$

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ Maybe (I) $y-3+x=a>0$ $b>0$

$\Rightarrow y-3-x+y-3+x=6 \Rightarrow y=6$ $a>0$ $b>0 \Rightarrow \boxed{3 \leq x \leq -3} \quad y=6$

Maybe (II) $a>0$ $b<0$

$\Rightarrow y-3-x+3-y-x=6 \Rightarrow x=-3$ $a>0$ $b<0 \Rightarrow \boxed{0 \leq y \leq 6} \quad x=-3$

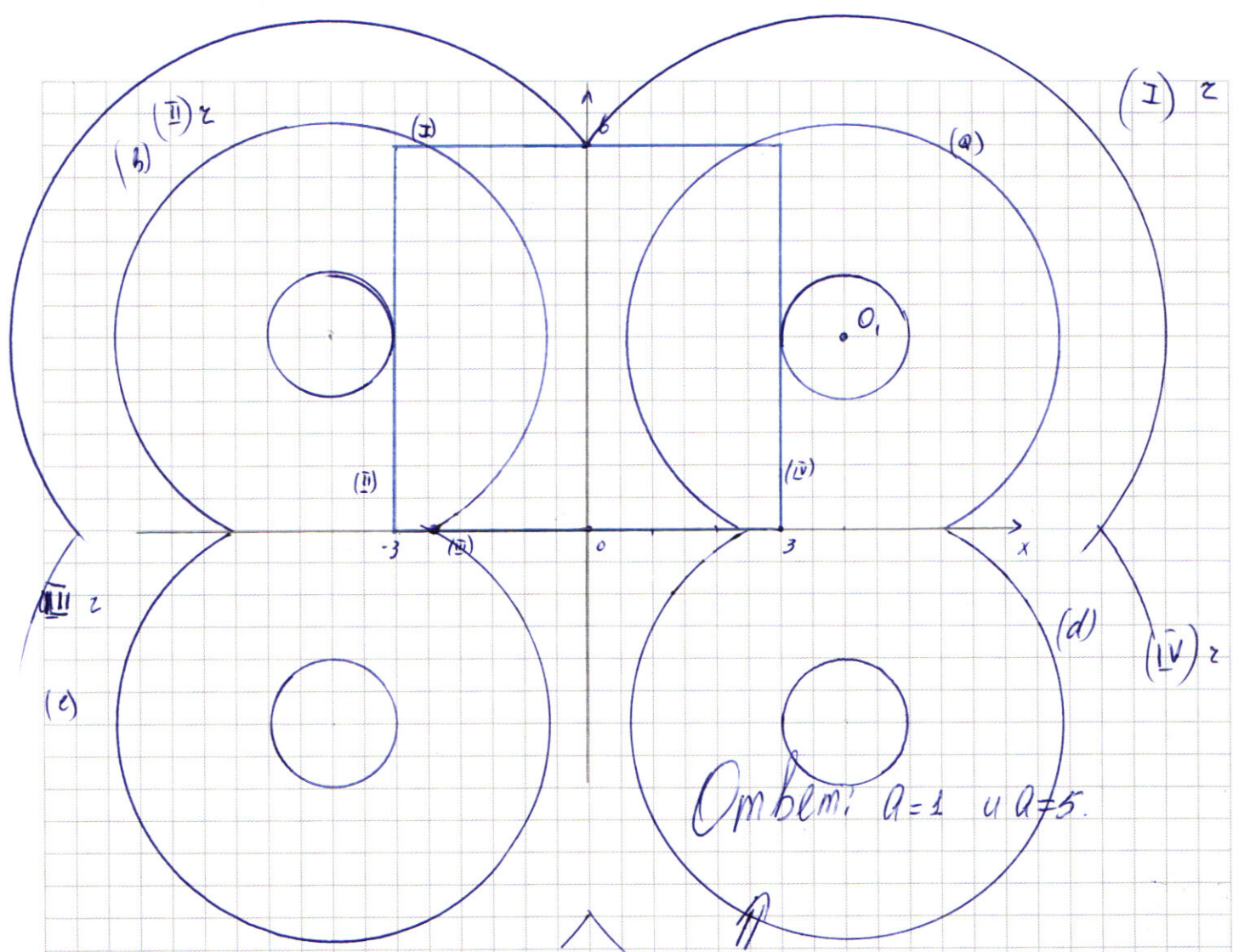
Maybe (III) $a<0$ $b<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3+x-y+3-y-x=6 \Rightarrow y=0$ $a<0$ $b<0 \Rightarrow \boxed{-3 \leq x \leq 3} \quad y=0$

Maybe (IV) $a<0$ $b>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3+x-y+y-3+x=6 \Rightarrow x=3$ $a<0$ $b>0 \Rightarrow \boxed{0 \leq y \leq 6} \quad x=3$

В декартовой координатной системе.



