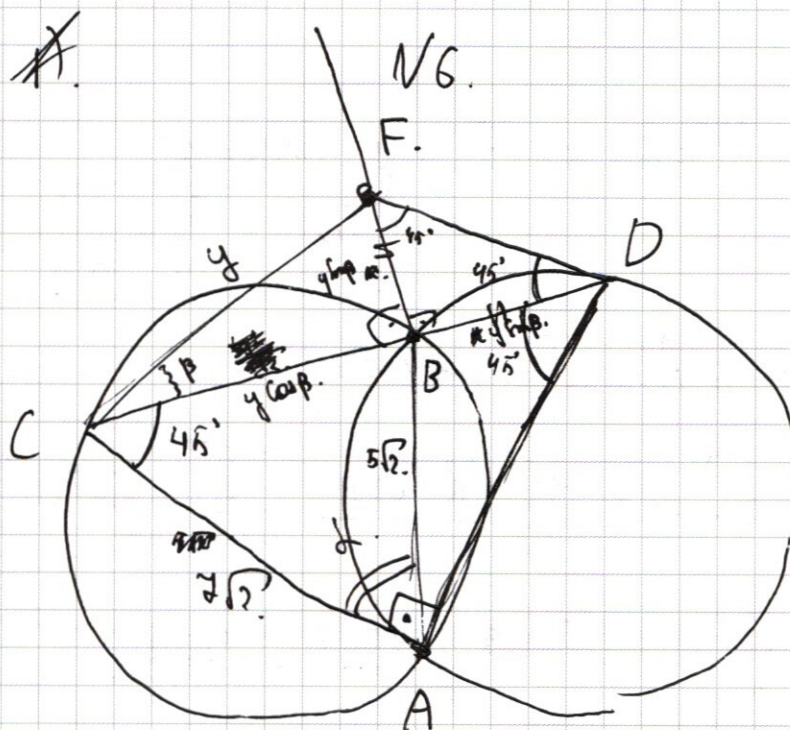
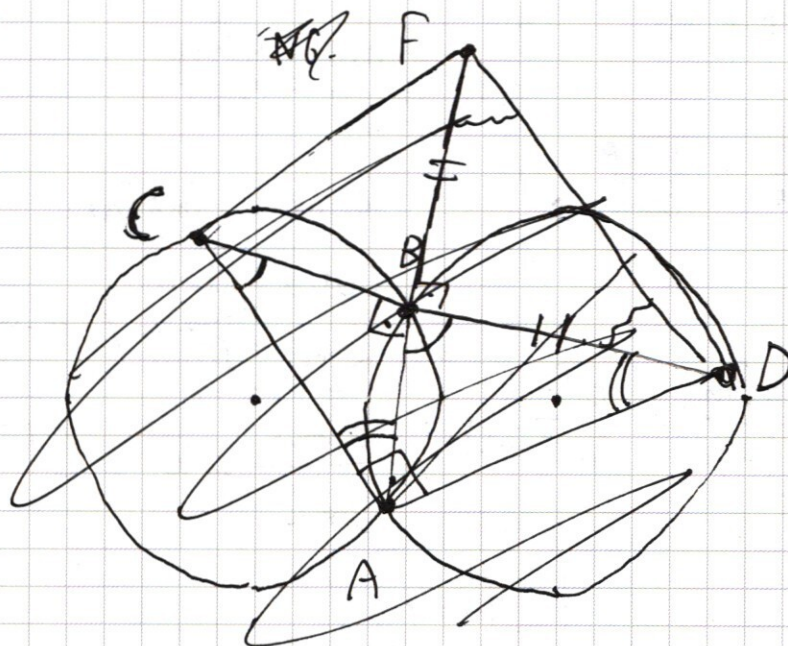


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) По теор. синусов для $\triangle CBA$, $\triangle BDA$ получим:

$$\frac{BA}{\sin \angle BCA} = 2R = 10 = \frac{BA}{\sin \angle BDA} \Rightarrow \sin \angle BCA = \sin \angle BDA.$$

тогда $\angle BCA = \angle BDA$, верш $\triangle CDA$ - треугольник

Если $\triangle CDA$ равнобедренный прямоугольный $\Rightarrow$
 $\angle CDA = \angle DCA = 45^\circ$.

Пусть $CF = y$, $\angle CFB = \beta$, $AB = d$. Тогда $CB = y \cos \beta$, $BD = y \sin \beta = FB$.

Теорема синусов: $\frac{CB}{\sin \angle CDB} = \frac{y \cos \beta}{\sin \angle CDB} = 10$.

