

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

по формуле суммы в произведение и разность в произведение:

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & : \cos 2x \neq 0 \Rightarrow \\ \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 & \end{cases} \quad \begin{cases} \text{tg } 2x = 1 \\ \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

№3

$$(x^2 y^7)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad (xy^2)^{-2\ln x} &= y^{\ln y - \ln x^2} \\ x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} &= y^{\ln y - 2\ln x} \\ x^{-2\ln x} &= y^{\ln y - 3\ln x} \end{aligned}$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x = (\ln y - 3 \ln x) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y \quad : \ln^2 y \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$$

$$2 \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 - 3 \frac{\ln x}{\ln y} + 1 = 0$$

$$y \frac{\ln x}{\ln y} = t \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4} = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$t = 1 \Rightarrow \ln x = \ln y \Rightarrow x = y$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \ln x = \ln y \Rightarrow \ln x^2 = \ln y \Rightarrow x^2 = y \quad *$$

$$② \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$-y(2x - y) - x(2x - y) + 4(2x - y) = 0$$

$$(2x - y)(4 - x - y) = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \quad **$$

из * и ** $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = y \\ 2x = y \\ y = 4 - x \\ x > 0 \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 2x \\ x = 4 - x \\ x^2 = 4 - x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - 2) = 0 \\ 2(x - 2) = 0 \\ x^2 + x - 4 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$y = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{bmatrix}$$

Ответ: $(0; 0)$
 $(2; 4)$
 $(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

WS.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

① 1) $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ 2y+10=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x \in [-5; 5] \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \\ -x-y-5-y+x-5=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ -2y=20 \end{cases}$

$y = -10$
 $x \in [-5; 5]$

3) $\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \\ x+y+5-y+x-5=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x-5 \\ y < x-5 \\ 2x=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y \in (0; 10) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 > 0 \\ -x-y-5+y-x+5=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x-5 \\ y > x-5 \\ -2x=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y \in (0; -10) \end{cases}$

② 1) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$

2) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases}$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ (x-12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases}$

4) $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ (x+12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$

Когда $W_1 \cap \text{ABCD} = A(5; 0)$, то $a = 74$, и
 $W_3 \cap \text{AB} = A(5; 0) \cup B(5; -10)$
 а т.к. рисунок симметричен относительно Oy , то $W_1 \cap \text{график}$ в т. D, а $W_2 \cap \text{график}$
 в т. B и C $\Rightarrow$ при $a = 74$ — 4 решения. *

т.к. график симметричен и по (*) $\Rightarrow$ то W_1 и W_2 не должны
 1 график, а W_2 и W_3 1 график только в одной точке.

$\Rightarrow W_3$ касается AB в точке F. По графику определим
 координату т. F = (5; -5) и подставим в ур-ие (2)

$$(5-12)^2 + (5-5)^2 = a$$

$$49 = a \Rightarrow a = 49$$

Ответ: $a = 49$.

№ 7.

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x < 76 + 2^{33}x - 2x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x < x(2^{33} - 2) + 76 - 3 \cdot 2^{34} \Rightarrow$$

Методом подбора определим x

$$x=6 \Rightarrow 64 < -12 + 76 \Rightarrow 64 < 64 \Rightarrow x > 6$$

$$x=38 \Rightarrow 2^{38} < 2^{33} \cdot 32 - 76 + 76 \Rightarrow 2^{38} < 2^{38} \Rightarrow x \leq 38$$