Ответ: $a=1$ и $a=5$.

$(|x-3|)^2 + (|y-3|)^2 = a$ это окружность какой радиус $\sqrt{a}$ центр в $(3;3)$ и только x, y положительные и это симметричн 3 окружностям в Ox , Oy и O

Если $a < 1$ окружности и этот квадрат не пересекаются $\Rightarrow$ т.ч.то $d_{\min}(O, \rightarrow \text{квадрат}) = 1$

Если $a = 1$ окружности (в I и II четвертях) касаются

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 3, y_1 = 3, x_2 = -3, y_2 = 3}$ это возможно

Если $a > 25$ нет решения т.ч.то окружности и квадрат не пересекаются
т.ч.то это только два решения

Если $1 < a < 25 \Rightarrow$ решения есть более в два

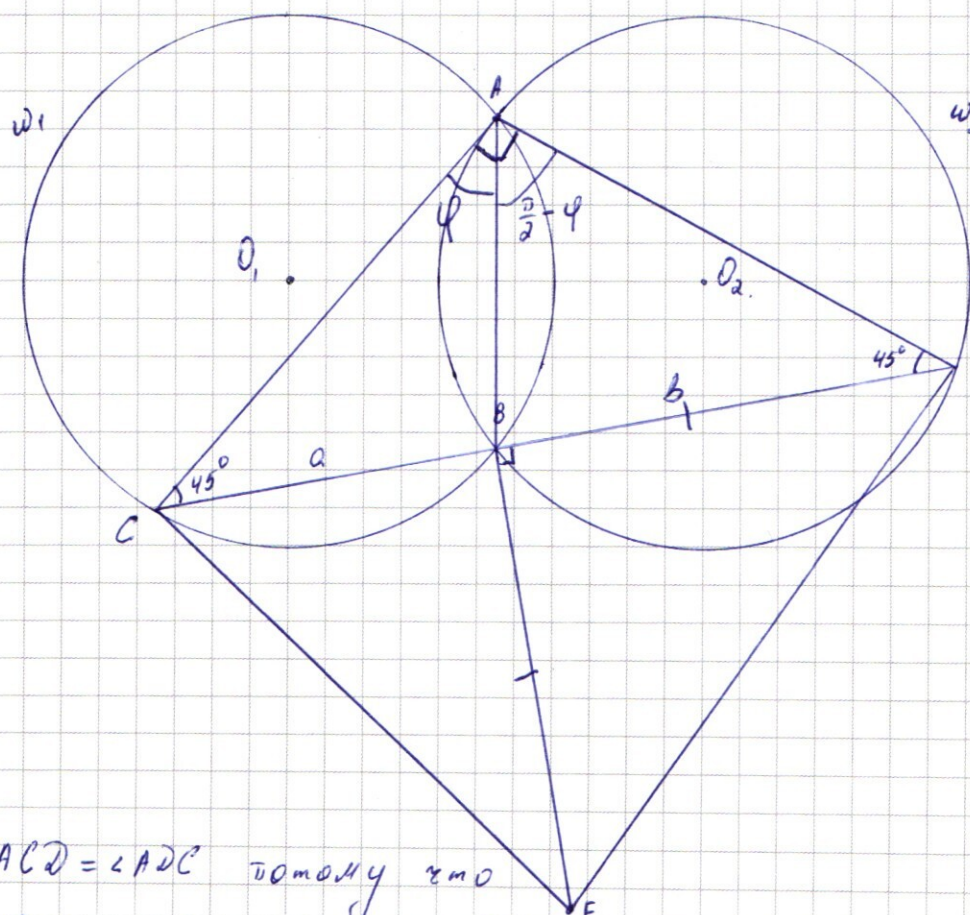
т.ч.то окружности в I и II четвертях пересекаются в два

