

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1). Так число $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, то наше комбинаторное число состоит из трех троек, трех семерок, а оставшиеся цифры - единицы, или же из тройки, двойки, трех семерок, оставшихся - единицы. Наше число не удовлетворяет условию. I случай:

3-3 C_8^3 - кол-во расстановок семерок в числе,
3-7 C_5^3 - кол-во расстановок троек на оставшиеся места
2-1 в числе, а единицы, автоматически становятся на пустые места: Число комбинаций = $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$
 $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 560.$

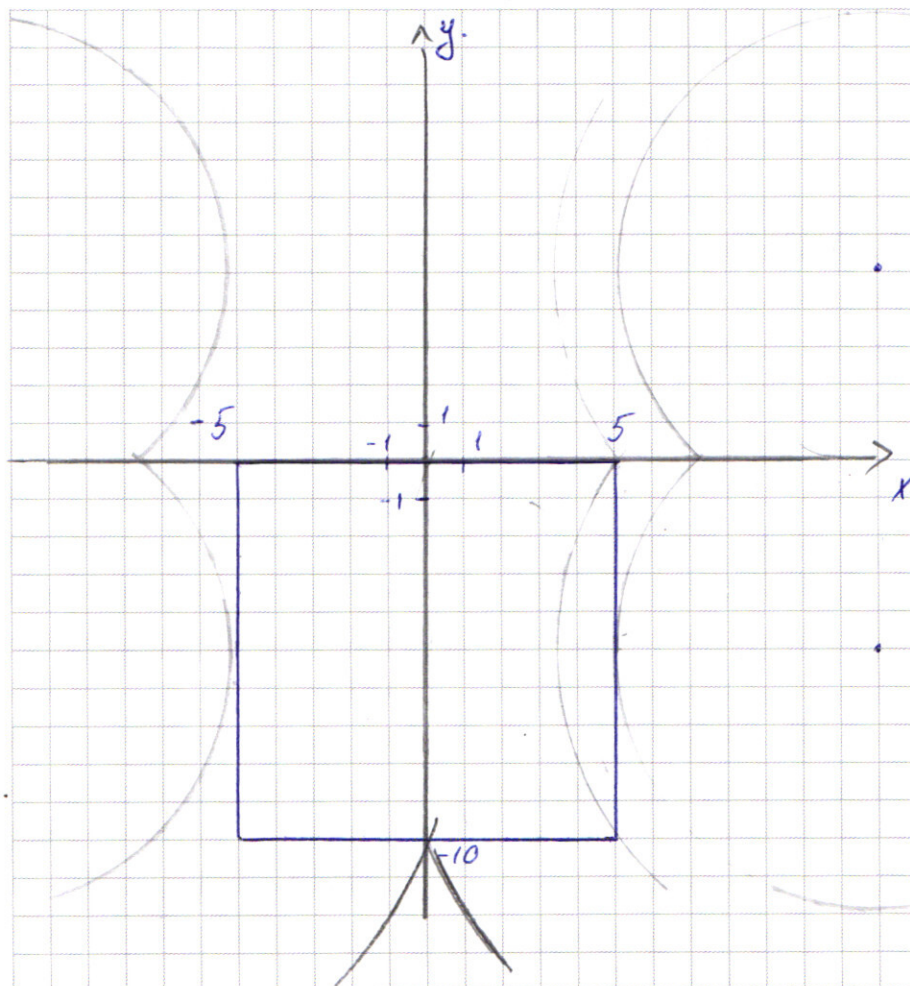
II случай:

1-9 C_8^3 - кол-во расстановок семерок в числе,
1-3 5-кол-во расстановок троек на оставшиеся
3-7 местах, 4-кол-во расстановок двойки на оставшиеся
3-1. места, а единицы, автоматически становятся на
пустые места: Число комбинаций = $C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot 4 =$
 $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{8} \cdot 5 \cdot 4 = 1120.$

Всего комбинаций (чисел) = $560 + 1120 = 1680.$

Ответ 1680.

