

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

1) $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$ в наших числах могут использоваться лишь цифры 1, 3, 5, 9, поскольку 3375 не делится на 2, 4, 6, 7, 8, и используя 0 мы получим произведение цифр 0, что не соответствует условию. Из разложения на множители видно, что в нашем числе должно быть три цифры "5". Если мы используем 9, остается одна "3", а значит ещё три "1". Кол-во способов составить число из 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 =$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1120$$

Если не использовать "3", получится число из 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1, 1
способов составить его $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 =$
"5" "3" "1"
 $= 560$. Как мы видим, из трёх "3" можно составить
не более одной "3", а значит другие числа, подхо-
дящих по условию нет $\Rightarrow$ всего $1120 + 560 = 1680$ таких чисел.
Ответ: 1680.

N2

$$\begin{aligned} & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \\ & 2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cdot \sin \frac{11x+3x}{2} - 2 \sin \frac{11x-3x}{2} \cdot \cos \frac{11x+3x}{2} = \sqrt{2} \cos 4x \quad | :2 \\ & \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cdot x \\ & \quad \quad \quad x (\cos 7x + \sin 7x) = 0 \quad * \\ & \quad \quad \quad -\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \sin 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \cos (7x + \frac{\pi}{2})) = \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \cdot x \\ & \quad \quad \quad x \sin (-\frac{\pi}{4}) \sin (7x + \frac{\pi}{4})) = -\sin (7x + \frac{\pi}{4}) \quad ** \end{aligned}$$

$$* \sin 7x = \cos 7x \Rightarrow \tan 7x = 1 \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$** \sin 4x = \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 4x = \pi - (7x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \right. \quad N3$$

$$\left\{ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \right. \quad **$$

$$** x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0;$$

$$(x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$OD3: \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$* \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$(y^3)^{\lg y \cdot \log_y x} = x^{\lg x \cdot \log_y x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \log_y x - 2} = x^{\log_y x}$$

продолжим рассуждения
но $x \neq 1$ случай $x=1$
рассмотрим отдельно

$$\log_x y^{3 \log_y x - 2} = \log_x x^{\log_y x}$$

$$(3 \log_y x - 2) \cdot \log_x y = \log_y x; \log_y x = t$$

$$(3t - 2) \cdot \frac{1}{t} = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_y x = 2 \\ \log_y x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

Подставим в **: ① $\begin{cases} y^2 = 3y \\ y^2 = 4 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y-3) = 0 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \Rightarrow x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \text{ ② } \begin{cases} y = 3y \Rightarrow y = 0 \\ y = 4 - y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

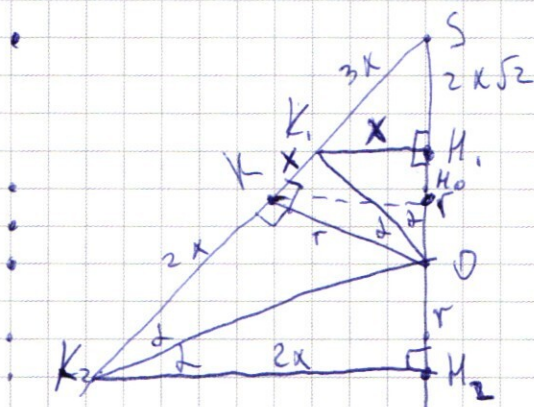
Если $x = 1 \Rightarrow * : (y^5)^0 = y^{2 \lg y} \Rightarrow y^{2 \lg y} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2 \lg y = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

Ответ: $(9; 3); (2; 2); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)$ $\left. \begin{matrix} 1+3 \cdot 1 \neq 1 \\ 1+4 \cdot 1 \neq 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{не подходит}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

- 1) Т.к. площади относятся как 1 к 4 $\Rightarrow$ линейные элементы как 1:2.
- 2) Рассмотрим м-ть SOK :