точка $\Rightarrow$ есть решения ч. $\Rightarrow$ это невозможно

Если $a = 25 \Rightarrow$ радиус 5 только пересекаются
окружности в I и II четвертях совпадают $\Rightarrow$ есть решения только два

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



$$R_1 = R_2 = 5$$

$$DB = BF$$

$$\text{Если } CB = a \\ BD = b$$

$$\angle CAB = \varphi$$

$$\angle ACD = \angle ADC \text{ потому что}$$

$$\angle AO_1B = \angle AO_2B$$

$$\triangle AO_1B = \triangle AO_2B$$

$$O_1A = O_2B = AO_1 = AO_2$$

$$\angle ACB = \frac{\angle AO_1B}{2}$$

$$\angle ADB = \frac{\angle AO_2B}{2}$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$$

$$\angle ACD + \angle ADC = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow AB = 2R \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 2R \sin \varphi$$

$$b = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 2R \cos \varphi$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4R^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 4R^2 = 100$$

$$DB = BF \Rightarrow BF = b$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = a^2 + b^2 = 100$$

$$(9) \Rightarrow CF = 10$$

$$(8) \text{ Если } BC = 6 \quad a = 6 \Rightarrow b = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$\Rightarrow \sin \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \angle BCF\right) = \frac{AC \cdot CF}{2\sqrt{2}} (\sin \angle BCF + \cos \angle BCF) = \frac{AC \cdot CF}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{5}$$

in $\triangle ACB$ law of cosines
теорема косинусов $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 50 = 36 + AC^2 - 6\sqrt{2} AC \Rightarrow AC^2 - 6\sqrt{2} AC - 14 = 0 \Rightarrow AC = 7\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{5} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \pi}{10\sqrt{2}} = 7 \cdot \pi = 49$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = 49$$

Ответ: (a) $CF = 10$ (b) $S_{ACF} = 49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\Rightarrow 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \Rightarrow 2^{64}(x - 6) + (70 - x) > 2^x$$

We can easily see in $0 \leq x$ $(2^x - 2^{64}(x - 6) - (70 - x))$ is increasing function.

because in $x > 0$ $\frac{d}{dx}(2^x - 2^{64}(x - 6) - (70 - x)) > 0$

$$\text{in } x = 6 \quad 2^{64}(x - 6) + (70 - x) = 2^x \quad \text{if } x \leq 6 \Rightarrow 2^x < 0 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{in } x = 70 \quad 2^{64}(x - 6) + (70 - x) = 2^x = 2^{70} \Rightarrow x \geq 70 \Rightarrow \emptyset$$

