МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Воспользуемся тождествами: $\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (1) и $\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (2). Исходное уравнение преобразуется так: $2\cdot\cos5x\cdot\cos2x-\sqrt{2}\cdot\cos10x=2\cdot\sin5x\cdot\cos2x$. Перенесём всё влево: $2\cdot(\cos5x-\sin5x)\cdot\cos(2x)-\sqrt{2}\cdot\sin\left(10x+\frac{\pi}{2}\right)=0$. (*) Здесь учтено, что $\sin\left(10x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos10x$. Воспользуемся тождествами $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ (3) и $\sin2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ (4). Уравнение (*) перепишется так:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos2x-2\sqrt{2}\cdot\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Вынесем за скобки $2\sqrt{2}\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\cos2x-\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=0\ (**)$$

Теперь $\cos2x-\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(-5x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{7}{2}\cdot x+\frac{3\pi}{8}\right)$, согласно тождеству (2), а потому уравнение (**) равносильно такому:

$$4\sqrt{2}\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{7}{2}\cdot x+\frac{3\pi}{8}\right)=0.$$

Это уравнение распадается на три: $\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; $\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)=0$; $\cos\left(\frac{7}{2}x+\frac{3\pi}{8}\right)=0$; решениями которых будут соответственно:

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\cdot n$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\cdot n$; $x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\cdot n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\cdot n$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\cdot n$; $x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\cdot n$; $n\in\mathbb{Z}$

№3.

Поскольку логарифм определён только для положительных значений аргумента, то из первого уравнения системы получим: $y>0$; $-xy>0$, то есть $x<0$; $y>0$. Удобства ради

Сделаем замену $x=-t$. Система перепишется так:

$$\begin{cases} \left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y} = t^{\lg(ty)} \\ 2y^2+ty-t^2+4t-8y=0 \end{cases}$$

Предположим теперь, что $t=1$. Тогда первое уравнение будет выглядеть так: $\left(\frac{1}{y^2}\right)^{\lg y} = 1^{\lg y}$

Заметим, что $1^{\lg y}=1$ при всех допустимых значениях y, а $\left(\frac{1}{y^2}\right)^{\lg y} = \frac{1}{y^{2\cdot\lg y}}$. Значит $\frac{1}{y^{2\cdot\lg y}}=1$ и $y^{2\cdot\lg y}=1$. Логарифмируем: $(2\cdot\lg y)\cdot\lg y=\lg 1$; $2\cdot\lg^2 y=0$, $\lg y=0$, $y=1$.

Значения $t=1$, $y=1$ не удовлетворяют второму уравнению системы. Поэтому наше предположение неверно, и $t\neq 1$.

Поскольку $t\neq 1$, то $\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{t^4}{\left(t^{\log_t y}\right)^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{t^4}{\left(t^{\frac{\lg y}{\lg t}}\right)^2}\right)^{\lg y} =$

$= \left(\frac{t^4}{t^{\frac{2\cdot\lg y}{\lg t}}}\right)^{\lg y} = t^{4\cdot\lg y-\frac{2\cdot\lg^2 y}{\lg t}}$, и $t^{\lg(ty)}=t^{\lg t+\lg y}$. Первое уравнение тогда равносильно такому: $t^{4\cdot\lg y-\frac{2\cdot\lg^2 y}{\lg t}} = t^{\lg t+\lg y}$.

Поскольку $t\neq 1$ то показатели степеней равны:

$$4\cdot\lg y-\frac{2\lg^2 y}{\lg t} = \lg t+\lg y.$$ После умножения на $\lg t$ получим

$\lg^2 t-3(\lg t)\cdot(\lg y)+2\lg^2 y=0$, откуда $\lg t=\lg y$ или $\lg t=2\cdot\lg y$.

В первом случае $t=y$, во втором $t=y^2$.

Случай 1. $t=y$. Подставляя во второе уравнение системы, получим $2y^2-4y=0$, откуда $y=0$ или $y=2$. С условием $y>0$, подходит только $y=2$, тогда $t=y=2$, $x=-t=-2$. Здесь исходная система имеет решение $(-2;2)$.

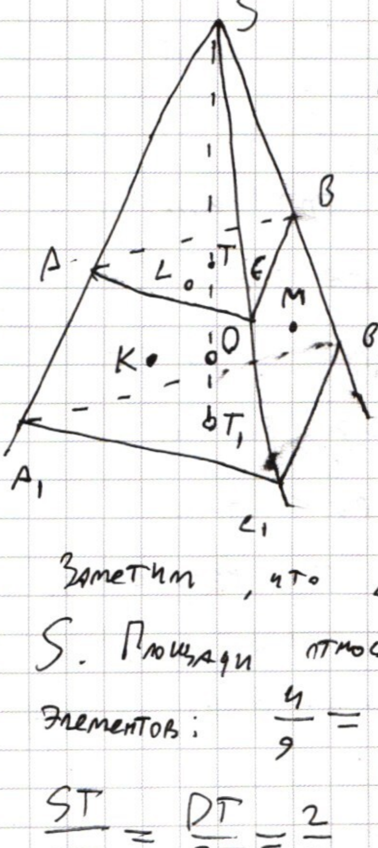
Случай 2. $t=y^2$. Подставляя во второе уравнение системы, получим $-y^4+y^3+6y^2-8y=0$. Это уравнение раскладывается на множители: $-y(y-2)\cdot(y^2+y-4)=0$. Решениями будут