- 3) Т.к. сфера касается SK в точке $K \Rightarrow OK \perp SK$; OK - радиус.
Обозначим H_1 и H_2 точки сферы, принадлежащие SO , а за K_1 и K_2 - точки на SK , проекциями которых на SO являются H_1 и H_2 соотв.
- 4) Заметим, что т.к. $K_1H_1 \perp SO$ и $K_2H_2 \perp SO \Rightarrow K_1$ и K_2 - точки, принадлежащие плоскостям из 1 пункта, а значит $\frac{K_1H_1}{K_2H_2} = \frac{x}{2x}$ как соответственные э-ты этих плоскостей; $OH_1 = OH_2 = r$.
- 5) $\triangle OH_1K_1 = \triangle OKK_1$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow KK_1 = H_1K_1 = x$
- 6) $\triangle OKK_2 = \triangle OH_2K_2$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow KK_2 = K_2H_2 = 2x$
- 7) Пусть $\angle OK_2H_2 = 2$, тогда и $\angle OK_2K = 2 \Rightarrow \angle KOH_2 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 2 = 180^\circ - 2 \Rightarrow \angle KOH_1 = 180^\circ - (180^\circ - 2) = 2 \Rightarrow \angle KOK_1 = \angle H_1OK_1 = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle OKK_1 \sim \triangle K_2H_2O$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{K_2H_2}{OH_2} = \frac{OK}{KK_1} \Rightarrow \frac{2x}{r} = \frac{r}{x} \Rightarrow$
 $\Rightarrow r^2 = 2x^2 \Rightarrow r = x\sqrt{2}$
- 8) $\triangle SH_1K_1 \sim \triangle SH_2K_2$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{SH_1}{SH_2} = \frac{K_1H_1}{K_2H_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SH_1}{SH_1 + 2x\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow SH_1 = 2\sqrt{5}$$

9) По теореме Пифагора $SK_1^2 = SH_1^2 + K_1H_1^2 = 8x^2 + x^2 \Rightarrow SK_1 = 3x$

10) $\sin \angle KSO = \frac{K_1H_1}{K_1S} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

Ответ 1: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

11) $\frac{SK}{SK_1} = \frac{3x+x}{3x} = \frac{4}{3}$; ~~применяем~~ построения и расчеты для

плоскостей SO_L и SO_M аналогичны, а значит по теореме Фалеса $KL \parallel K_1L_1, KM \parallel K_1M_1, ML \parallel M_1L_1 \Rightarrow (KLM) \parallel (K_1L_1M_1)$,

а т.к. линейные э-ты в этих плоскостях относятся как $\frac{4}{3}$ (Проводим $KH_0, LH_0, MH_0 \perp SO$ и видим подобие $\Delta SK_1H_1 \sim \Delta SKH_0, \Delta SL_1H_1 \sim \Delta SLH_0$ и $\Delta SM_1H_1 \sim \Delta SMH_0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ отношение площадей будет равно квадрату отношений линейных элементов $\Rightarrow S_{KLM} = 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Ответ 2: $S_{KLM} = \frac{16}{9}$

N 5

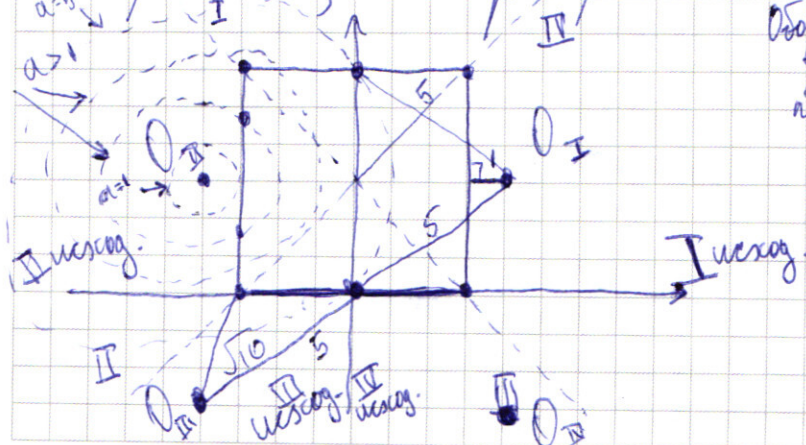
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & * \\ ((x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & ** \end{cases}$$