$\Rightarrow$ We can see

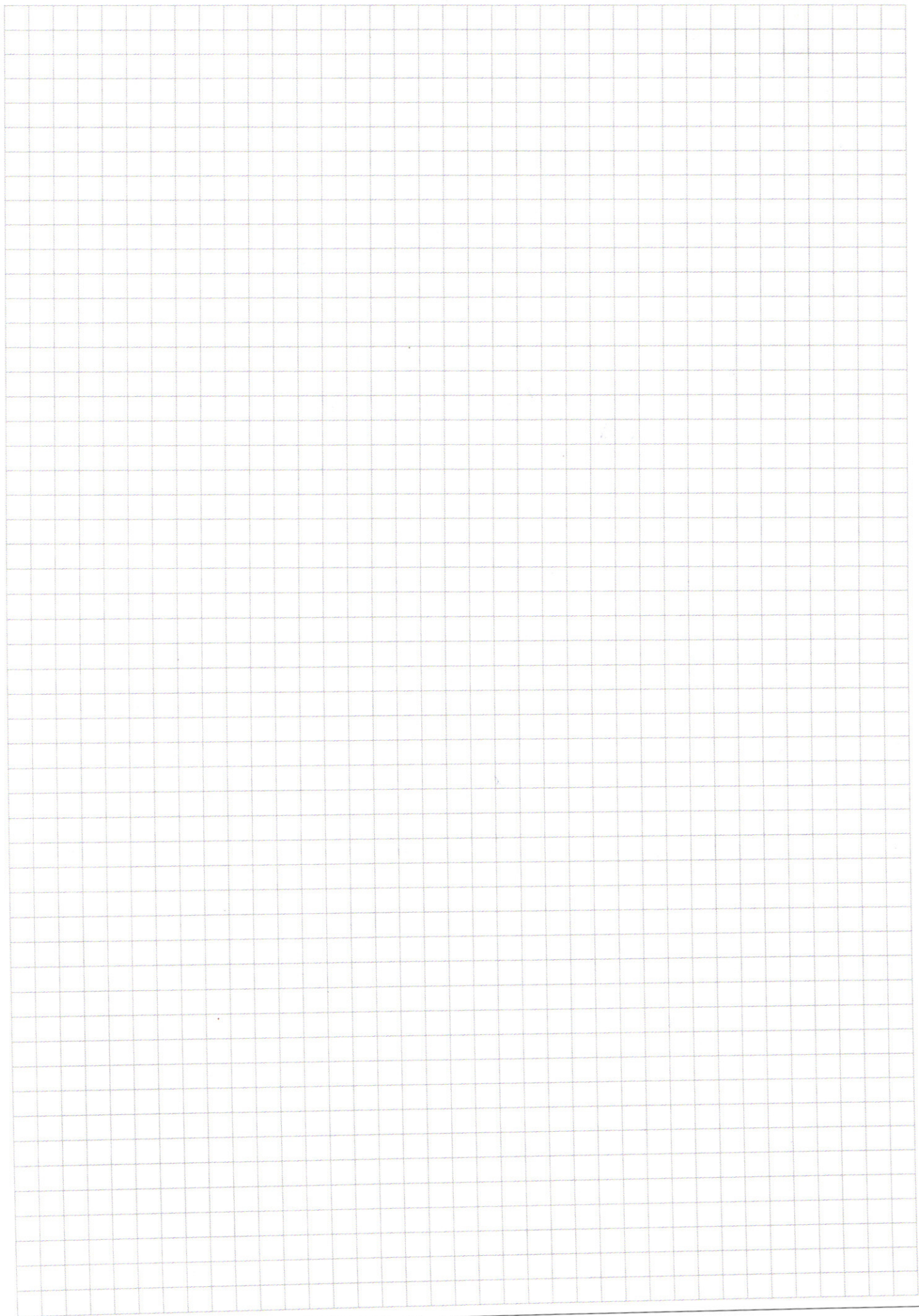
$$7 \leq x \leq 69$$

in one x_0 y can take $70 + (2^{64} - 1)x_0 - (2^{x_0} + 3 \cdot 2^{65})$ значения.

$\Rightarrow$ Количество пар целых чисел (x, y)

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq x \leq 69} (70 + (2^{64} - 1)x - (2^x + 3 \cdot 2^{65})) &= 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \sum_{1 \leq x \leq 69} x - \sum_{1 \leq x \leq 69} 2^x - 3 \cdot 63 \cdot 2^{65} = \\ &= 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \cdot 63 \cdot 38 - 2^{70} + 2^7 - 3 \cdot 63 \cdot 2^{65} = (70 \cdot 63 - 63 \cdot 38 + 2^7) + (2^{64} \cdot 63 \cdot 38 - 2^{70} - 3 \cdot 63 \cdot 2^{65}) = \\ &= 67 \cdot 32 + 2^{65} (63 \cdot 19 - 2^5 - 3 \cdot 63) = 67 \cdot 32 + 2^{65} \cdot 16 \cdot 61 = \\ &= 2144 + 976 \cdot 2^{65} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $(2144 + 976 \cdot 2^{65})$