5) Будем наносить решения $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$
на координатную плоскость;



$$I \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x+y+5+y-x+5=10;$$

$$2y=0 \Rightarrow y=0;$$

$$\begin{cases} x+5 \geq 0; x \geq -5; \\ 5 \geq x; \end{cases}$$

т.е. принадлежат точки:

$$y=0; x \in [-5; 5]$$

$$II \begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases}$$

$$-x-y-5+y-x+5=10;$$

$$-2x=10$$

$$x=-5;$$

$$\{y < 0; y > -10\} \text{ т.е. принадлежат точки: } x=-5; y \in (-10; 0).$$

$$III \begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases}$$

$$x+y+5-y+x-5=10;$$

$$2x=10 \quad x=5;$$

$$y < 0; y > -10;$$

$$\text{т.е. принадлежат точки } x=5; y \in (-10; 0).$$

$$IV \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases}$$

$$-x-y-5-y+x-5=10;$$

$$-2y=20 \quad y=-10;$$

$$\begin{cases} x-5 \leq 0 \\ -x-5 \leq 0 \end{cases}$$

т.е. принадлежат точки: $y=-10 \quad x \in [-5; 5]$. т.е. решения - квадрат со стороной 10, параллельный оси Ox и центром в точке $(0; -5)$.

$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ - есть комбинация симметричности
 $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ $(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$ $(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$ и
 $(x+12)^2 + (y+5)^2 = a$. без самопересечений. т.е. два разных симметричных не может иметь таких друзей.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что данная квадратная система уравнений относительно x, y имеет решение $(x, y) \neq 0$ и решение $(-x, y)$. Сл.ч. Такое возможно если: а) окружности с центрами $(x+12)^2$ и $(-12; 5)$ и $(12; -5)$ и $(-12; -5)$ будут касаться сторон квадрата. При увелич. параметра a будут появляться и решения. при $a \in (49; 169)$ при $a \in (169; +\infty)$ решений не будет 2 решения при $a = 49$ и 169 . при $a \in (-\infty; 49)$ - решений нет. в этом не трудно убедиться, подставив в уравн. окружности вместо $x = \pm 5$, затем в вместо $y = 5, 0, -10$, и подсчитав. под. в решения. если получится на графике.

Ответ $49; 169$.

2. $\cos 2x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0;$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x;$$

$$2 \cos 7x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$\text{или: } \cos 7x = \sin 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{8} + \pi k \end{cases}$$

$$\cos 7x = \cos \frac{\pi}{4} - 2x;$$

$$7x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k$$

$$7x = +2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k;$$

$$X = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9}$$

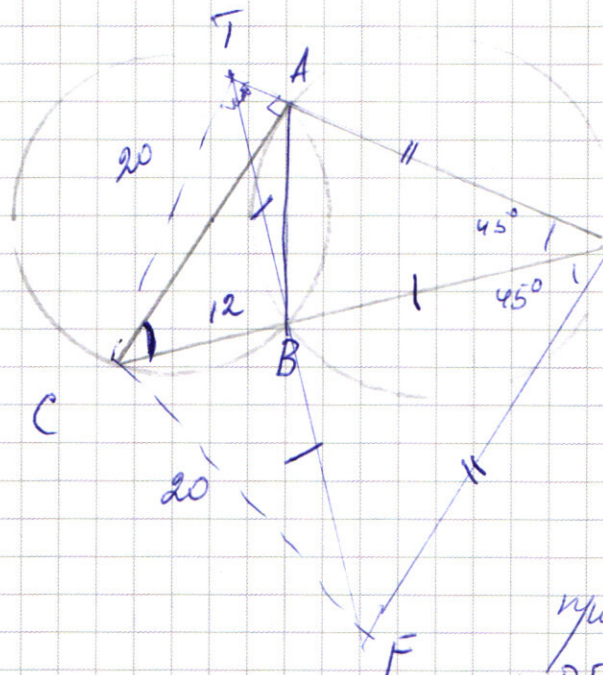
$$X = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$

Ответ. $\frac{\pi}{8} + \pi k$; $\frac{3\pi}{8} + \pi k$; $\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



а) Ш.к. окружности равна
60 и AB — диаметр

О — окружности равна
и AB — диаметр окружности
→ $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$
т.к. $\angle CAD = 90^\circ$

т.к. по условию $\angle BFD$

предположим, что $BF = BD$, то

$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$. т.к. $\angle BDF + \angle ADC$

$= 90^\circ$, то прямые BF и AD пересекутся под углом 45° в точке

т.к. $\angle ACB = \angle BTA = 45^\circ$, то точка T лежит на
окружности с центром ABC. Сл.но $BT = BF$ и DB — сеп.