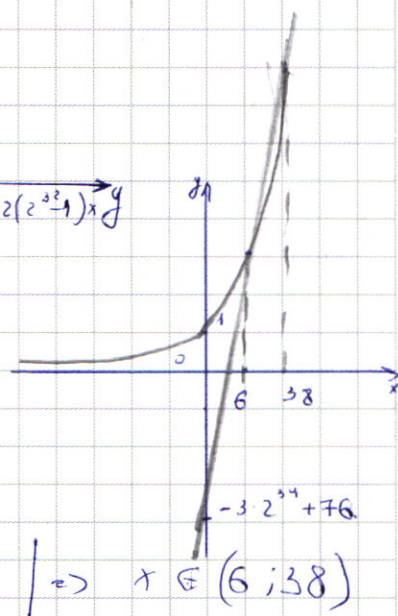
Всего кол-во целых $x = 31$

$$x=7 \Rightarrow y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 14(2^{32} - 1)$$

Опр-лем кол-во целых y :

$$76 + 14 \cdot 2^{32} - 14 - 128 - 3 \cdot 2^{34} = -66 + 2^{33}(7 - 6) = 2^{33} - 66$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

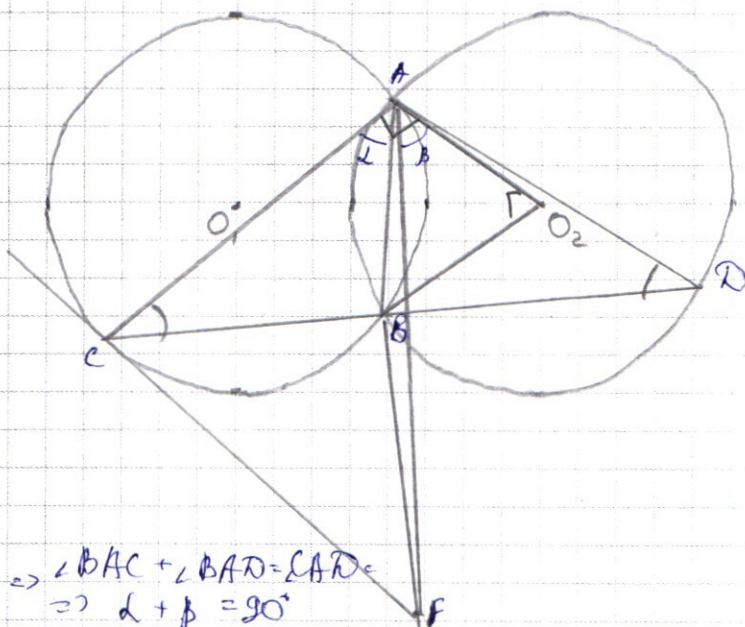
№ 6.

Дано:
 $R_1 = R_2 = 10$

$\angle CAD = 90^\circ$

а) $CF = ?$

б) $BC = 12$
 $S_{\triangle ACF} = ?$



$\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BAC + \angle BAD = \angle CAD = 90^\circ$
 $\angle BAD = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

$\angle AO_2B$ - центральный и опирается на дугу AB $\Rightarrow \angle AO_2B = 2\angle ADB = 90^\circ$
 $\angle ADB$ - вписанный, опирается на дугу AB $\Rightarrow$

$\triangle AO_2B$ - прямоугольный ($AO_2 = O_2B = R$)
 $AB = \sqrt{2}AO_2 = \sqrt{2}R = \sqrt{2 \cdot 10} = 2\sqrt{5}$

$\angle CO_1B = 2\alpha$
 $\angle BO_2D = 2\beta$

$\angle CO_1B = 90 - \alpha$
 $\angle BO_2D = 90 - \beta$ $\Rightarrow$ $BC = 2R \cdot \cos(90 - \alpha)$
 $BD = 2R \cdot \cos(90 - \beta)$

$BC = 2R \cdot \sin \alpha$
 $BD = 2R \cdot \sin \beta$

$\text{Так как } BC^2 + BD^2 = 4R^2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \stackrel{\alpha + \beta = 90^\circ}{=} 4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2$

$\Rightarrow$ По теореме Пифагора $CF^2 = BC^2 + BF^2$

По условию $BF = BD \Rightarrow CF^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = 20$.

