

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 1 8-значные числа - 8 позиций

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 3375$$

Разложим 3375 на простые множители:

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$$

т.к. $a_1, a_2, \dots, a_8 \in [0; 9]$, то также $a_1 a_2 \dots a_8 = 3375$;

1) три числа делятся на 5, три - 3, ~~остальные~~
остальные - 1

Найдем, сколько их: (S_1)

для 5 возможно - C_3^8 расстановки

для 3 возможно - C_3^5 расстановки

и остальные два места заняты единицами

$$S_1 = C_3^8 \cdot C_3^5 = \frac{8!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{2!} = 10 \cdot 56 = 560 \quad (C_2^2 = 1)$$

2) одно число - 9, одно - 3, три - 5, остальные - 1.

для 9 есть C_1^8 расстановки

для 3 - $C_1^7 = 1$ расстановки

для 5 - C_3^6 расстановки и остальные - нули
($C_3^3 = 1$)

$$S_2 = 8 \cdot 7 \cdot C_3^6 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 56 \cdot 20 = 1120$$

Общее кол-во чисел - $S_1 + S_2 = 1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

$$\sqrt{3} \quad \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12 = 0$$

$$x - 2(y+2)x + 3y(4-y) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2y + 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 3y(4-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3y \\ x_2 = 4-y \end{cases}$$

$$1) \quad x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$y^{4 \lg 3y} = y^{2 \lg (3y^2)} \cdot 3^{\lg 3y}$$

$$y^{4 \lg 3 + 4 \lg y} = y^{2 \lg 3 + 2 \lg y^2} \cdot 3^{\lg 3 + \lg y}$$

$$y^{4 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} \cdot 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \quad | : y^{4 \lg y} \cdot y^{2 \lg 3}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y}$$

$$\log_3 y^{2 \lg 3} = \log_3 (3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y})$$

$$2 \lg 3 \cdot \log_3 y = \lg 3 + \lg y$$

$$\lg 3 (2 \log_3 y - 1) = \lg y$$

$$2 \log_3 y - 1 = \frac{\lg y}{\lg 3}$$

$$2 \log_3 y - 1 = \log_3 y$$

$$3 \log_3 y = 1$$

$$\log_3 y = \frac{1}{3}$$

$$y = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$x = 3^{\frac{4}{3}}$$

$$2) \quad x = 4 - y$$

$$4 - y > 0 \quad y < 4$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y + 2 \lg(4-y)}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg(4-y)}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\log_y y^{3 \lg(4-y)} = \log_y ((4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y})$$

$$3 \lg(4-y) = \log_y(4-y)^{\lg(4-y)} + 2 \lg y$$

$$3 \lg(4-y) = \lg(4-y) \cdot \log_y(4-y) + 2 \lg y$$

$$\lg(4-y) (3 - \log_y(4-y)) = 2 \lg y$$

$$\text{при } \lg y = 0 \quad y = 1 \quad y \neq 1$$

$$\lg 3 (3 - \log_y(4-y)) = 2$$

$$\log_y(4-y) (3 - \log_y(4-y)) = 2$$

$$\log_y(4-y) = t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$13 - 11 = 2$$