перпендикуляр к TF. Т.е. $CT = CF$. Теперь в $\triangle CBT$ $\angle B = 90^\circ$

прямоугольный треугольник, гипотенуза которого описана окруж-
ности. с радиусом 10 → $CT = 20 \Rightarrow CF = 20$;

б) Из $\triangle CBT$ $\angle B = 90^\circ$; $\cos \angle TCB = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \angle TCB =$
 $= \frac{4}{5}$. т.е. $\frac{TB}{CT} = \frac{4}{5} \Rightarrow TB = 16$. Как показано

выше и из условия следует, что $CD = 12 + TB =$

$= 28$. тогда как показано выше; $\angle BCF = \angle TCB$!

→ $\angle BFC = \angle CTB$

$\sin \angle TCB = \sin \angle TCA \cdot \cos 45^\circ + \cos \angle TCA \cdot \sin 45^\circ = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\cos \angle TCA = \frac{4}{5}$ $\sin \angle TCA = \frac{3}{5}$ $\sin \angle TCA = \frac{4}{5}$

$$3. \quad x^2 y^{4-\ln x} = y^{\ln(\frac{4}{x+1})}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x};$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \ln y;$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0;$$

$$D = 9\ln^2 x \pm 8\ln^2 x$$

$$\ln y = \frac{3\ln x \pm \ln x}{2}$$

$$\ln y = \ln x \quad \text{или} \quad \ln y = 2\ln x \quad (x, y > 0)$$

$$y = x \quad \text{или} \quad x^2 = y.$$

$$I \quad y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0;$$

$$y^2 - 4y + 2y = 0;$$

$$y = 0 \quad \text{или} \quad y = 2.$$

$$II \quad x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0;$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0;$$

$$x = 0; \quad x = 2$$

$$\Downarrow \\ y = 4$$

$$x(x-2)(x^2+x-4) = 0;$$

$$x^2 + x - 4 = 0;$$

$$D = 1 + 16;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y =$$

$$\text{Ответ} \quad (2; 2); (2; 4); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right) (x; y).$$



ется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \angle PCA = \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

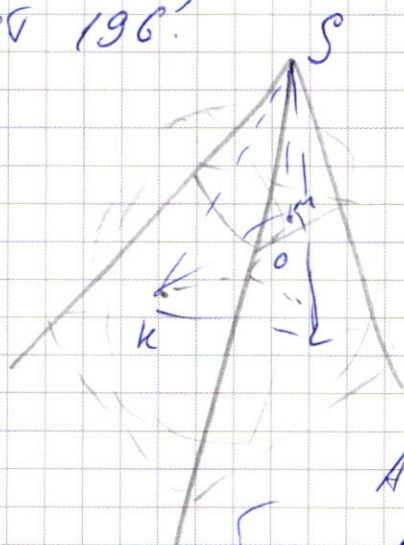
из ΔCTA ($\angle A = 90^\circ$) т.к. CT диаметр (показано выше)

$$CA = CT \cdot \sin \angle CTA = CT \cdot \cos \angle PCA = 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AC \cdot \sin(\angle ACB + \angle BCF) = \frac{20 \cdot 14\sqrt{2}}{2} \left(\sin 45^\circ \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \sin \angle BCF \right) = 140\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{140 \cdot 7}{5} = 196$$

Ответ 196.

4).



Пусть сечение перпенд.