б) $BC = 12$

~~$\sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261

$$\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x < 76 + 2^{33}x - 2x - 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^x < 2^{33}(x - 3 \cdot 2) - 2x + 76$$

$$2^x < 2^{33}(x - 6) - 2(x - 38)$$

$$2^x < x(2^{33} - 2) + 76 - 3 \cdot 2^{34}$$

$x = 1$

$$(x - 6) - 2x$$

$$64 < -12 + 76 < 64$$

$$x > 6 \Rightarrow x \in (6; 38)$$

$x = 38$

$$2^{38} < 2^{33} \cdot 32 - 76 + 76$$

$$2^{38} < 2^{38}$$

$$\begin{cases} 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ 76 + 14(2^{32} - 1) \end{cases}$$

$$62 + 7 \cdot 2^{33} - 128 - 3 \cdot 2^{34}$$

$$-66 + 2^{33}(7 - 6)$$

$$2^{33} - 66$$

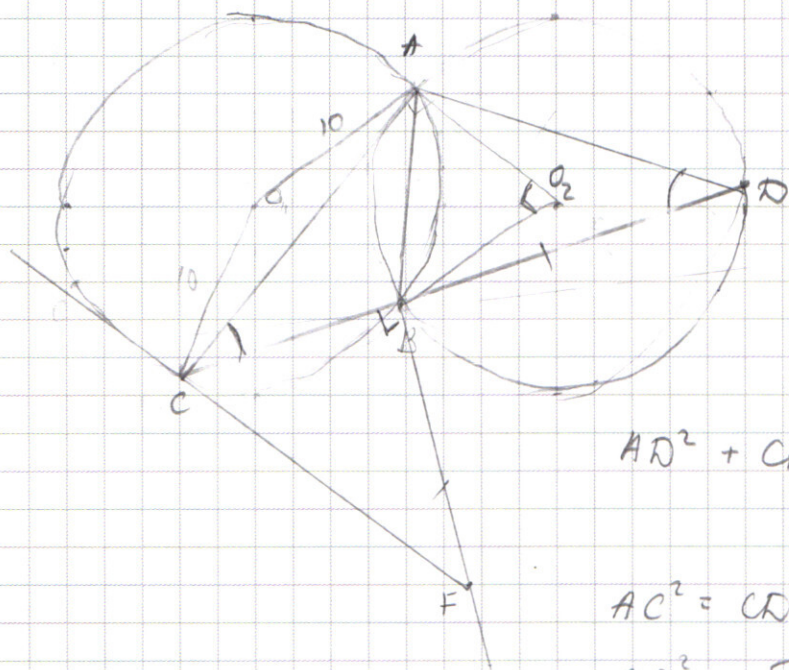
20 31

512 - 60
- 4 52

22³³

$$5) BC = 12$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{12}{20} = 0.6$$



$$AD^2 + CA^2 = CD^2$$

$$AC^2 = CD \cdot BD$$

$$AC^2 = \sqrt{2} AC \cdot BD$$

$\sim AB \perp \text{окр} = \sim AB \perp 2 \text{окр}$, т.к. $AB \sim \text{окр}$.

$\downarrow$

$$R_1 = R_2 \quad |BD| = \frac{AC \sqrt{2}}{2}$$

$$\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$$

$\left. \begin{array}{l} \angle AOB - \text{центральный угол на } \sim AB \text{ 2окр.} \\ \angle ADB - \text{вписан. угол на } \sim AB \text{ 2окр.} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AOB = 2 \angle ADB = 90^\circ$