$$-t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$f^2 - 3f + 2 = 0$$

$$k = 1$$

$$t = 2$$

$$1) \log_y |4-y| = 1$$

$$y - y = y$$

$$2y = 4$$

$$y^0 = 2$$

$$X = 2$$

2) $\log_y |4-y| = 2$

$$4 - y = 0^2$$

$$y_2 + y - y' = 0$$

$$\textcircled{2} = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

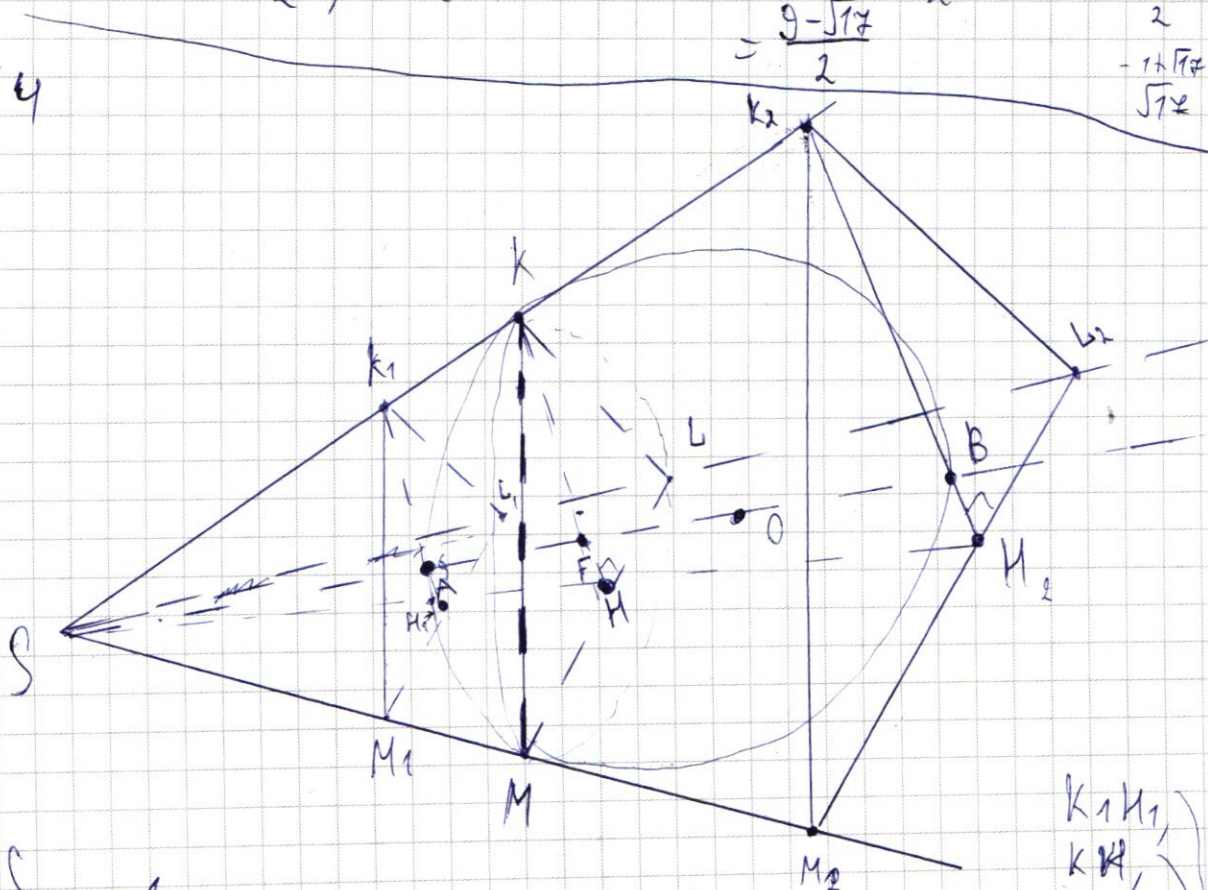
$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}x}{2} \quad \text{C.O.}$$

Ans: $(3^{\frac{4}{3}}; 3^{\frac{1}{3}}); (2; 2);$
 $(\frac{9-\sqrt{17}}{2}, -\frac{1+\sqrt{17}}{2})$

$$x_1 = 4 - \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$$

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt{17} &< 8 \\ \sqrt{17} &< 9 \end{aligned}$$



$$\int K_{1L} M_1 = 1$$

$$S_{K_2} L_2 M_2 = 4$$

$$(S, K_2, M_2) \perp \begin{matrix} (K_1, L_1, M_1) \\ (K_2, L_2, M_2) \end{matrix}$$

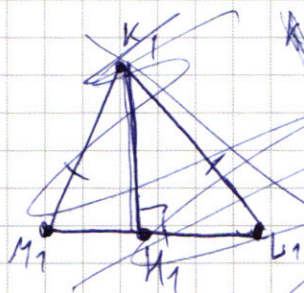
$K_1 H_1$
 $K_2 H_2$

becomes

$\Delta K_1 M_1 L_1$

$\triangle KML$, $\triangle K_1M_1L_1$, $\triangle K_2M_2L_2$ - подобные, при этом

$(KML) \parallel (K_1M_1L_1)$
и $\parallel (K_2M_2L_2)$



$K_1M_1 = 0$
 $S_{K_1M_1L_1} = 1 = 0^2$

$S_{K_1M_1L_1} = M_1K_1 \cdot K_1L_1$

$K_1M_1 = 0$

$K_1L_1 = h$

$\triangle K_1M_1L_1$

$1 = 0h$

$0 = \frac{h^2}{3} + h^2$

$h = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$0 = \frac{2}{\sqrt{3}}h$