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_1=0$, $y_2=2$, $y_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. С условием $y>0$, подходят только $y=2$ и $y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. Если $y=2$, то $x=-t=-y^2=-4$.
Если $y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ то $x=-t=-y^2=\frac{\sqrt{17}-9}{2}$

Ответ: $(-2;2)$; $(-4;2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

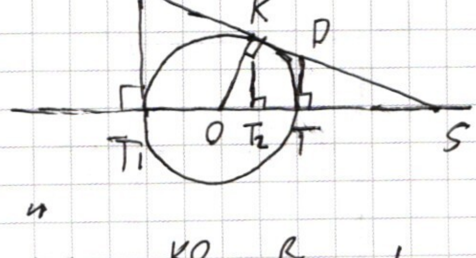
№4.



На чертеже слева $SABC$ – данный трёхгранный угол; плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ касаются сферы и перпендикулярны SO; T и T_1 – точки касания сферы с ними, K лежит в плоскости (SAC). Очевидно, T и T_1 лежат на SO, так как радиус перпендикулярен касательной плоскости.

Пусть $D=AC\cap(KSO)$, $D_1=A_1C_1\cap(KSO)$.

Заметим, что $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ гомотетичны с центром гомотетии S. Площади относятся как квадраты соответственных линейных элементов: $\frac{4}{9}=\frac{(DT)^2}{(D_1T_1)^2}$, откуда $\frac{DT}{D_1T_1}=\frac{2}{3}$. Видно, что $\frac{ST}{ST_1}=\frac{DT}{D_1T_1}=\frac{2}{3}$ из той же гомотетии.



Пусть R – радиус сферы. Тогда $TT_1=2R$. и $ST_1=ST+TT_1=ST+2R$.

Значит $\frac{ST}{ST+2R}=\frac{2}{3}$, откуда $ST=4R$. и

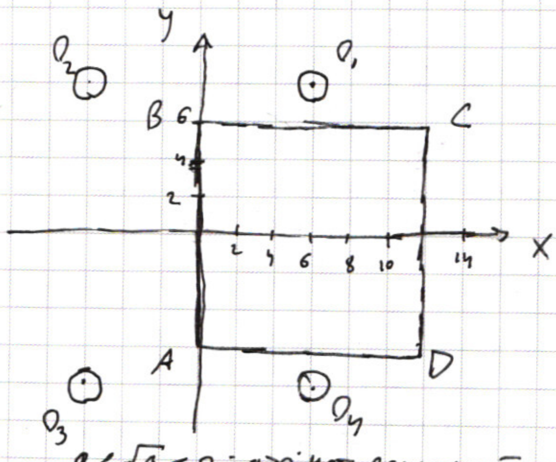
$SO=ST+TO=4R+R=5R$. Тогда $\sin\angle KSO=\frac{KO}{SO}=\frac{R}{5R}=\frac{1}{5}$

и $\angle KSO=\arcsin\frac{1}{5}$. Здесь учтено, что $\angle OKS=90^\circ$, поскольку

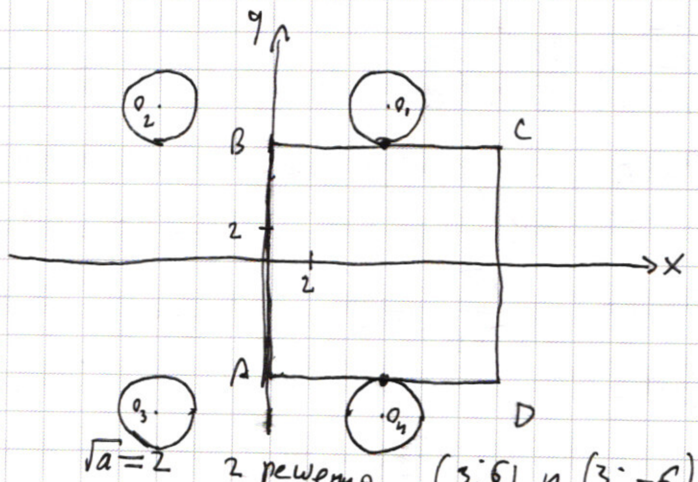
KO - касательная. Пусть T_2 - проекция K на T_2. Тогда $\Delta KSO \sim \Delta T_2KO$, и $\frac{KO}{SO} = \frac{T_2O}{KO}$, значит $T_2O = \frac{(KO)^2}{SO} = \frac{R^2}{5R} = \frac{R}{5}$.
$ST_2 = SO - T_2O = 5R - 0{,}2R = 4{,}8R$. Ясно, что сечение KLM есть треугольник, гомотетичный ΔABC с коэффициентом $\frac{ST_2}{ST} = \frac{4{,}8R}{4R} = 1{,}2$. Поскольку площади относятся как квадрат коэффициента гомотетии, то $\frac{S_{\text{сечения}KLM}}{4} = 1{,}2^2$, откуда $S_{\text{сечения}KLM} = 5{,}76$ Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{5}$, $S_{\text{сечения}KLM} = 5{,}76$