$\triangle AOB$ - равнобедренный ($AO = OB = R$)

$$AB = \sqrt{2 AO^2} = \sqrt{2} R = \sqrt{2} \cdot 10 = 2\sqrt{5}$$

$$\angle BAC = \alpha$$

$$\angle BAD = \beta$$

$$\angle BAC \neq \angle BAD \Rightarrow \angle CAD = 90^\circ = \alpha + \beta$$

$$\angle COA = 2\alpha$$

$$\angle BOD = 2\beta$$

$$\angle O_1CB = 90 - \alpha$$

$$\angle O_2BD = 90 - \beta$$

$$BC = 2R \cdot \cos(90 - \alpha)$$

$$BD = 2R \cdot \cos(90 - \beta)$$

$$BC = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$BD = 2R \cdot \sin \beta$$

$$\alpha = 90 - \beta$$

$$\text{Тогда } BC^2 + BD^2 = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 4R^2$$

$$\Rightarrow \text{по т. Пифагора } CF^2 = BC^2 + BF^2$$

$$\text{по условию } BF = BD \Rightarrow CF^2 = 4R^2 \quad CF = 2R = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \overset{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 4x} + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \cdot \sqrt{2} \sin 7x - \cos 4x = 0$$

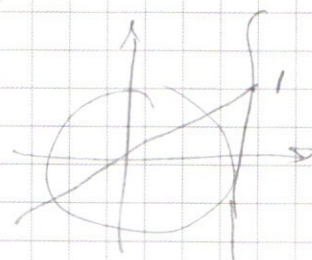
$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

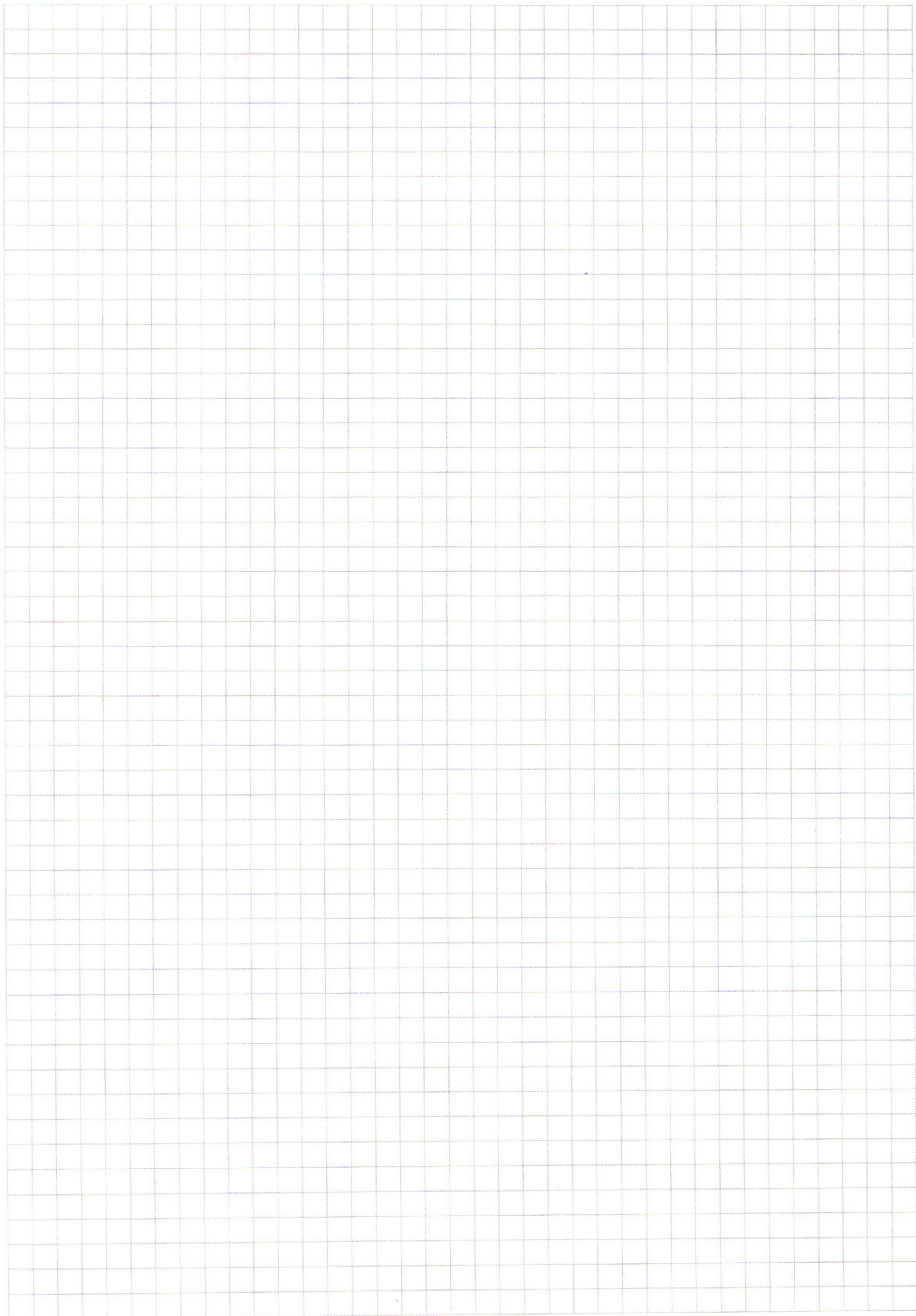
$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{tg } 2x = 1 \\ \end{array} \right.$$