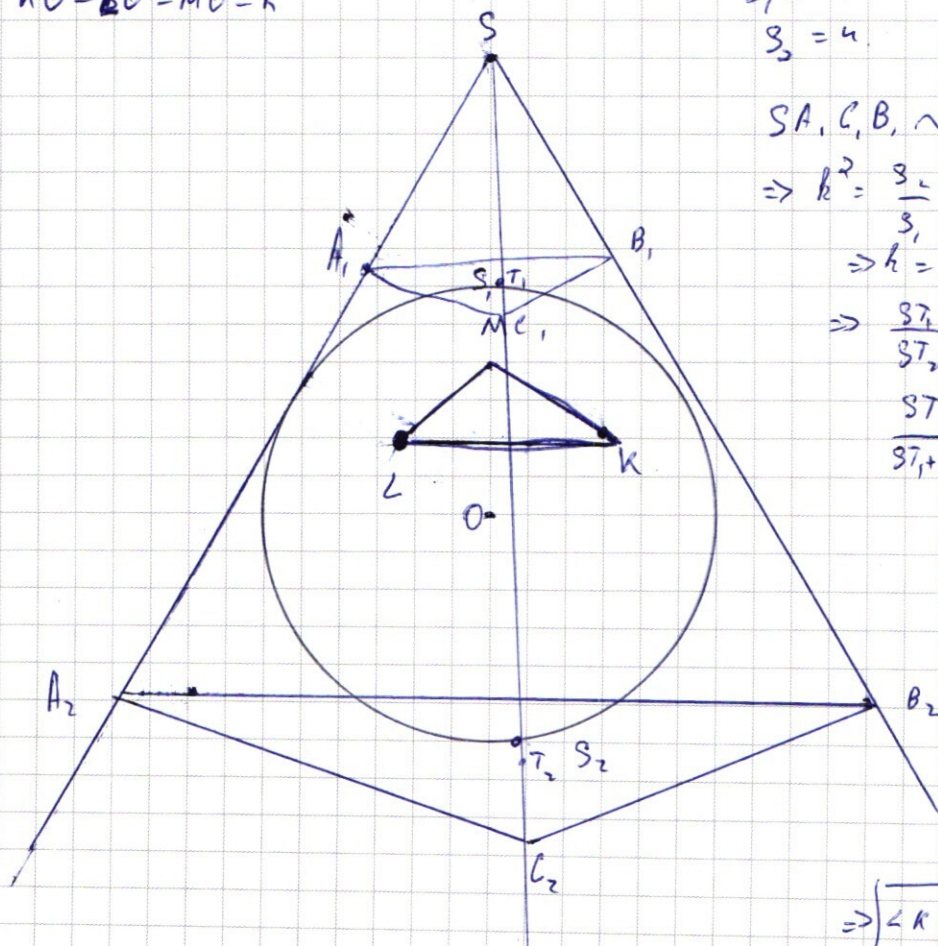
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$$KO = LO = MO = R$$



$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 4$$

$$SA_1 B_1 \sim SA_2 B_2$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{S_2}{S_1} = 4$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow \frac{ST_1}{ST_2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{ST_1}{ST_1 + 2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{ST_1}{2}$$

$$\angle KSO = \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{KO}{OS}$$

$$OS = ST_1 + R = 3R$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$S_{A_1 B_1 C_1} : S_{KLM} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{KLM} = 1 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$S_{KLM} = \frac{9}{4}$$

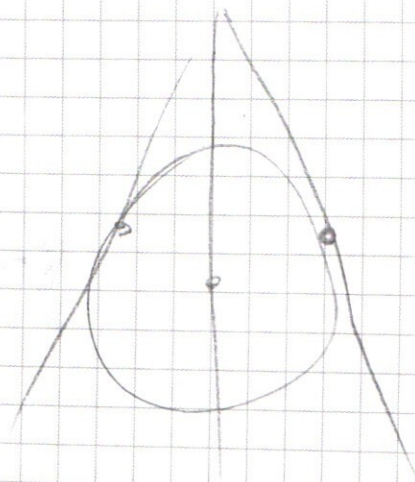
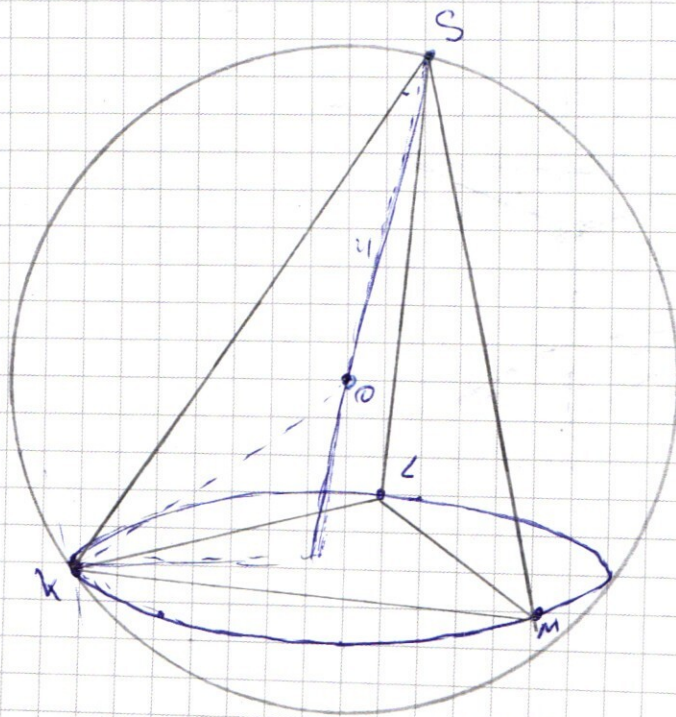
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