$\triangle K_1M_1L_1 \sim \triangle K_2M_2L_2$

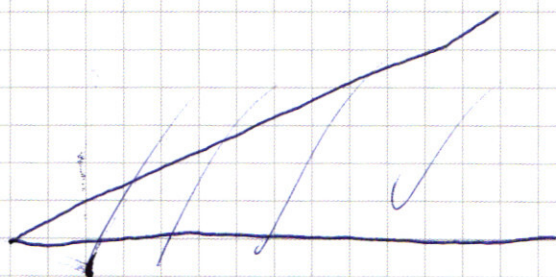
$k^2 = \frac{S_{K_1M_1L_1}}{S_{K_2M_2L_2}} = 4$

$k = 2$

$\frac{k_1k_1}{k_2k_2} = \frac{1}{2}$

$\frac{S_A}{S_B} = \frac{1}{2}$

$S_B = 2S_A$



$OK = OA = OB = OH = R$

высота $K_1A = h$

$\triangle SK_1A \sim \triangle SK_2B$

$k = 2$

$K_2B = 2K_1A = 2h$

1)

$\triangle SKO$ - н/у

$SK^2 = SO^2 - OK^2$

$SK^2 = 8R^2$

$SK = 2\sqrt{2}R$

$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

$SA \neq AB = SB$

$SA + AB = 2SA$

$AB = SA$

$SA = 2R$

3) $\triangle SK_1A \sim \triangle SKO$

$\frac{OK}{K_1A} = \frac{SO}{SK}$

$\frac{R}{h} = \frac{3R}{2\sqrt{2}R}$

$h = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

$\triangle SK_1A$

$SK_1^2 = AR^2 + h^2 = 4R^2 + \frac{8}{9}R^2 = \frac{44}{9}R^2$

☐ черновик

☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{k_1} = \frac{2}{3} \sqrt{11} R$$

~~$$\Delta S_{k_1 M_1} \propto \Delta S_{K M}$$~~

$$\Delta S_{k_1 M_1} \propto \Delta S_{K M}$$

$$k_1 = \frac{S_{k_1}}{S_{K_1}} = \frac{\frac{2}{3} \sqrt{11} R}{\frac{2}{3} \sqrt{2} R} = \sqrt{5.5}$$

$$\Delta k_1 M_1 L_1 \propto \Delta K M L \quad (\text{с коэфф пропорции } k_1)$$

~~$$\frac{S_{K M L_1}}{S_{K M L}} = \dots$$~~

$$\frac{S_{K M L}}{S_{K_1 M_1 L_1}} = k_1^2 = \frac{9}{5.5}$$

$$S_{K M L} = \frac{9}{5.5} \cdot 1 = \frac{18}{11}$$

ответ: $\arcsin \frac{1}{3}$; $\frac{18}{11}$
 $\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} 1) & |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ 2) & (|x-4|)^2 + (|y-3|)^2 = 9 \end{aligned}$$

$$1) |y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\text{при } y > 3+x; y > 3-x$$

$$y = 6$$

$$\text{при } y < 3+x; y > 3-x$$

$$x = 3$$

$$\text{при } y < 3+x; y < 3-x$$

$$y = 0$$

$$\text{при } y = x+3$$

$$2|x| = 6$$

$$|x| = 3$$

$$x = 3; -3$$

$$\text{при } y = -x+3$$

$$2|x| = 6$$

$$x = -3; 3$$

~~$$x = 3$$~~

$$\text{при } y > 3+x; y < 3-x$$

$$x = -3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~при $a \geq 98$ окруж. O_2 и O_3 пересекутся с графиком в точке A (1 решение)~~
~~Но при $a \in [58; 98]$ мы имеем 2 пересечения с графиком (т.е. 2 решения)~~

при $a \geq 58$ окруж. O_1 и O_4 больше не будут пересекать график
 $a = 58$ - 4 решения