1) Построим график *: модули обращаются в 0 при $y-3-x=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x+3$, 2-й при $y-3+x=0 \Rightarrow y = 3-x$

Обозначим четверти и расставим знаки модулей в них (четверти получившиеся между прямыми $y=3+x$ и $y=3-x$):

	I	II	III	IV
$y-3-x$	+	+	-	-
$y-3+x$	+	-	-	+



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$I: y-3-x+y-3+x=6 \Leftrightarrow 2y=12 \Leftrightarrow y=6$$

$$II: y-3-x-y+3-x=6 \Leftrightarrow -2x=6 \Leftrightarrow x=-3$$

$$III: -y+3+x-y+3-x=6 \Leftrightarrow -2y=0 \Leftrightarrow y=0$$

$$IV: -y+3+x+y-3+x=6 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$$

1) График первой ф-ции - квадрат с вершинами $(-3;0)$; $(3;0)$; $(3;6)$; $(-3;6)$

2) Рассмотрим функцию $f(x,y)$:

При $a < 0$ решений нет, т.к. сумма квадратов ≥ 0

При $a = 0$: $\begin{cases} |x|=4 \\ |y|=3 \end{cases} \Rightarrow$ имеем 4 пары: $(4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$, ни одна из которых не попадает на 1-й график.

При $a > 0$ имеем в I четверти исходной координатной плоскости окр-ть с центром в $(4;3)$ и радиусом $\sqrt{a}$, или её часть, если окр-ть выходит за пределы, аналогично во II с центром $(-4;3)$, в III с центром $(-4;-3)$ и в IV с центром $(4;-3)$.

Расстояние от O_I и O_{II} до квадрата 1, от O_{III} и O_{IV} $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \Rightarrow$ при $\sqrt{a} \in (0;1) = 0$ точек пересечения, при $a=1$ - 2 касания $\Rightarrow 2$ точки пересечения - подходим, далее пока $\sqrt{a} \leq \sqrt{4^2+3^2}=5$ каждая из O_I и O_{II} даёт по 2 точки $\Rightarrow$ всего не менее 4 $\Rightarrow$ точно не подойдёт. При $\sqrt{a}=5 \Rightarrow a=25$

O_I и O_{II} пересекают в точках $(0;0)$ и $(0;6)$, а O_{III} и O_{IV} - только в точке $(0;0)$ - видно, что за свою четверть они не

выходят. Всего 2 точки $\Rightarrow$ подходит. Заметим, что в данном случае каждая из окружностей пересекает квадрат в самых дальних точках своей плоскости, а значит при увеличении a точек пересечения с квадратом не будет ни у одной из них.

Ответ: ~~два~~ $a=1; a=25$.

N7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} & * \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x & ** \end{cases}$$

** $y_1 = 70 + (2^{64} - 1)x$ - прямая

* $y_2 = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ - показательная функция

** $y_1'(x) = 2^{64} - 1 = \text{const}$

* $y_2'(x) = 2^x \ln 2$ - ^{монотонно} возрастает (1)

Заметим, что при $x=6$ $y_1 = 2^6 + 3 \cdot 2^{65}$; $y_2 = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 6 = 6 \cdot 2^{64} + 2^{64} = 3 \cdot 2^{65} + 2^6 = y_1$

При $x=70$: $y_1 = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65}$; $y_2 = 70 + (2^{64} - 1) \cdot 70 = 70 \cdot 2^{64} = 35 \cdot 2^{65} = 32 \cdot 2^{65} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = y_1$