insol 2 cm uku...

KLM, K S O



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

с. 0

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$+ \quad + \quad y-3-x + y-3+x = 6 \Rightarrow y=6$$

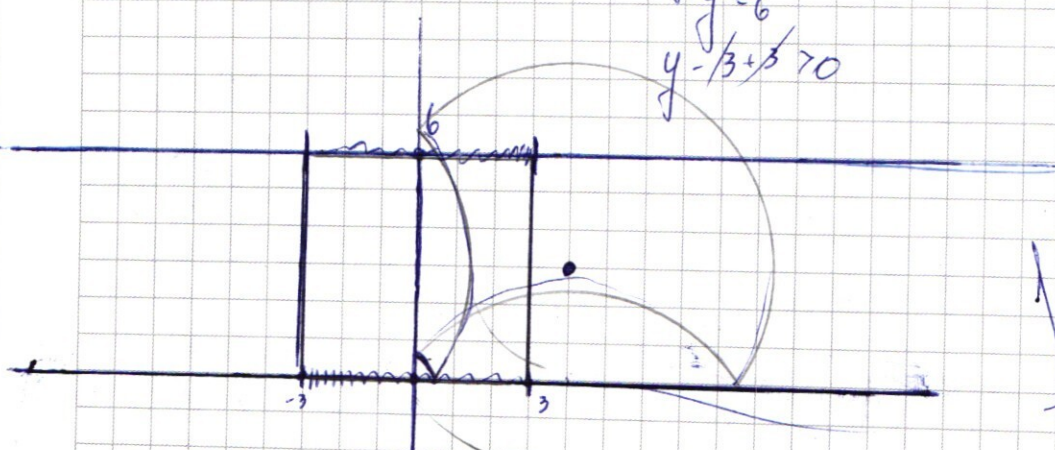
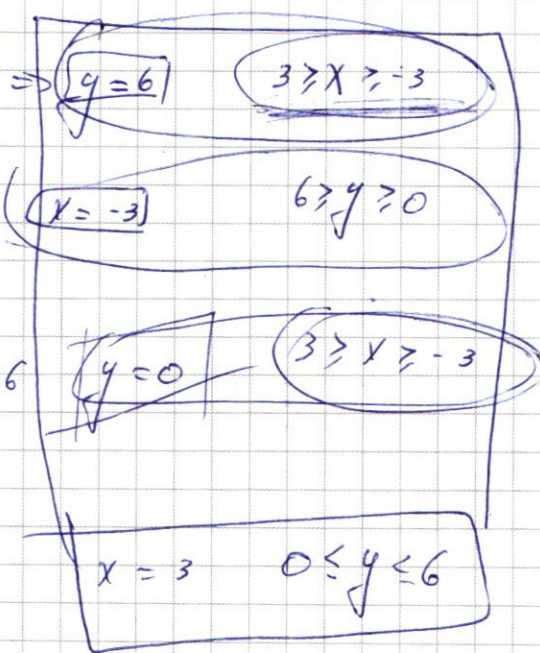
$$+ \quad - \quad y-3-x + 3-y-x = 6 \Rightarrow y-6 < 0$$