при $a \in [58; 130]$

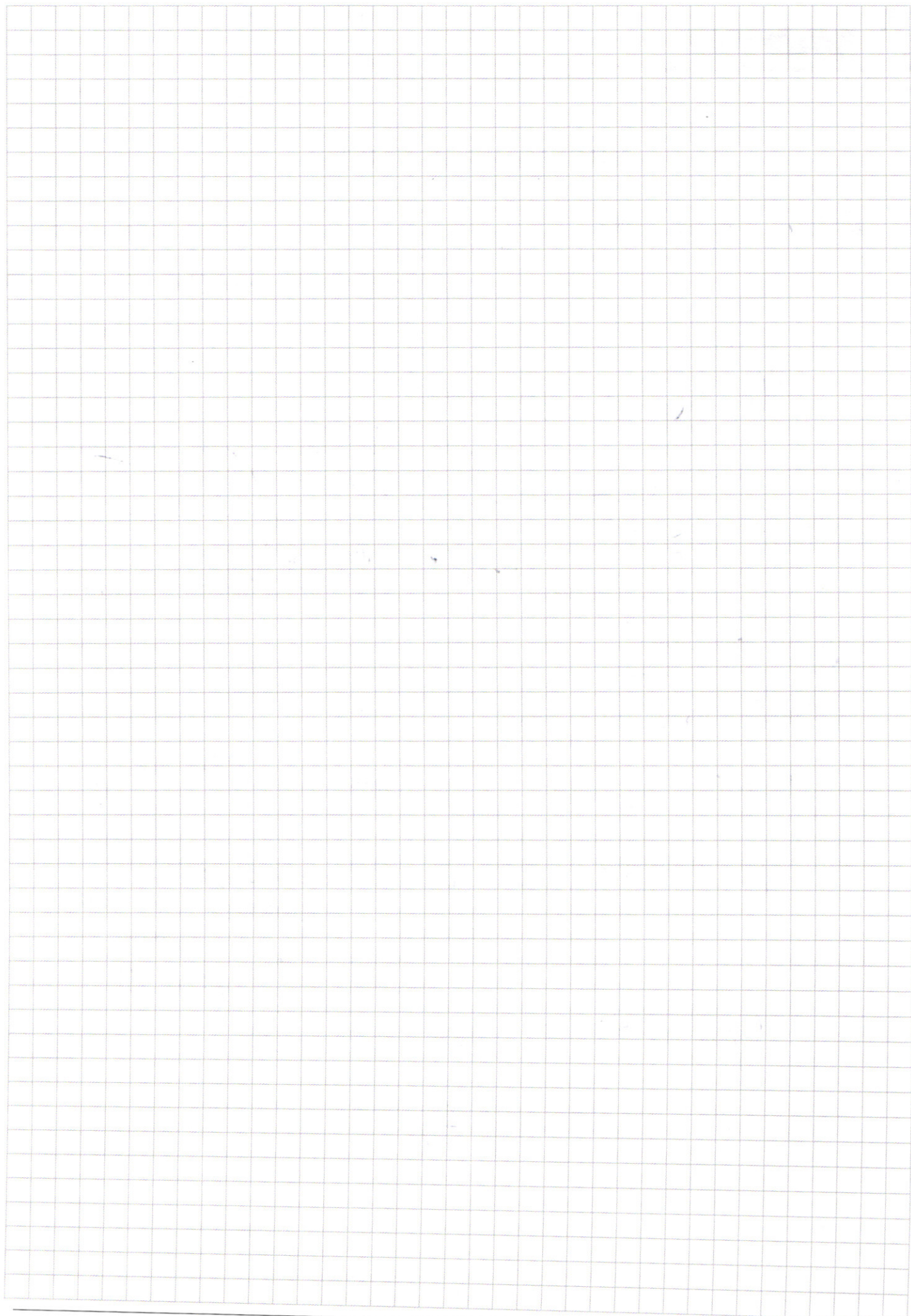
$$O_2 M = O_3 N = \sqrt{81 + 49} = \sqrt{130}$$

при $a \in [58; 130]$ - 4 решения (по две от окр. O_2 и O_3)

при $a = 130$ окруж. O_2 и O_3 пересекаются с графиком по одному разу в Т.М. и Т.Н.

при $a > 130$ Нет решений

ответ: $a = 1; 130$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{|y-3-x| + |y-3+x|} = c$$
$$\sqrt{|x-y|^2 + (|y|-3)^2} = a$$

$y = 2x + 3$ $y = 3 + x$

$2(x) = 6$
 $|x| = 3$

$$2y - 6 = 6$$

$$| -2x | = 6$$
$$-2x = 3$$
$$-x = 3$$
$$-x = -3$$

$$y - 3^x + y - 3^x = 0$$

$$y > x+3 \quad y > \cancel{3} \leftarrow x+3$$

$$y < x+3 \quad y > -x+3$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$y \in x+3 \quad y \in -x+3$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 0$$

$$-2y + 6 = 0$$

$$y = 3$$

$$d \geq X+3 \quad y \leq -x+3$$

$$\begin{aligned} -3 - x + y + 3 - x &= 6 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