Ю и пос. содержит

A, B, C и A_2, B_2, C_2

$$S_{A_2B_2C_2} = 1 \quad S_{A_2B_2C_2} = 16$$

т.к. они $\perp$ друг другу

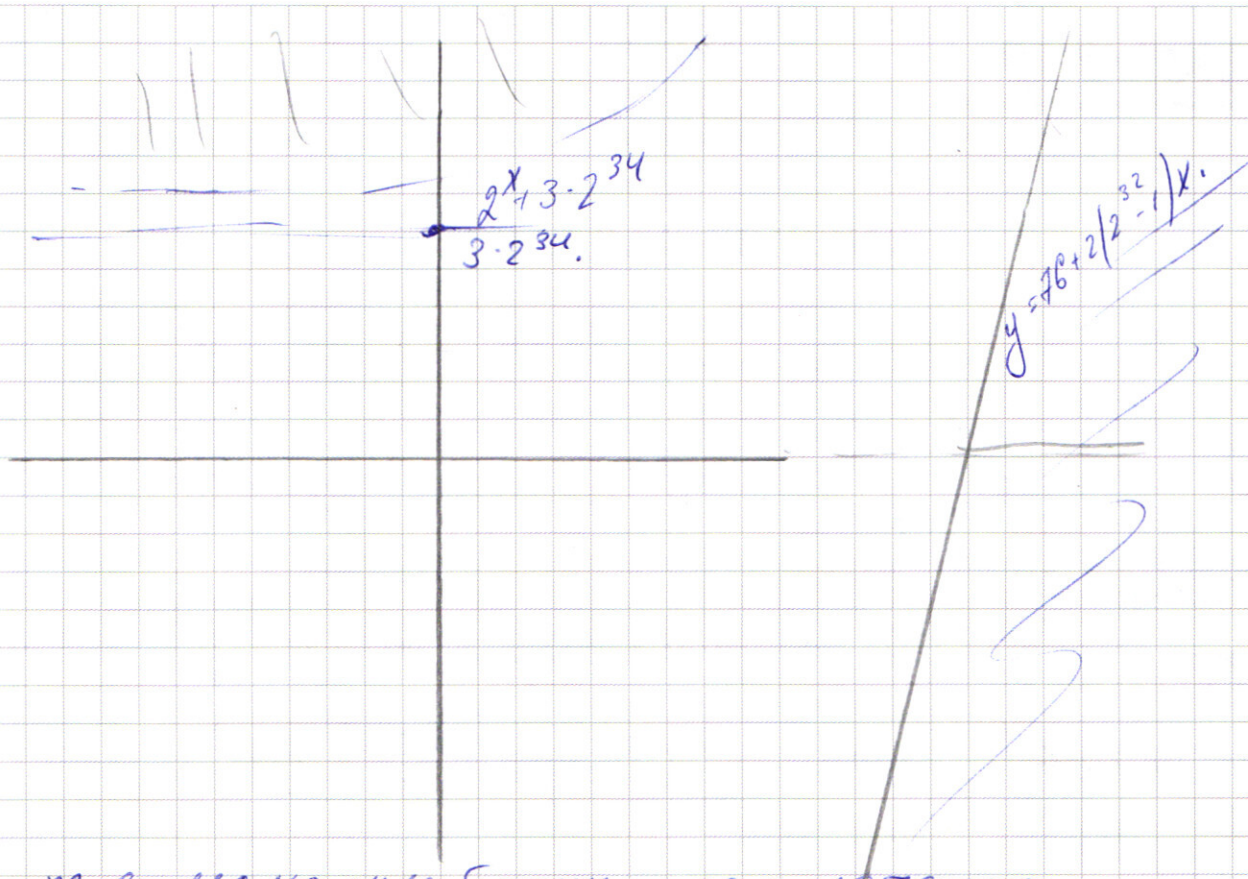
$$A_1B_1C_1 \parallel A_2B_2C_2 \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$$

с коэф. подобия = 4

$$S_{\text{сечения}} = 4; \quad \angle SOK = KSO = 45^\circ$$

Ответ 45° ; 4.

7. Чтобы найти пос-во пор. делых чисел мы
должны посчитать. общее число фигур, делых
у-ндел $y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$ и $y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$;



т.е. искомым будет значение
 между x_1 и x_2 , где x_1 и x_2 — решения;

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2/(2^{32} - 1) \cdot x \quad x_1 - x_2 = 2^{32}$$

Всего таких точек $2^{32} + 1$.