№5

Введём координатную плоскость Oxy и отметим на ней точки $A(0;-6)$; $B(0;6)$; $C(12;6)$; $D(12;-6)$; $O_1(6;8)$, $O_2(-6;8)$, $O_3(-6;-8)$; $O_4(6;-8)$. Тогда графиком первого уравнения системы будут стороны квадрата ABCD. При $a<0$ второе уравнение системы не имеет решений, при $a=0$ решения его - точки O_1, O_2, O_3, O_4; при $a>0$, решение изобразится частями окружностей, а именно: от окружности с центром O_i берётся часть, лежащая в i-том квадранте, радиусы всех окружностей равны $\sqrt{a}$. Из графиков ниже ясно, что два решения будут при $a=4$, ~~...~~, $a=100$, ~~...~~.

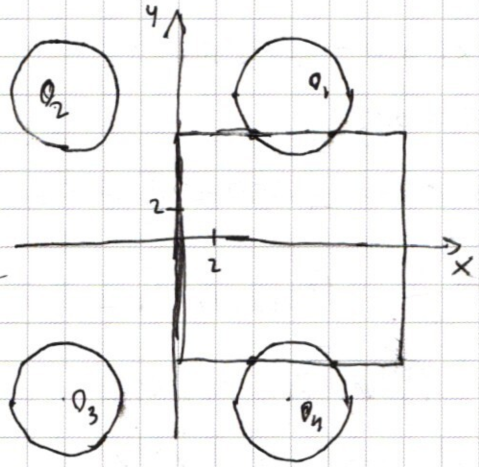


$0 \le \sqrt{a} < 2$; $a \ge 0$; нет решений.



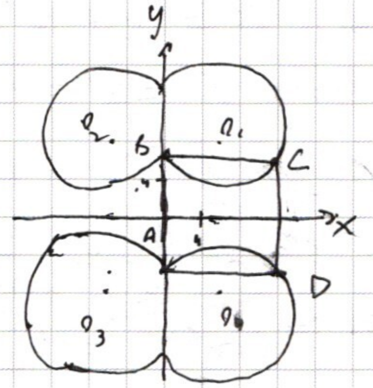
$\sqrt{a} = 2$
$a=4$.
2 решения. $(3;6)$ и $(3;-6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



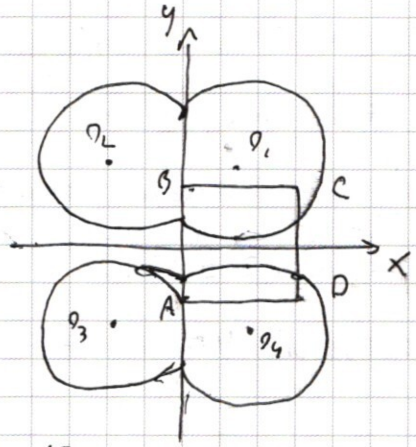
$4 < a < 6^2+2^2$

4 решения.

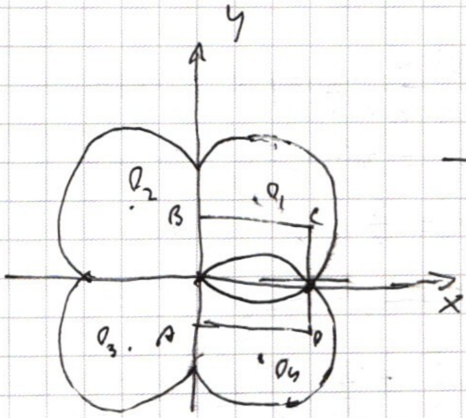


$a=40$

4 решения.

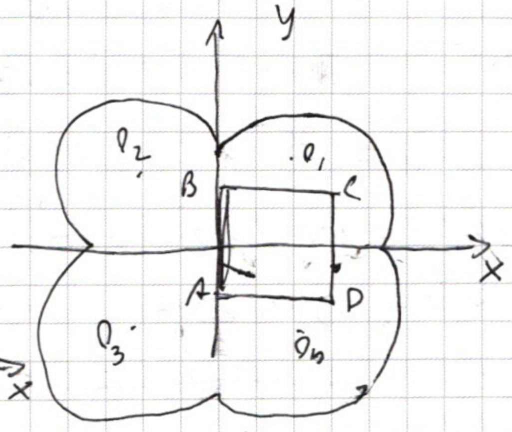


$40<a<100$ 4 решения.