$$\sqrt{2} (\sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cos 3x) - \cos 2x - \sin 2x$$

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \ln 9x + \ln 5x = 0.$$

$$4 \cos^3 3x - 3 \cos 3x - (\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x + 9 \sin x - 4 \sin^3 x + \ln 9x + \ln 5x = 0$$

$$\frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) + \frac{1}{2} (\cos 5x - \cos x)$$

N3

$$2) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$-y(-y + 2x) - x(2x - y) + 4(2x - y) = 0$$

$$(2x - y)(4 - x - y) = 0$$

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$4 - x - y = 0 \Rightarrow y = 4 - x$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = y \\ 2x = y \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2x & x(x-2) = 0 \\ x = 4 - x & 2x - y = 0 \\ x^2 = 4 - x & x^2 - x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y =$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = 1$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2}$$

$$\ln x = \ln y \Rightarrow x = y$$

$$2 \ln x = \ln y \Rightarrow \ln x^2 = \ln y \Rightarrow x^2 = y$$

$$1) (xy)^{-2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$(xy)^{2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$x^{2 \ln x} \cdot y^{2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^2 - 2 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x = (\ln y - 3 \ln x) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y : \ln^2 y$$

$$2 \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 - 3 \frac{\ln x}{\ln y} + 1 = 0$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = t \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ:

$$(0; 0); (2; 4); (2; 2); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right); \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$x > 0 \Rightarrow \sqrt{17}$

NS.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ [(x-12)^2 + (y-5)^2 = a] \\ \sqrt{a} \approx 3, \\ \sqrt{a} = 2 \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y \leq 0 \\ y = 0 \\ x \in [-5; 5] \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \\ x-y-5-y+x-5 = 10 \\ -2y-10 = 10 \\ -2y = 20 \\ y = -10 \\ x \in [-5; 5] \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \\ x+y+5-y+x-5 = 10 \\ 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \\ y \in (0; -10) \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 > 0 \\ -x-y-5+y-x+5 = 10 \\ -2x = 10 \\ x = -5 \\ y \in (0; -10) \end{cases}$$

$$A(5, 0) \Rightarrow (5-12)^2 + 25 = a$$

$$49 + 25 = a$$

$$74 = a$$

$$B(-5, -10) \Rightarrow (5-2)^2 + (10-5)^2 = a$$

$$49 + 25 = a$$

$$74 = a$$

$$C(-5, 0) = (5-12)^2 + 25 = a$$

$$a = 74$$

$$D(5, -10) = (5-12)^2 + 25 = a$$

$$a = 74$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (x+12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$a = 49$$