Ответ $2^{32} + 1$.

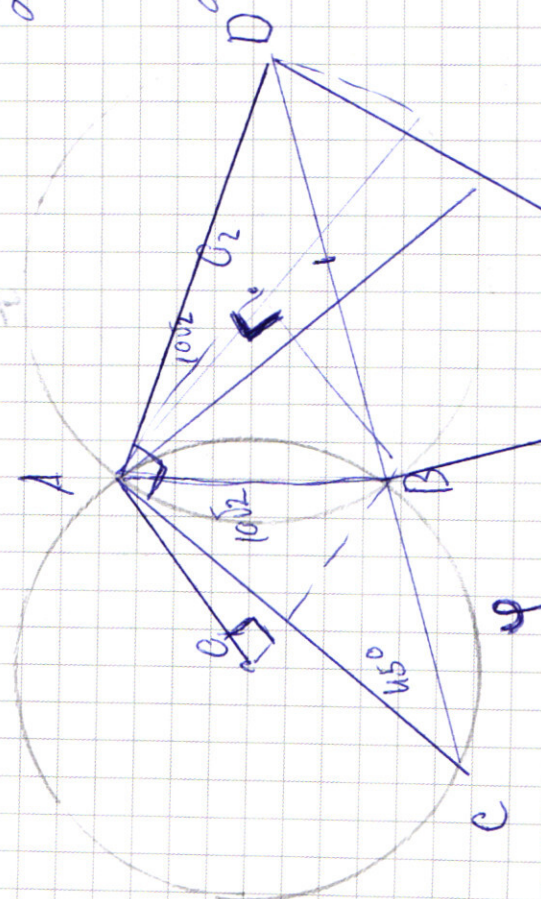
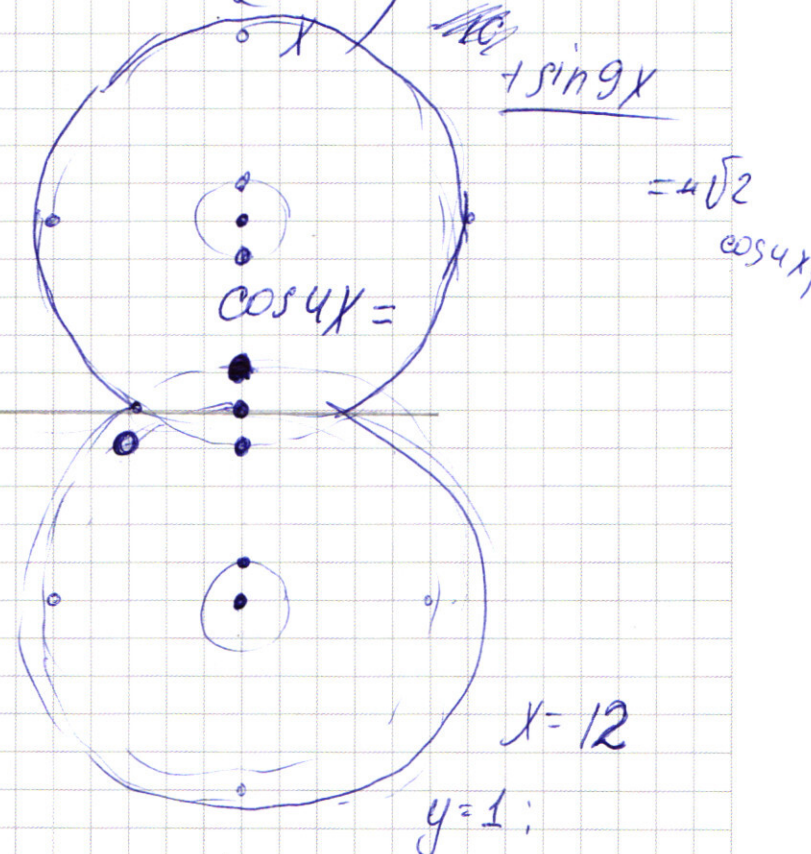
$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2 \cdot 2^{32} - 1 \cdot x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2 \cdot 2^{32} - 1 \cdot x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 9x\right) = \cos 5x$$