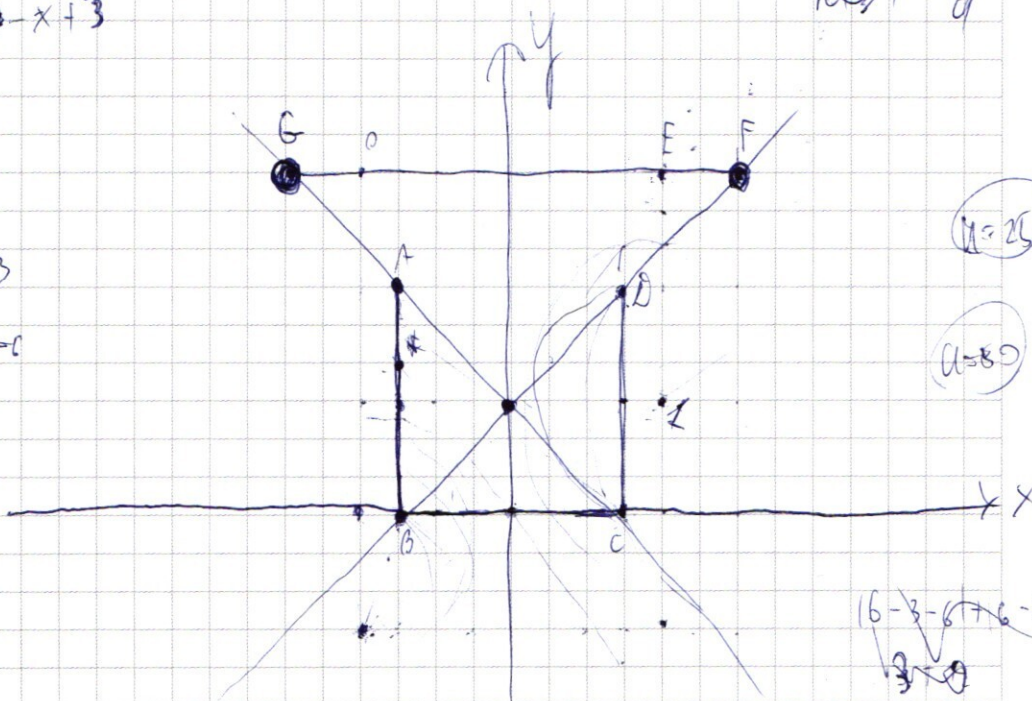
$$|6-3-6| + |6-3+6| = 6$$

$$\begin{aligned} a &= 40 \text{ (F)} \\ a &= 49 \\ a &= 58 \end{aligned}$$

$$Q = 130$$

97196-0

$$af(58; 136) = 1$$



$\alpha > 1 \quad \alpha < 10 \Rightarrow \sqrt{\alpha} \neq \sqrt{10}$
 $\alpha \neq 10$