$$- \quad - \quad 3+x-y + 3-y-x = 6 \Rightarrow -3-x < 0$$

$$- \quad + \quad 3+x-y + y-3+x = 6 \Rightarrow x < 3$$

$$y-6 < 0 \Rightarrow y < 6$$

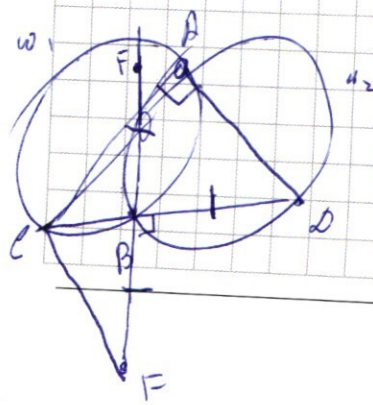
$$y-3+x > 0 \Rightarrow y > 3-x$$



$$1 + (|y-3|)^2 = 0$$

$$|y-3| = \sqrt{a-1}$$

$$|y| = 3 + \sqrt{a-1}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{23}{12} \div \frac{35}{12}$$

$$\cos 11x - \sin 11x - \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x - 45^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \sin(11x - 45^\circ) - \sin(3x - 45^\circ) = \sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) =$$

$$= 2 \sin 4x$$

$$\sin(11x - 45^\circ)$$

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 11x) - \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sin(\frac{\pi}{4} - 11x) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = 2 \sin(4x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - 4x) =$$

$$= 2 \sin(4x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 4x)$$

$$\frac{16}{6} \div \frac{375}{125}$$

$$3^3 \cdot 5^3$$

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3}$$

$$C_5^3 \cdot C_5^3 + C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_6^3$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{1}{x} = 2 \lg x y \cdot \lg y$$

$$\lg x = a$$

$$\lg y = b$$

$$a(1-b-a) = 2(a+b)b$$

$$a(1-b-a) = 2(a+b)b$$

$$5ab - a^2 = 2ab + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 3ab = 0$$

$$a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$a = \frac{3b \pm \sqrt{5b^2}}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 11x) - \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos 4x$$

$$2 \sin(4x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 4x) = \cos 4x$$

$$\sqrt{2 - 2xy - 4x^2 - 3}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{76}{2} = 38$$

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{68} = 2^{70} - 1 = 2^{70} + 1$$

$$\frac{120}{67} \div \frac{15}{32}$$

$$10 \cdot 63 - 63 \cdot 38 + 27 + 264 \cdot 63 \cdot 38 - 270 - 3 \cdot 63 \cdot 264$$

$$63 \cdot 32 + 28 \cdot 4 =$$

$$= 32 \cdot 67$$

$$63 \cdot 32$$

$$111 = \frac{2}{3} + \frac{13}{8} + \frac{5}{12}$$

$$11x = \frac{5}{12} + 2\pi n$$

$$265 / (63 \cdot 19 - 32 - 3 \cdot 63) =$$

$$= 265 / (63 \cdot 16 - 32) =$$

$$61.16$$

$$63 \cdot 19 - 32 - 3 \cdot 63 =$$

$$63 \cdot 16 - 16 \cdot 2$$

$$= 16 \cdot 61$$

$$(17) = (1) = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4}$$

$$y - 37x$$

$$x \leq 3$$

$$y - 31x > 0$$

$$3+x > 0$$

$$x > -3$$

$$-2 < x \leq 3$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$x = 32.4$$

$$y - x - 3 + y - 3 + x = 6$$

$$y = 6$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x \cdot 2xy - 3y^2 - 4(x - 3y) = 0$$

$$(x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) = 0$$

$$x + y = 4$$

$$x - 3y = 0$$

$$x = 3y$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$a/(5-b-a) = 2/(a+b-b)$$

$$5ab \cdot a^2 = 2ab + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a-2b)(a-b) = 0$$

$$a = b$$

$$a = 2b$$

$$\lg x = \lg y \Rightarrow x = y$$

$$\lg x = 2 \lg y = \lg y^2$$

$$x = y^2$$

$$y^2 = 3y$$

$$y^2 + y = 4$$

$$y - y + 4 = 0$$

$$1 \pm \sqrt{1+16} = 1 \pm \sqrt{17}$$

$$y = 31$$

$$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$$