Кроме того при $x=6$ $y_1'(x) = 2^{64} - 1$; $y_2'(x) = 2^6 \ln 2$; $y_2'(x) < y_1'(x)$
при $x=70$ $y_1'(x) = 2^{64} - 1$; $y_2'(x) = 2^{70} \ln 2$; $y_2'(x) > y_1'(x) \Rightarrow$ левее 6 и правее 70 точек пересечения нет, ~~а между ними их не может быть~~, поскольку левее $y_2(x)$ возрастает медленнее, а правее гораздо быстрее ~~идет~~ исходя из (1). Между 6 и 70 их также не может быть, т.к. если $y_2(x)$ пересекла $y_1(x) \Rightarrow$ она в этой точке уже возрастает быстрее const и дальше пересечений не будет. Так как один из знаков строгости $\Rightarrow$ точки 6 и 70 в расчёт не идут.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит искомое значение можно выразить как

$$\sum_{x=7}^{69} (70 + (2^{64} - 1)x - (2^x + 3 \cdot 2^{65})) = 70 \cdot 63 + (2^{64} - 1) \cdot (7 + 8 + 9 + \dots + 69) -$$

$$- (2^7 + 2^8 + 2^9 + \dots + 2^{69}) - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 70 \cdot 63 + 2^{64} \cdot \frac{38 \cdot 63}{2} -$$

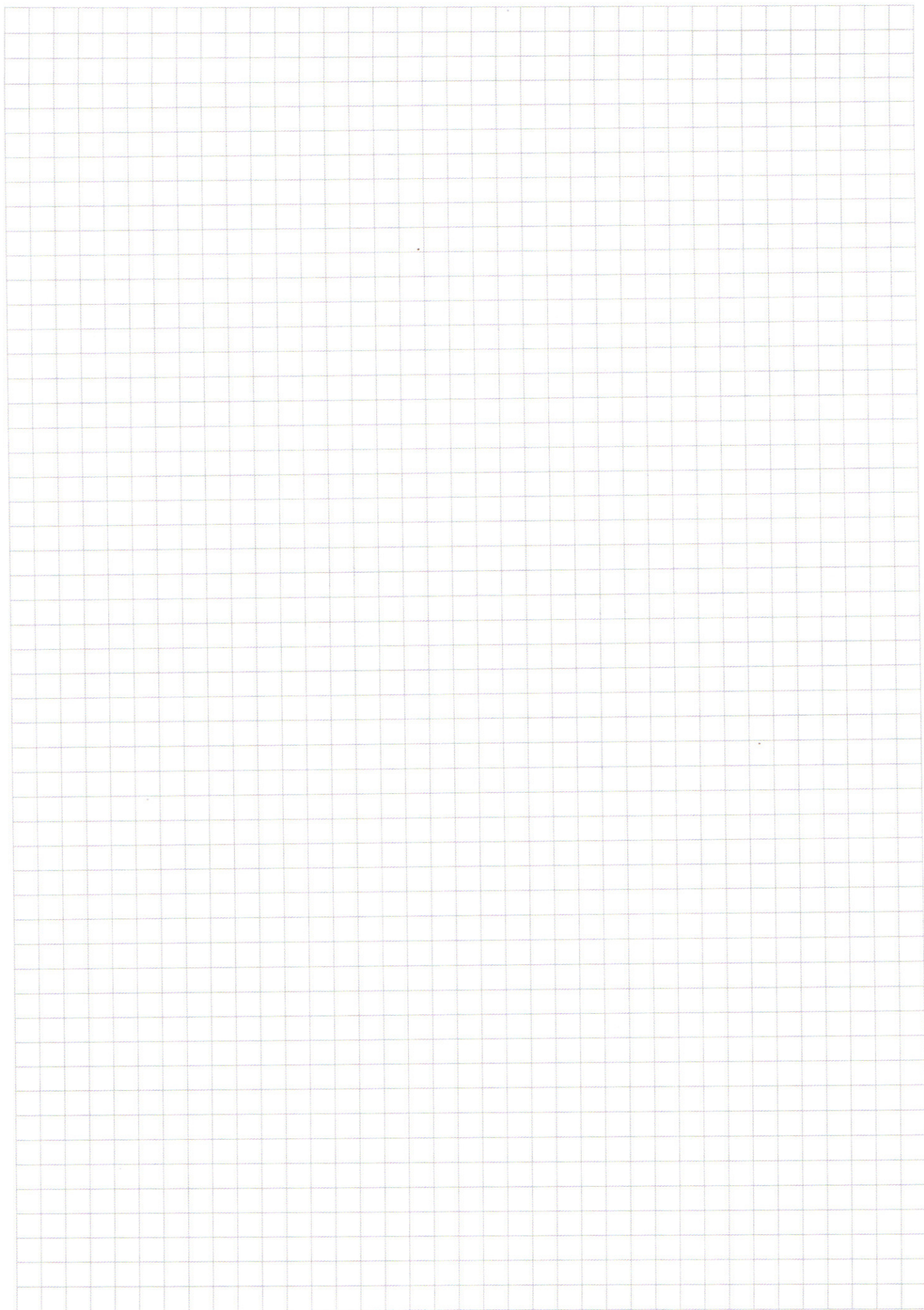
$$- 1 \cdot \frac{38 \cdot 63}{2} - 2^7 (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62}) - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 70 \cdot 63 + 2^{65} \cdot 19 \cdot 63 -$$