$a = 28$

$$\alpha = 36 \text{ (E}_1\text{)}$$

$$U = 82 \text{ (A)}$$

$$a \leq 10 - 1$$

$$a = 10 - 1$$

$$G[10, 82] \rightarrow 58 \rightarrow (2)$$

AF [82, 130] - 1

$$a \in (13, 244) \Rightarrow 0$$

$$U \rightarrow 144 = 1$$

$$a_5(144, 148) = 2$$

$$u \in [148; 244) \Rightarrow 1$$

U 3244 - 0

① $a(p-1) = 0$

$$16[1, 10] - 2$$

U-10' - 2

$$Q \in (10, 36) - 1$$

A536-2

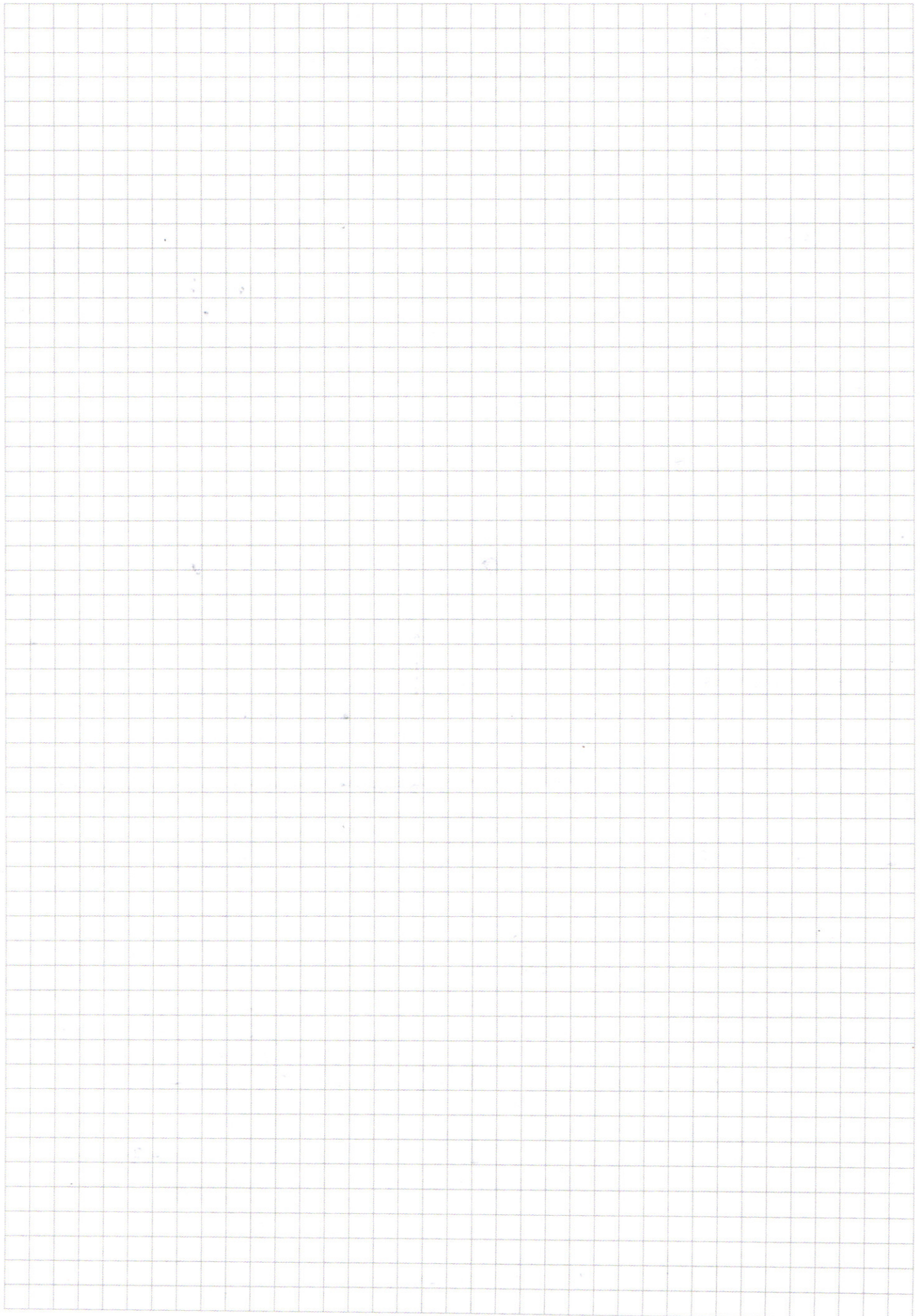
$$96(36; 40) = 3$$

$$a \in [49; 49] - 2$$

$$20 \alpha = 40 - 3$$

AE/49,581-4

$$a = 58 - 3$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations and solutions on graph paper:

Top section:

- Arithmetic: $3375 \div 5 = 675$, $675 \div 5 = 135$, $135 \div 5 = 27$, $27 \div 3 = 9$.
- Factorization: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$.
- Equation: $4x^2 = 35$, $x = \pm \sqrt{35/4}$.
- Equation: $12x + 0 = 35x - 2$, $12 = 35(2x - 6)$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $8x^2 = 32$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.

Middle section:

- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.

Bottom section:

- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.
- Equation: $3x^2 - 135 = 0$, $x^2 = 45$, $x = \pm 3\sqrt{5}$.

Trigonometric section:

- Equation: $\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = 0$.
- Equation: $2 \cos 7x \cdot \cos 4x + 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 11x$.
- Equation: $\cos 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 11x$.
- Equation: $2\sqrt{2} \cos^2 7x - 2(\cos 7x - \sin 7x) = 1$.
- Equation: $0 = \cos^2 7x - 2\sqrt{2} \cos 7x + 1$.