$a=100$

2 решения $(0;0)$ и $(12;0)$

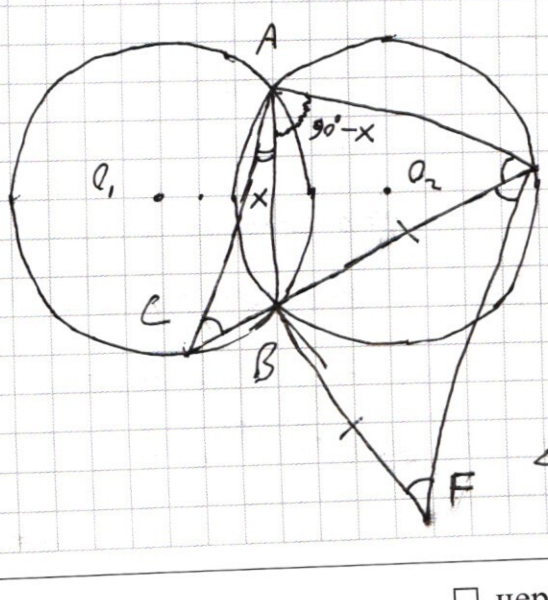


$a>100$

нет решений.

Ответ: $a_1=4$ $a_2=100$

№6



а) $\angle ACD = \angle ADC$ ибо они вписаны в равные окружности и опираются на равные дуги. Поэтому

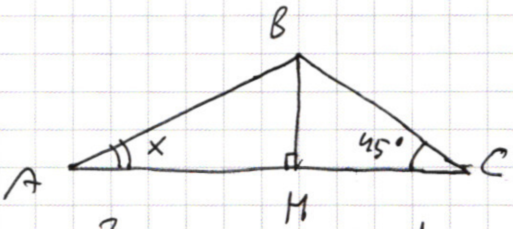
$$\angle ACD=\angle ADC=\frac{180°-\angle CAD}{2}=\frac{180°-90°}{2}=45°$$

Поскольку $BD=BF$ то $\angle BDF=\angle BFD$. $\angle DBF=90°$ по условию, поэтому

$\angle BDF = \angle BFD = \frac{180^\circ - \angle DBF}{2} = 45^\circ$. Пусть $\angle CAB = x$, тогда $\angle DAB = \angle CAD - \angle CAB = 90^\circ - x$. Обозначим R — радиус окружностей.

Из $\triangle ABC$ по теореме синусов $BC = 2R \cdot \sin x$, а из $\triangle ABD$ по теореме синусов $BD = 2R \cdot \sin(90^\circ - x) = 2R \cdot \cos x$. Поскольку $\angle CBF = 90^\circ$ то по теореме Пифагора $CF^2 = BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2 = (2R \cdot \sin x)^2 + (2R \cdot \cos x)^2 = 4R^2$, значит $CF = 2R = 2 \cdot 13 = 26$.

б) По теореме синусов для $\triangle ABC$: $AB = 2R \cdot \sin \angle ACD = 2R \cdot \sin 45^\circ = R \cdot \sqrt{2} = 13 \cdot \sqrt{2}$. и $\sin x = \frac{BC}{2R} = \frac{10}{2 \cdot 13} = \frac{5}{13}$. Поскольку x — острый угол, то $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{12}{13}$ Проведём в $\triangle ABC$



высоту BH. Видно, что $AC = AH + CH = AB \cdot \cos x + BC \cdot \cos 45^\circ = (13\sqrt{2}) \cdot \frac{12}{13} + 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$.

Заметим, что $\operatorname{tg} \angle CFB = \frac{CB}{BF} = \frac{BC}{BD} = \frac{2R \cdot \sin x}{2R \cdot \cos x} = \operatorname{tg} x$. Значит $\angle CFB = x$ и $\angle BCF = 180^\circ - (\angle CBF + \angle CFB) = 90^\circ - \angle CFB = 90^\circ - x$.

Тогда $\sin \angle BCF = \cos x = \frac{12}{13}$, $\cos \angle BCF = \sin x = \frac{5}{13}$.

$\sin \angle ACF = \sin(\angle ACD + \angle BCF) = \cancel{\sin(45^\circ + x) = \sin 45^\circ \cdot \cos}\ \sin(45^\circ + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \cdot \sin \angle BCF = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{12}{13} = \frac{17}{13 \cdot \sqrt{2}}$

$CF = 26$ согласно пункту а. Тогда $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot (17\sqrt{2}) \cdot 26 \cdot \frac{17}{13\sqrt{2}} = 17^2 = 289$

Ответ: а) $CF = 26$, б) $S_{ACF} = 289$

№7.