$$- 38 \cdot 63 - 2^7 \cdot (2^{63} - 1) - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 32 \cdot 63 + 2^{65} \cdot 63 \cdot 16 - 2^{70} + 2^7 =$$

$$= 32 \cdot 63 + 2^{69} \cdot 63 - 2^{69} \cdot 2 + 32 \cdot 4 = 32 \cdot 67 + 2^{69} \cdot 61$$

В данной сумме для каждого x ~~использованы~~ учтены все соответствующие ему подходящие значения $\Rightarrow$ найдено кол-во пар.

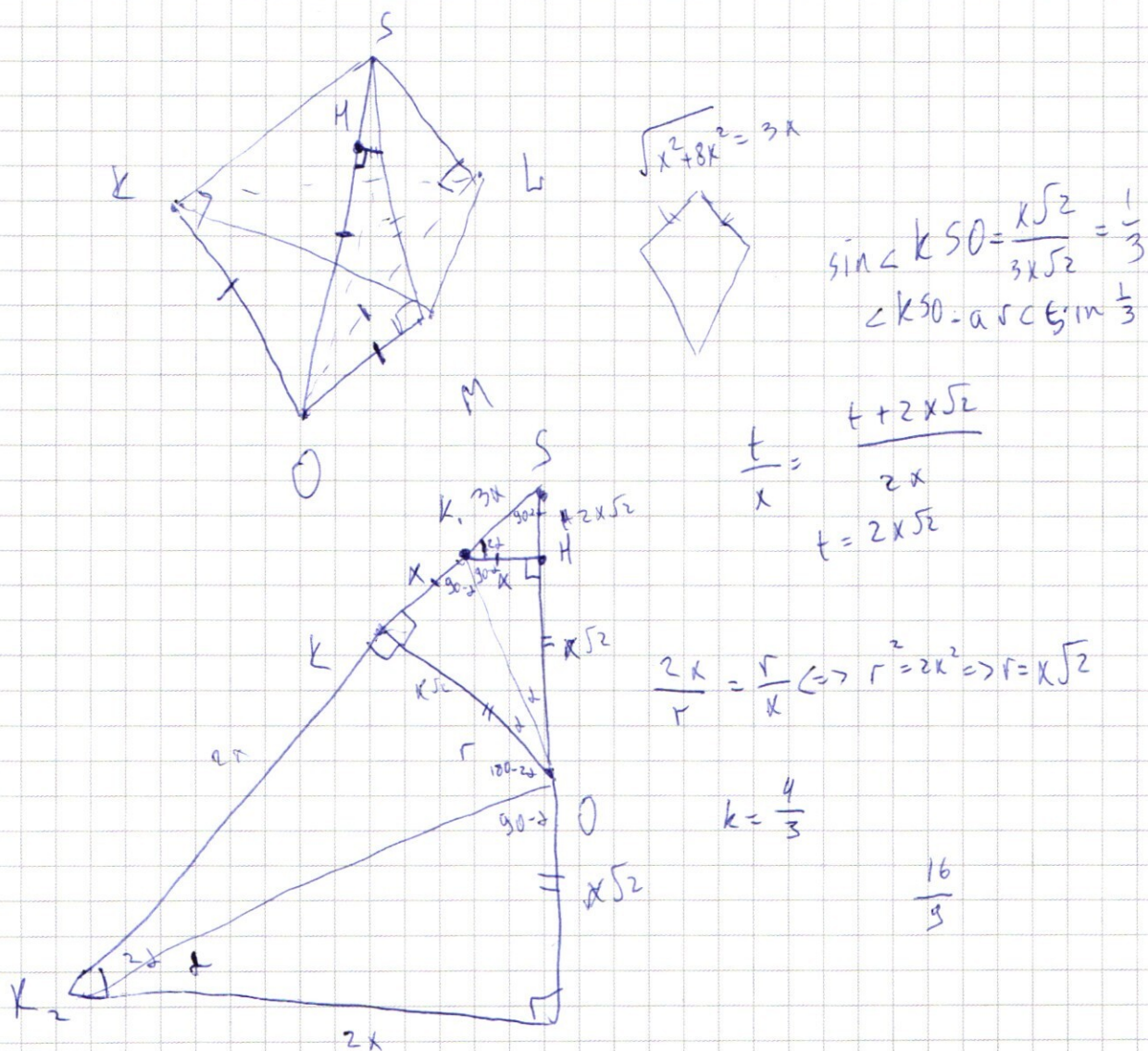
Ответ: $61 \cdot 2^{69} + 32 \cdot 67$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x \in (6; 70)$$