Final section:

- Equation: $Q = 10$, $\alpha = 82^\circ$, $\alpha = 38^\circ$, $\alpha = 84^\circ 49' = 130^\circ$, $\alpha = 144^\circ$, $\alpha = 148^\circ$, $\alpha = 244^\circ$.
- Equation: $Q = 10$, $\alpha = 82^\circ$, $\alpha = 38^\circ$, $\alpha = 84^\circ 49' = 130^\circ$, $\alpha = 144^\circ$, $\alpha = 148^\circ$, $\alpha = 244^\circ$.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$2y + 4$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-3y(y-4)$$

$$x^2 - 2(y+2)x + 3y(y-4)$$

$$x^2 + (-2y-4)x + 3y(y-4) = 0$$

$$x_1 = -3y$$

$$x_2 = 4y-4$$

$$\lg -3y$$

$$x_2 = y-4$$

$$\left(\frac{y^5}{y-4}\right)^{\lg(y-4)} = y^{2 \lg(y^2-4y)}$$

$$\left(\frac{y^5}{-3y}\right)^{\lg(1-3y)} = y^{2 \lg(1-3y^2)}$$

$$y^{4 \lg(1-3y)} = -3y$$

$$(y-4)^{-\lg(y-4)} \cdot y^{5 \lg(y-4)} = y^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg(y-4)}$$

$$x^2 + 2x$$

$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y$$

$$D = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y =$$

$$= 4y^2 - 8y + 4 = 4(y^2 - 2y + 1)$$

$$= 4(y-1)^2$$

$$x_1 = y+2 + 2y-2 = 3y$$

$$x_2 = y+2 - 2y+2 = 4-y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$3^{-\lg 3} \cdot 3^{-\lg y} \cdot y^{4 \lg 3} \cdot y^{2 \lg y} = y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y}$$

$$y^{4 \lg y} \cdot y^{2 \lg 3} \cdot 3^{-\lg 3} \cdot 3^{-\lg y} = y$$

$$y^{2 \lg y} = 3^{\lg 3y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \lg y = \lg 3y - \lg y 3$$

$$2 \lg y \lg 3y = \lg 3y$$

$$\lg y (2 \lg 3y - 1) = \lg 3$$

$$\frac{\lg y}{\lg 3} (2 \lg 3y - 1) = 1$$

$$\lg 3y (2 \lg 3y - 1) = 1$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\lg 3y = 1$$

$$\lg 3y = -\frac{1}{2}$$

$$y = 3 \quad x = 9$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad x = \sqrt{3}$$



$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{y^5}{4-y} \lg(4-y) = y \lg y (4-y)$$

$$y^5 \lg(4-y) = y^2 \lg y \cdot y^2 \lg(4-y) \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$y^3 \lg(4-y) = y^2 \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$3 \lg(4-y) = 2 \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$\lg(4-y)/3 - \lg y (4-y) = 1 \lg y$$

$$y \neq 1$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} (3 - \lg y (4-y)) = 2$$

$$\lg y (4-y) (3 - \lg y (4-y)) = 2$$

$$-t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$$

$$\lg y (4-y) = 1 \quad \lg y (4-y) = 2$$

$$4-y = y \quad y = 4-y$$

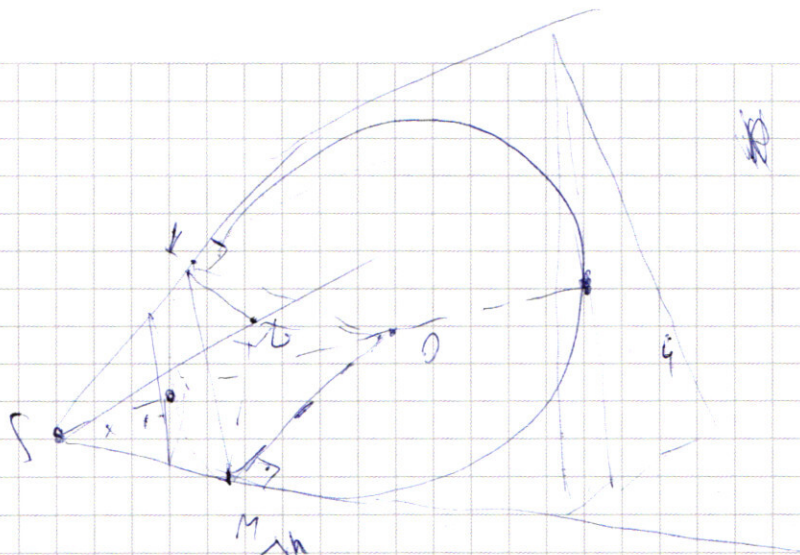
$$y = 2 \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$x = 2 \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$