Поскольку x и y целые, то неравенство $y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x$ равносильно неравенству $y \le 84 + (3^{81} - 1) \cdot x$. Сравнивая с первым неравенством системы, найдём что $3^x + 4 \cdot 3^{81} \le 84 + (3^{81} - 1) \cdot x$

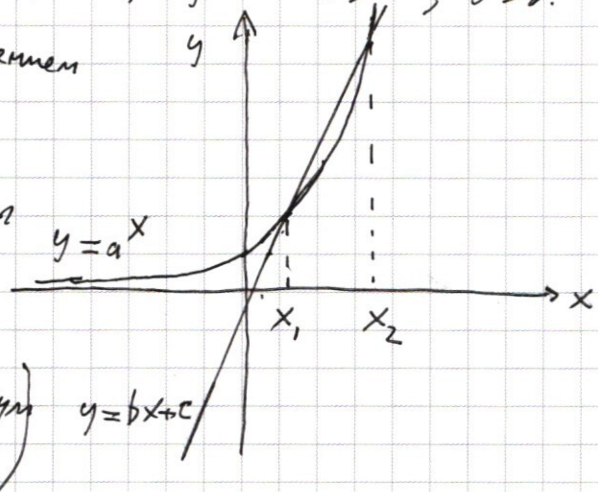
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

или $3^x-(3^{81}-1)\cdot x+(4\cdot 3^{81}-84)\le 0$. Мы получили неравенство вида $a^x-bx-c\le 0$, где $a>1$, $b>0$.

По графику видно, что решением будет $x\in[x_1;x_2]$

где x_1, x_2 – корни уравнения

$a^x-bx-c=0$.



(Очевидно, что оно имеет максимум 2 корня.)

Подбором устанавливаем что $4<x_1<5$; $84<x_2<85$.

$$\begin{cases} y\ge 3^x+4\cdot 3^{81} \\ y\le 84+(3^{81}-1)\cdot x \end{cases}$$

значит $5\le x\le 84$, ибо x – целое. Видно, что каждому значению x соответсвует $(84+(3^{81}-1)x)-(3^x+4\cdot 3^{81})+1$ $=85+(3^{81}-1)x-3^x-4\cdot 3^{81}$ значений y. Всего пар столько же, сколько значений y, а именно:

$$\sum_{x=5}^{84}\left(85+(3^{81}-1)\cdot x-3^x-4\cdot 3^{81}\right)=3361{,}5+39{,}5\cdot 3^{85}$$

Ответ: $3361{,}5+39{,}5\cdot 3^{85}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2}\cdot\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt2}\cdot\sin\alpha\right) = \sqrt2\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$\cos\alpha+\cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha+\sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\cdot\cos5x\cdot\cos2x - \sqrt2\cdot\cos10x = 2\cdot\sin5x\cdot\cos2x$

$2\cdot\cos2x\cdot(\cos5x-\sin5x) - \sqrt2\cdot\cos10x = 2\cdot\cos2x\cdot\sqrt2\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+10x\right) =$

$= 2\sqrt2\cdot\cos2x\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt2\cdot2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sqrt2\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

$\cdot\left(\cos2x - \sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)\right)$; $\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ или $\cos2x = \sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos2x - \sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) - \sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sin\left(-5x-\frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\cdot\sin\frac{\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)}{2}\cdot\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+7x}{2} = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{7}{2}x+\frac{3\pi}{8}\right).$

$\frac{\pi}{2}+2x-5x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}-3x$ $\quad \frac{\pi}{2}+2x+5x+\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}+7x$

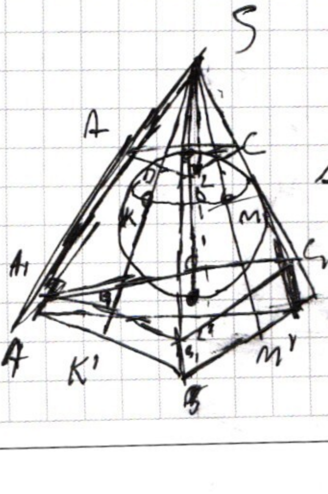
$4\sqrt2\cdot\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{7}{2}x+\frac{3\pi}{8}\right)=0$

$\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad 5x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n \quad 5x=\frac{\pi}{4}+\pi n \quad x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\cdot n$

$\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3}{2}x\right)=0 \quad -\frac{\pi}{8}+\frac{3}{2}x=\pi n \quad \frac{3}{2}x=\frac{\pi}{8}+\pi n. \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\cdot n$

$\cos\left(\frac{7}{2}x+\frac{3\pi}{8}\right)=0 \quad \frac{7}{2}x+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi n \quad \frac{7}{2}x=\frac{\pi}{8}+\pi n \quad x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}\cdot n$

№3.



$\frac{AB}{A_1B_1} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$

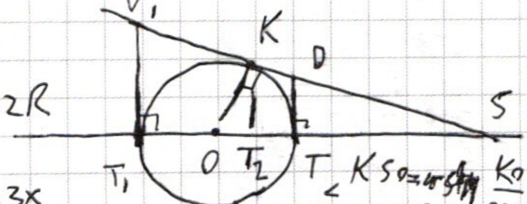
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

$ST = x \quad ST_1 = ST + TT_1 = x+2R$

$\frac{2}{3} = \frac{x}{x+2R} \quad 2(x+2R)=3x$

$2x+4R=3x \quad x=4R \quad SO = x+R = 5R.$

$\frac{2}{3} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{DT}{D_1T_1} = \frac{ST}{ST_1}$



$\angle KSO = \arcsin\frac{KO}{OS} = \arcsin\frac{R}{5R} = \arcsin\frac{1}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