$y = ?$

$$x = 7$$

$$y > 2^7 + 3 \cdot 2^{65} = 128 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot 7 = 63 + 3 \cdot 2^{65} + 2^{64}$$

$$\sum_{x=7}^{69} 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 3 \cdot 2^{65} + 1 = 63 \cdot 71 + 1$$

$$2^{64} - 1$$

$$x = 7$$

$$63 \cdot 71 + (2^{64} - 1) \cdot (7 + 8 + \dots + 69) + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 - \sum_{x=7}^{69} 2^x =$$

$$= 63 \cdot 71 - 38 \cdot 63 + 2^{64} \cdot 38 \cdot 63 + 3 \cdot 63 \cdot 2^{65} - 2^7 - 2^8 - \dots - 2^{69} =$$

$$\frac{76 \cdot 63}{2} = 38 \cdot 63$$

$$= 63 \cdot 33 + 2^{64} \cdot 63 \cdot 22 - 2^7 - 2^8 - \dots - 2^{69} = -2 + 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 64 + 63 \cdot 33 + 2^{65} \cdot 63 =$$

$$= 2^{66} (693 - 16) + 128 + 63 \cdot 33 =$$

$$\sum_{x=7}^{69} 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = 63 \cdot 70 - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65} - 38 \cdot 63 + 19 \cdot 63 \cdot 2^{65} -$$

$$- 2^7 (2^{63} - 1) = 63 \cdot 32 + 63 \cdot 10 \cdot 2^{69} - 2 \cdot 2^{69} + 2^5 \cdot 4 =$$

$$= 32 \cdot 67 + 2^{69} \cdot 61$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$\begin{matrix} 135 \\ 27 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 5, 5, 5 \\ 3, 3, 3, 1, 1 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 3, 3, 3, 1, 1 \\ 3, 3, 1, 1, 1 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} C_8^3 \cdot C_5^2 \cdot C_2^2 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 360 \\ C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 1120 \end{aligned}$$