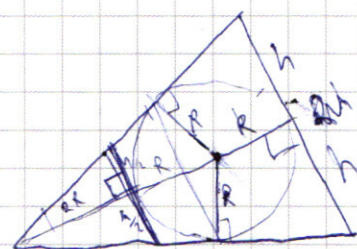
$$\frac{x+2R}{x} = 2$$

$$4x = x + 2R$$

$$R = \frac{3}{2}x$$

$$x = 2R$$

$$R = \frac{1}{2}x$$

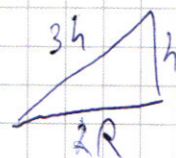


$$\frac{R}{x} = \frac{h}{4R}$$

$$4R^2 = hx$$

$$\frac{2a}{3R} = \frac{2h}{R}$$

$$(a = 3h)$$



$$\sin \frac{1}{3}$$

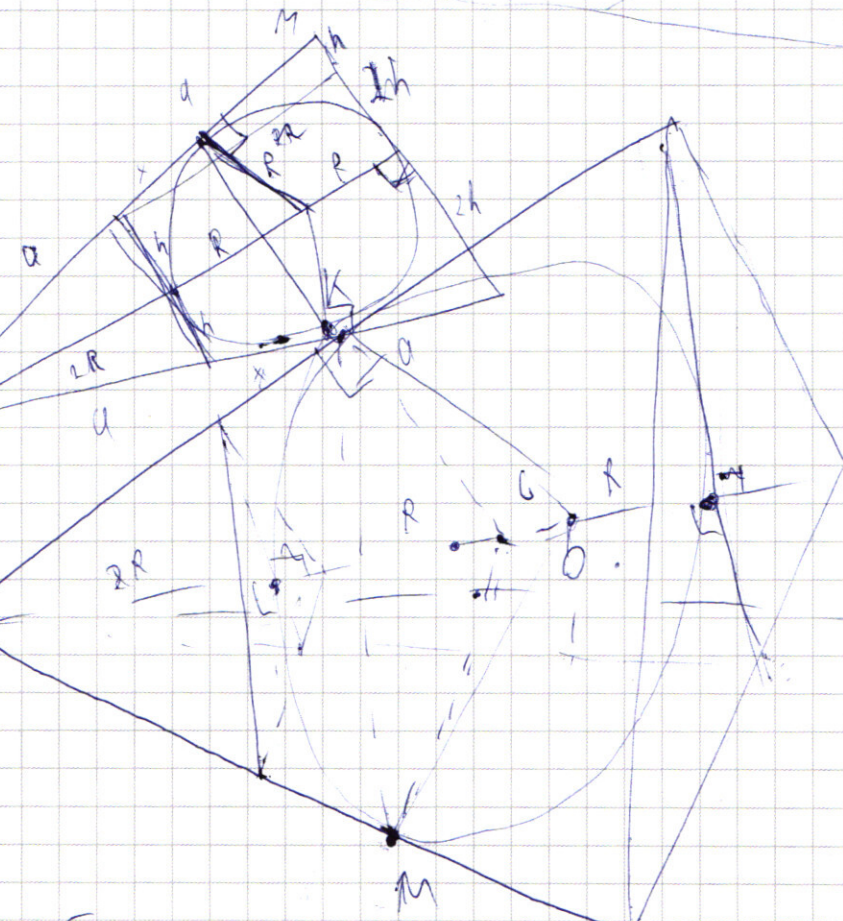
$$4R^2 = 8h^2$$

$$R = \sqrt{2}h$$

$$R = \sqrt{2}h$$

$$R = \frac{\sqrt{2}a}{3}$$

$$a = \frac{3R}{\sqrt{2}}$$



$$a = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 1$$

$$a^2 = \frac{4}{3}$$

$$a^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$(5\sqrt{2}R)^2 = R^2 + 51^2$$

$$a = \frac{4}{3} \left(\frac{16}{9} \right)$$

$$39R^2 = R^2 + 8R^2$$

$$y^2 = 8R^2 \quad y = 2\sqrt{2}R = \frac{4}{3}a$$