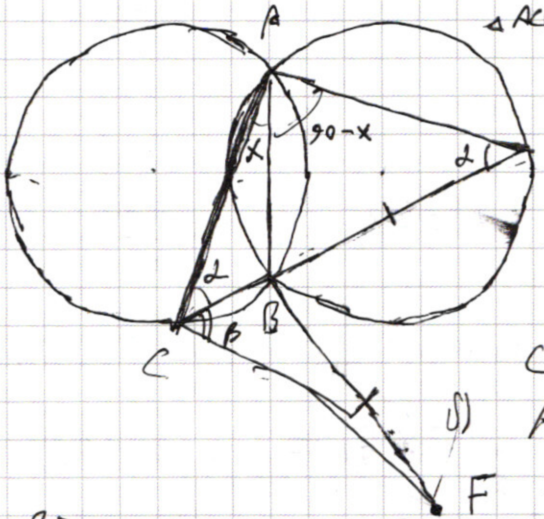
$OT_2 = \cancel{\sqrt{...}}$ $\frac{OK^2}{SO} = \frac{R^2}{5R} = \frac{R}{5} = 0{,}2R$

$ST_2 = SO - OT_2 = 5R - 0{,}2R = 4{,}8R$

$\frac{ST_2}{ST} = \frac{4{,}8R}{4R} = \frac{4{,}8}{4} = 1{,}2$ $\frac{S_{сеч\,KLM}}{S_{сеч\,...}} = 1{,}2^2 = 1{,}44$

$S_{сеч\,KLM} = 4 \cdot 1{,}44 = 5{,}76$

№6.



$\triangle ACD$: $\alpha + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$ $\alpha = 45^\circ$

$\triangle BFD$: $\angle B = 90^\circ$, $\angle D = \angle F = 45^\circ$

$2R = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin x}$ $BC = \frac{AB}{\sin\alpha}\cdot\sin x = 2R\cdot\sin x$

$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\cos x}$ $BD = \frac{AB}{\sin\alpha}\cdot\cos x = 2R\cdot\cos x$

$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2} = 2R = 2\cdot 13 = 26$.

$AB = 2R\cdot\sin\alpha = 2R\cdot\sin 45^\circ = R\cdot\sqrt{2} = 13\cdot\sqrt{2}$

$\sin x = \frac{BC}{2R} = \frac{10}{2\cdot 13} = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos x = \frac{12}{13}$.

$BD = 2R\cdot\cos x = 2\cdot 13\cdot\frac{12}{13} = 2\cdot 12 = 24$. $CF = 26$. $\sin\beta = \frac{BF}{CF} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$.

$\cos\beta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$. $\sin\angle ACF = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{13} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{12}{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{17}{13}$.

$S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\cdot(17\sqrt{2})\cdot 26\cdot\frac{17}{13\sqrt{2}} = 17\cdot\sqrt{2}\cdot 13\cdot\frac{17}{13\cdot\sqrt{2}} = 17^2 = 289$.

$AC = AB\cdot\cos x + BC\cdot\cos\alpha = 13\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{12}{13} + 10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$.

№7.

$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)\cdot x \end{cases}$ $4\cdot 3^{81} < 3^x + 4\cdot 3^{81} \leq 84 + (3^{81}-1)\cdot x$ $4\cdot 3^{81} - 84 < (3^{81}-1)x$

$x > \frac{4\cdot 3^{81} - 84}{3^{81}-1} = 4\cdot\frac{3^{81}-21}{3^{81}-1}$

$= 4\cdot\frac{3^{81}-1-20}{3^{81}-1} = 4\left(1 - \frac{20}{3^{81}-1}\right) > 4\cdot 0{,}99 = 4 - 0{,}04 = 3{,}96$.

$3^{81} - 1 = 3\cdot 3^{80} - 1 = 3^{80} + 3^{80} + 3^{80} - 1 > 2\cdot 3^{80}$ $\frac{1}{3^{81}-1} < \frac{1}{2\cdot 3^{80}}$ $\frac{20}{3^{81}-1} < \frac{20}{2\cdot 3^{80}} = \frac{10}{3^{80}} < \frac{1}{100}$

$3^{80}/10 > \frac{3^7}{10} = 218{,}7 > 100$ $1 - \frac{20}{3^{81}-1} > 0{,}99$ $\boxed{x \geq 4}$

$\frac{729\cdot 3}{2187}$ $x = 4 + t$ $3^{4+t} + 4\cdot 3^{81} \leq 84 + \cancel{4\cdot 3^{81}} - 4 + t\cdot 3^{81} - t$ $3^4\cdot 3^t \leq 80 + t(3^{81}-1)$

$5\cdot 3^{81} = 3^{81} + 4\cdot 3^{81} \overset{?}{<} 84 + (3^{81}-1)\cdot 81 = 3 + 81\cdot 3^{81}$ верн.