0:1680

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} &= y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right. \quad \text{ОДЗ: } x > 0; y > 0$$

$$x(x - 2y - 4) - 3y(y - 4) = 0$$

$$\begin{aligned} (x - 3y)(x + y) - 4(x - 3y) &= 0 \\ (x - 3y)(x + y - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg 3 + 5 \lg y} = 3^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^{4 \lg 3 + 2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg 3 + 5 \lg y} = 3^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^{3 \lg 3 + 5 \lg y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3} \quad y^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \quad y = 3$$

$$y^{5\lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{3\lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$x^{\lg y} \cdot \log y^x$$

$$\lg \frac{(4-y)^3}{y^2} = \log_y (4-y) \lg (4-y)$$

$$y^{3\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y}$$

$$y^{\lg\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right)} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$\lg \frac{(4-y)^3}{y^2} = y^{3\lg y} \cdot \log y^x =$$

$$a = x^{2\lg y}$$

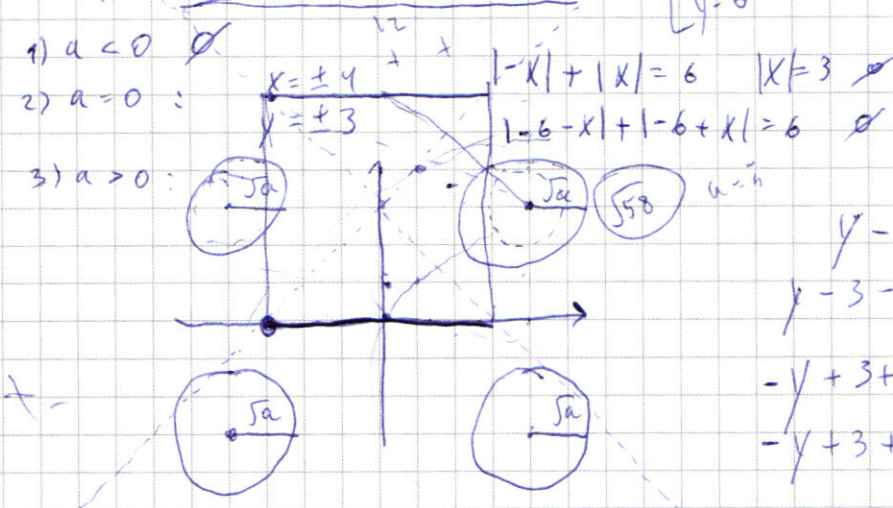
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=6 \end{cases} : \begin{cases} (|x|-4)^2 + 9 = a \\ x^2 - 8|x| = a - 25 \end{cases}$$

$$1) a < 0$$

$$2) a = 0$$

$$3) a > 0$$

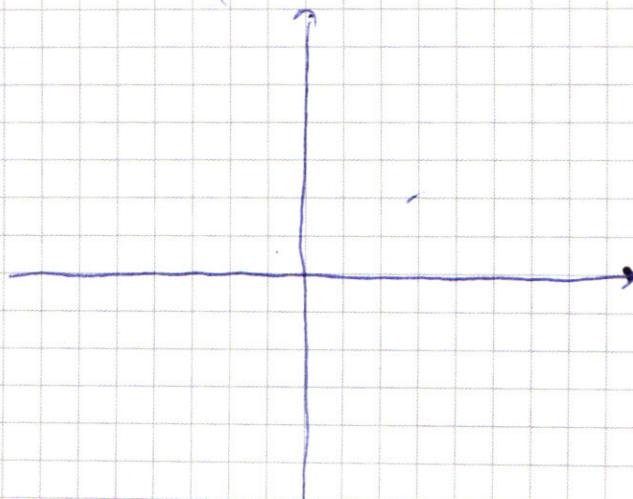


$$\begin{aligned} y-3-x+y-3+x &= 6 \\ y-3-x-y+3-x &= 6 \\ -y+3+x+y-3+x &= 6 \\ -y+3+x-y+3-x &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 6 \\ x &= -3 \\ x &= 3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