$$+ \sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 5x$$

$$+ \sin 9x$$



$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 36$$

$$y=1$$

$$(|x| - 12)^2 =$$

$$20$$

$$(|x| - 12)^2 = 20$$

$$|y| - 5 = 36$$

$$|y + 5|$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = 0,$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + 9x \right) + \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\sqrt{2} \sin \alpha + \sin \beta =$$

$$\cos \alpha + \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$x > 0;$$

$$y > 0;$$

$$\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin \alpha + \beta = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta.$$

$$\sin \alpha + \beta + \sin \alpha - \beta = 2 \sin \beta \cos \alpha,$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\sqrt{2} \cdot 2 \sin 7x \cos \frac{\pi}{2} + 4x = \sqrt{2} \cos 4x.$$

$$\sqrt{2} \sin -4x$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y,$$

$$xy$$

$$-2x(x-4) + y(y-4) - xy = 0,$$

$$\alpha = 1$$

$$y = -4$$

$$|x+y+5|$$

$$(|x|-2)^2 = (|y|-5)^2 = a$$

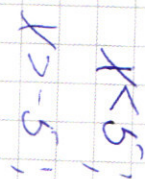
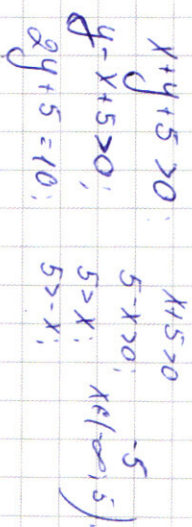
$$(|x|-6)^2 \quad (|y|-3) = a,$$

$$(|x|-12)^2$$

$$(|y|-5)^2 = a$$

$$a-1 = (|x|-12)^2$$

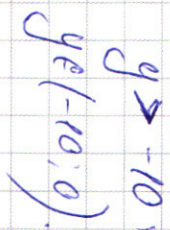
$$= 12$$



$$: h_1 - 18h_2 + 2h_3 - h_4 - 2h_5$$

$$144 + 25 = 169$$

$$P_{12} = (P_1 P_2)$$



$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$x + y + 5 < 0$$

$$y - x + 5 < 0$$

$$-X - y - 5 - 4X - 5 - 10$$

$$(-24, 20)$$

29-10

$x-5 < 0; x < 5; +$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{4}{x^2})}$$

$$\frac{x^2 y^4}{x^2 y^4} = 1$$

$$1 = y^{\ln(\frac{4}{x^2})} \cdot y^{4 \ln x} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$y^{\ln y - 7 \ln x + 4 \ln x} \cdot x^{2 \ln x} = 1$$

$$y^{\ln y - 3 \ln x} \cdot x^{2 \ln x} = 1$$

$$y^{\ln y} \cdot x^{5 \ln x} = 1$$

$$y^2 xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

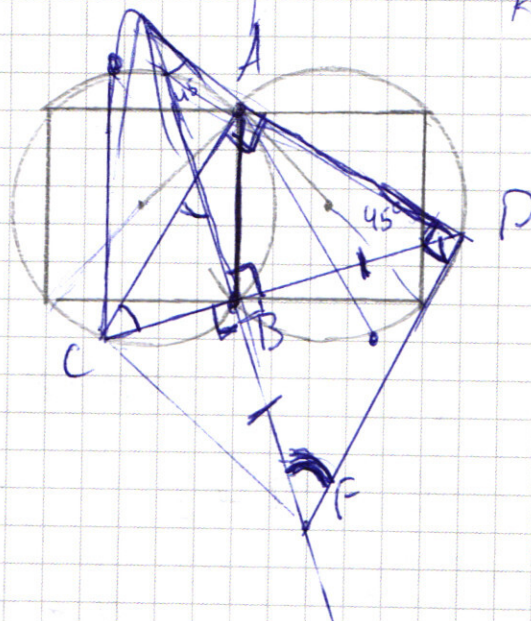
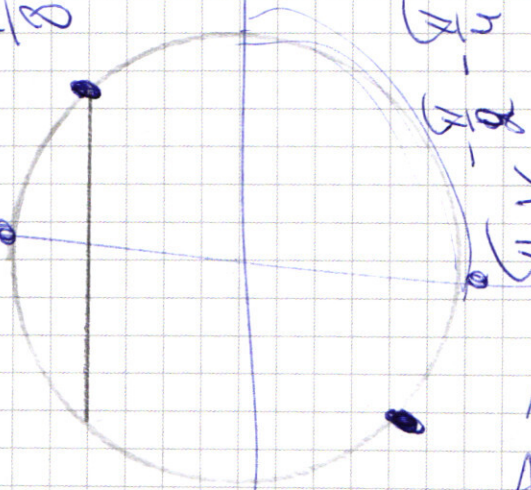
$$y^2 x^2 - xy - x^2 + 4x - 4y + 4 = 0$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x$$