$3^{85} + 4\cdot 3^{81} \overset{?}{\leq} 84 + (3^{81}-1)\cdot 85 = -1 + 85\cdot 3^{81}$ $3^{85} + 4\cdot 3^{81} = 81\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} = 85\cdot 3^{81}$

$85\cdot 3^{81} \leq 85\cdot 3^{81} - 1$ — неверно. $3^{84} + 4\cdot 3^{81} = 27\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} = 31\cdot 3^{81}$

$3^{84} + 4\cdot 3^{81} \leq 84 + (3^{81}-1)84 = 84\cdot 3^{81}$ $84 \leq x_2 \leq 85$

$31\cdot 3^{81} \leq 84\cdot 3^{81}$ — верно.

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg t = \lg y$, или $\lg t = 2\lg y$ $\quad t = y$ или $t = (6^{\lg y})^2 = y^2$ или $t = 1$.

$t=1$. $\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{1}{y^2}\right)^{\lg y} = \frac{1}{y^{2\cdot\lg y}}$ $\quad t^{\lg(ty)} = 1$, $t^{\lg y} = 1$

$y^{2\lg y} = 1$ $\quad (2\lg y)\cdot\lg y = \lg 1 = 0$

$2\cdot\lg^2 y = 0$ $\quad \lg y = 0$, $t=1 \Rightarrow \lg t = 0$ $\quad t = y = 1$.

$t = y$

$2y^2 + ty - t^2 + 4t - 8y = 2y^2 + \cancel{y^2} - \cancel{y^2} + 4y - 8y = 2y^2 - 4y = 2y(y-2) = 0$.

$y \neq 0$, $y = 2$, $t = 2$. $\Rightarrow$ $x = -2$, $y = 2$

$t = y^2$; $2y^2 + ty - t^2 + 4t - 8y = 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = -y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y =$

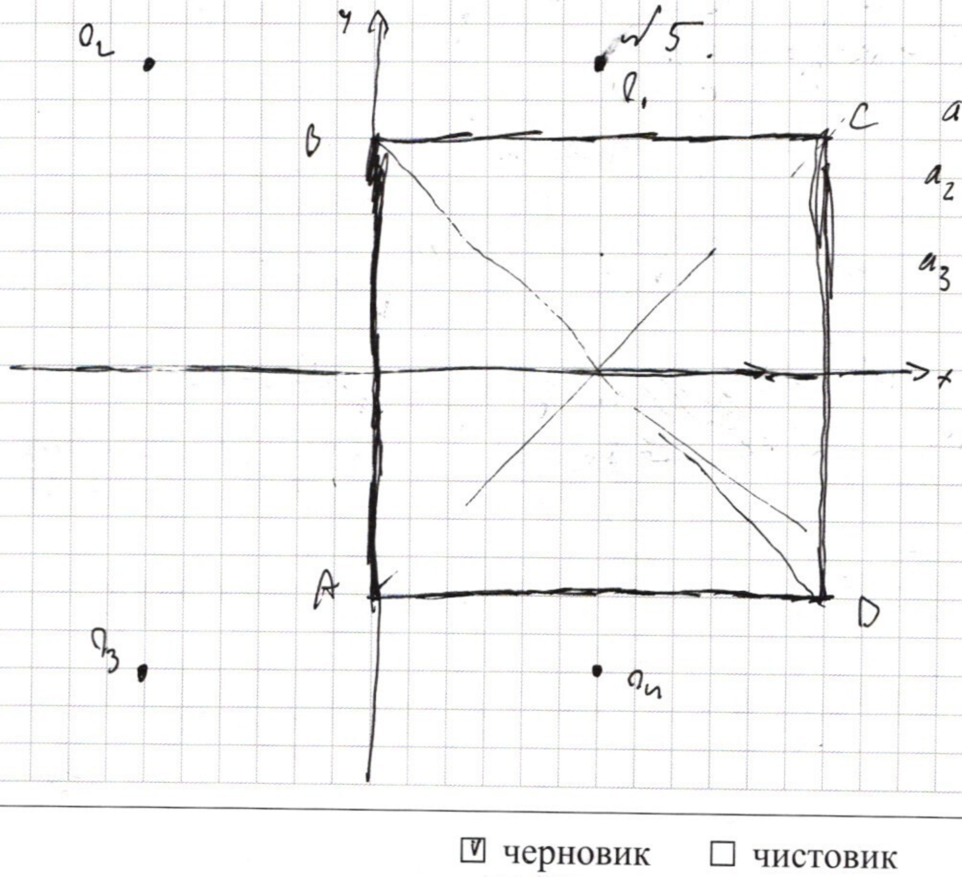
$= y(-y^3 + y^2 + 6y - 8) = -y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = -y(y-2)(y^2 + y - 4)$

$y \neq 0$, $y = 2$. $\quad y^2 + y - 4 = 0$ $\quad y^2 + y + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4} = \frac{17}{4}$. $\quad y + \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$, $y > 0$, $y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. $\quad t = y^2 = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

$y = 2$ $\quad t = y^2 = 4$, $x = -4$ $\quad \Big|\, y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$.

№5.



$a_1 = 2^2 = 4$.