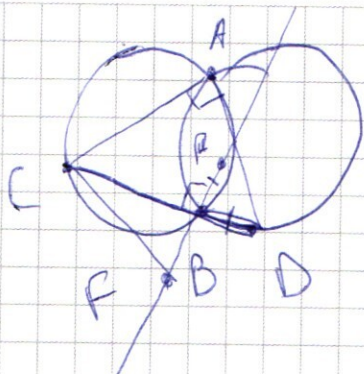
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ x \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$



y

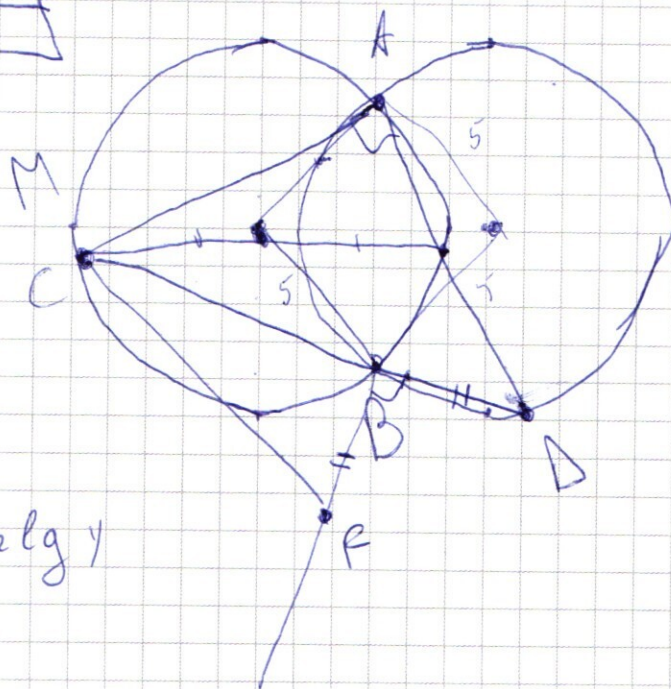
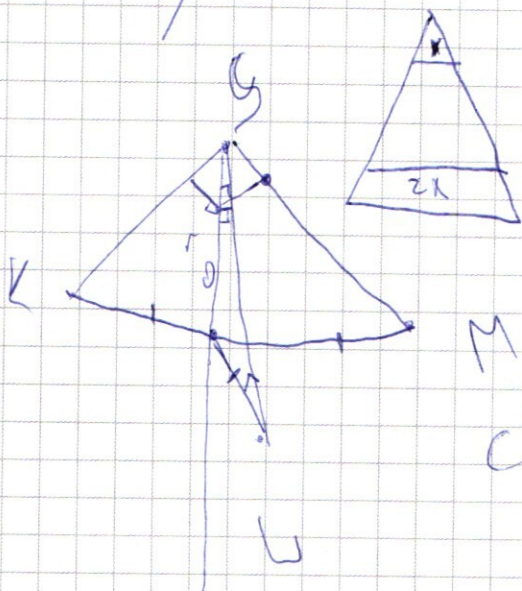
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\sqrt{2} (\cos 3x \cos 11x - \sin 3x \sin 11x)$$



$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{y^{\lg x}} = x^{\lg x}$$

$$\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\lg x} = (y^2)^{\lg x}$$

$$\lg y \text{ ① } y > x \rightarrow \frac{y^3}{x} > y^2$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$(y^3)^{\lg x} = (x^{\lg x})^{\lg y} \cdot (y^2)^{\lg y}$$

$$y^{3 \log x} = x^{\log x} \cdot y^2$$

$$x^3 = x^{\log x} \cdot y^2$$

$$x^{\log y \frac{y^3}{x}} = y^2$$

$$y^{3 \log x} = y^2 \cdot x^{\log x}$$

$$2t = 3 - \frac{1}{t}$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t-1)(t-1) = 0$$

$$\log_x y = 1 \Rightarrow x = y$$

$$\log_x y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y^2$$

$$3y = y^2$$

$$y = 0$$

$$y = 3$$

$$x = 9$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos - \cos = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin - \sin = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos + \cos =$$

$$2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x =$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\cos 7x = \sin 7x$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \cos (7x - \frac{\pi}{4}))$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cos (7x + \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= -\sin (7x + \frac{\pi}{4})$$

yes

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64}x = \ln 2 \cdot 2^x$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}$$

$$565,35 \cdot 2^{65}$$

$$16 \rightarrow 70$$

$$3 \cdot 2^{65} + 64 - (64 + 3 \cdot 2^{65})$$