$$\frac{1}{2} + 2x^2 \frac{1}{2} + 2x^2 \frac{1}{2} + 2x^2 \frac{1}{2}$$



$$AC^2 = CB^2 + AB^2 - 2(CB \cdot AB \cdot \cos \alpha)$$

$$AP^2 = BP^2$$

$$BD^2$$

$$\cos 9x - \cos 5x -$$

$$\sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x,$$

$$\sqrt{2} \cos 4x +$$

$$\sqrt{2} \cos$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + 9x + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} - 5x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x \sin 5x;$$

$$\left(\sin 9x - \frac{\pi}{4} - \sin 5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0 \quad \left(\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \right.$$

$$\sin \alpha - \beta = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin x + y = \sin x - y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} - 2x \cdot \sin 7x - \cos 4x = 0$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + y = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos x - y = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2 \sin 2x = \cos 7x - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 2x (\cos 7x - \sin 7x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 2x (\sin 7x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 2x - \cos 4x = 0$$

$$1 - 2 \sin^2 2x = 0$$

$$4a^2 + 8$$

$$\sin 2x = \frac{-2 \pm \sqrt{4a^2 + 8}}{4}$$

$$2x = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} - 2x = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2x - \sin 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2$$

$$-2x^2 - 8 + 8x + 8 + y^2 - 4y = 1y$$

$$-2(x+4-4x) + (y-2)^2 = xy-4$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8; -2\ln x(\ln x) = \ln y(\ln y - 3\ln x)$$

$$x=2$$

$$8 - 4 - 12 + 8$$

$$-8 - 4 + 12 + 8$$

$$x=2 \quad x=1$$

$$(x=-2)$$

$$1 + 17 - 2\sqrt{17}$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$x^2 \neq x^2$$

$$-1$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(8 - 4 - 12 + 8)$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$x^2 - 6x$$

$$x^2 - 2x$$

$$-4x + 8$$

$$x^2 + x - 5$$

$$(x^2 + x - 4) / (x - 2)$$

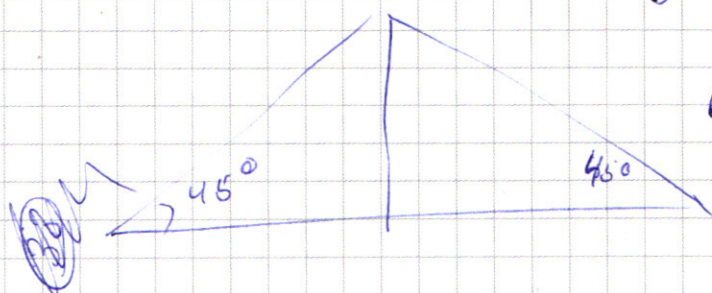
$$x^3 - x^2 - 4x - 2x^2 - 2x + 8$$

$$P_2 = 1 + 16z$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)$$



$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{4}{5} \right)$$

~~cos~~
~~sin~~

sin TCA 2

sin α +

$$= \frac{4}{5}$$

sin arcsin "

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

28.7

x 28
7

196

$$2^{34} + 3 \cdot 2^{34} = 76 +$$

$$2^{34} + 3 \cdot 2^{34} = 74 + 68 \cdot 2^{32} +$$

$$\sqrt{2} \cdot 76$$

$$\sqrt{2} \cdot 34$$