$a_2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$

$a_3 = 6^2 + 8^2 = 100$

$a_4 = 6^2 + 14^2 = 36 + 196 = 232$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$3^3+4\cdot3^{81} \overset{?}{\leq} 84+(3^{81}-1)\cdot 3 = 81+3\cdot3^{81} = 81+3^{82}$ $\quad 3^3+4\cdot3^{81}=27+4\cdot3^{81}=$

$27+3^{82}+3^{81} \leq 81+3^{82}$ — неверно. $\quad =27+(3+1)3^{81}=27+3^{82}+3^{81}$

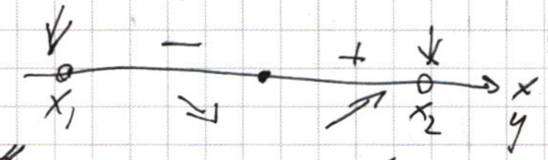
$27+3^{81}\leq 81$ $\quad 4\leq x_1\leq 5$

$3^4+4\cdot3^{81} \overset{?}{\leq} 84+(3^{81}-1)\cdot 4 = 80+4\cdot3^{81}$ $\quad y=a^x-bx-c=0$

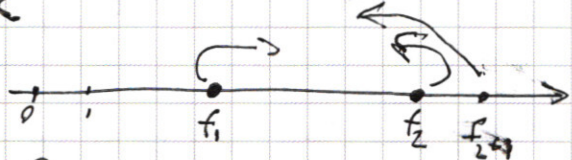
$3^4 \overset{?}{\leq} 80$ неверно. $\quad y'=(\ln a)\cdot a^x-b$

$3^5+4\cdot3^{81} \overset{?}{\leq} 84+(3^{81}-1)\cdot 5 = 5\cdot3^{81}+79$

$3^5 \overset{?}{\leq} 3^{81}+79$ — верно.



$5\leq x\leq 84$ — 80 значений



$F(y)=f_2-(f_1-1)=f_2-f_1+1=(f_2+1)-f_1=$

$=(85+(3^{81}-1)x)-(3^x+4\cdot3^{81})=(85-4\cdot3^{81})+(3^{81}-1)\cdot x-3^x$ — [illegible] y.

Кол-во пар $=\sum_{x=4+1=5}^{3+81=84} F(y) = 80(85-4\cdot3^{81})+(3^{81}-1)\sum_{x=5}^{84}x-\sum_{x=5}^{84}3^x=$

$=80(85-4\cdot3^{81})+(3^{81}-1)\cdot\frac{89\cdot80}{2}-3^5\cdot\sum_{x=0}^{79}3^x=80\cdot85-80\cdot4\cdot3^{81}+40\cdot89\cdot3^{81}-40\cdot89-$

$-3^5\cdot\frac{3^{80}-1}{3-1}=$

$a+aq+aq^2+\dots+aq^n=a\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ $\quad a=3^5 \quad q=3 \quad q^n=\frac{3^{84}}{3^5}=3^{79}$

$80\cdot85-40\cdot89=2\cdot40\cdot85-40\cdot89=40(2\cdot85-89)=40\cdot(170-89)=40\cdot81$

$\frac{85}{2}\ \ 170-89=81$ $\quad =40\cdot81+40\cdot81\cdot3^{81}-\frac{3^5}{2}(3^{80}-1)=40\cdot81+40\cdot3^{85}-\frac{1}{2}\cdot3^{85}+\frac{3^5}{2}=$

$40\cdot89-80\cdot4=40\cdot89-40\cdot8=40\cdot81$ $\quad =3361{,}5+39{,}5\cdot3^{85}$

$81\times40=3240$ $\quad 243:2=121{,}5$

$3240+121{,}5=3361{,}5$

№3.

$y>0$

$-xy>0 \Rightarrow x<0$

Пусть $x=-t$

$$\begin{cases}\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y}=t^{\lg(ty)}=t^{\lg t+\lg y}\\ 2y^2+ty-t^2+4t-8y=0\end{cases}$$

$\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y}=\frac{t^{4\cdot\lg y}}{y^{2\cdot\lg y}}=$

$y=t^{\log_t y}=t^{\log_t 10^{\lg y}}=t^{\lg y\cdot\log_t 10}=t^{\frac{\lg y}{\lg t}}$

$=\frac{t^{4\cdot\lg y}}{\left(t^{\frac{\lg y}{\lg t}}\right)^{2\lg y}}=\frac{t^{4\cdot\lg y}}{t^{\frac{2\lg^2 y}{\lg t}}}=t^{4\lg y-\frac{2\lg^2 y}{\lg t}}$ $\quad 4\cdot\lg y-\frac{2\cdot\lg^2 y}{\lg t}=\lg t+\lg y$

$4\cdot\lg y\cdot\lg t-2\cdot\lg^2 y=\lg^2 t+\lg t\cdot\lg y$

$\lg^2 t-3\cdot\lg t\cdot\lg y+2\cdot\lg^2 y=0, \quad (\lg t-\lg y)\cdot(\lg t-2\lg y)=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)