$\frac{BD}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{BD}{\cos \beta} = \frac{y \sin \beta}{\cos \beta} = 10$

$\Rightarrow \frac{y \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{y \sin \beta}{\cos \beta}$

$\cos \beta \cos \beta = \sin \beta \sin \beta$

$\cos(2\beta) = 0$

$\Rightarrow y = \frac{10 \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{10 \sin \beta}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{10 \sin \beta}{\sin \beta} = 10 = CF$.

$\Rightarrow (2\beta = 90^\circ) \Rightarrow (\beta = 45^\circ)$ (т.к. β - острый угол треугольника).

$CF = 10$

8) Если $BC = 6$, то $BC = y \cdot \cos \beta = 6$

$\cos \beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \beta)$

$\frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{y(\sin \beta + \cos \beta)}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{10(\frac{3}{5} + \frac{4}{5})}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{10 \cdot 7}{5 \cdot CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow CD = \frac{2 \cdot 10 \cdot 7}{5 \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot 7}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{AC}{y(\sin \beta + \cos \beta)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}(10(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}))}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10 \cdot 7}{5 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$

$\sin(45^\circ + \beta) = \sin 45^\circ \cos \beta + \cos 45^\circ \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}) = \frac{7}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

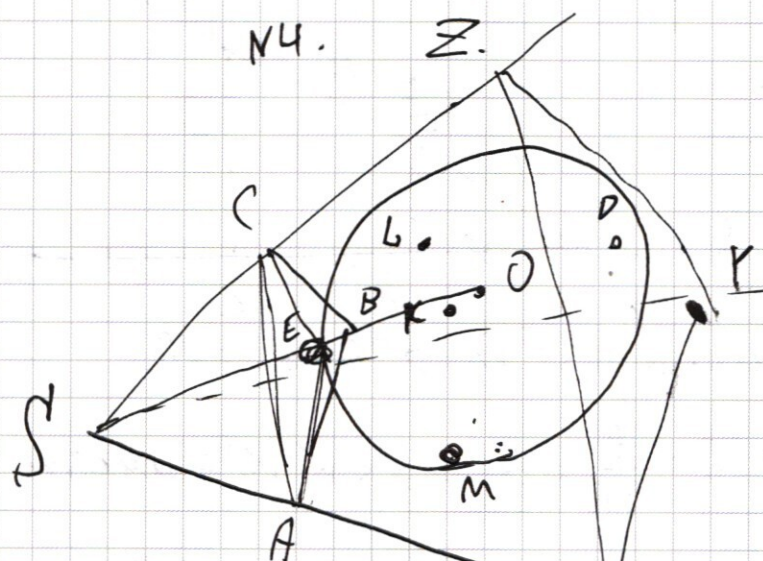
$$\Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot 10 = \frac{7\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 49.$$

Ответ: а) $CF=10$

$$б) S_{ACF} = 49.$$

11.

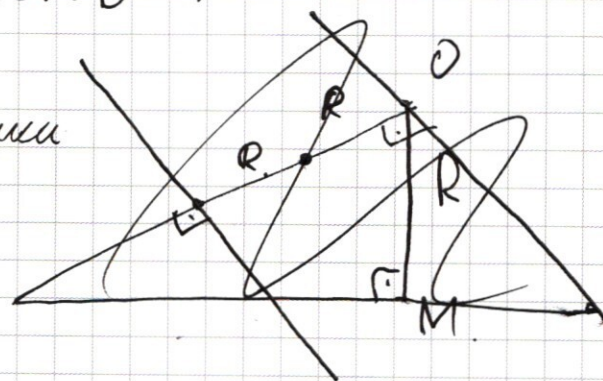
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть R - радиус сферы.

~~Рассмотрим точку SOM .~~

Пусть
Сечения тетраэдра угла
плоскостями - это треугольники
 $\triangle ABC$, $\triangle XYZ$. Пусть P, Q -
точки касания сечений
со сферой



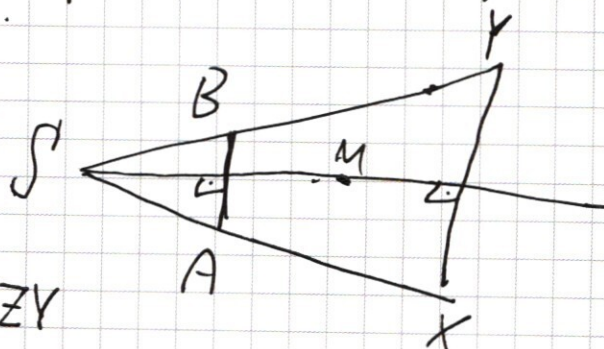
~~AB~~ $SO \perp AB \Rightarrow SM \perp AB$ (теорема о трех перпендикулярах,
 SM - проекция SO на плоск. SAB).

~~AB~~ Аналогично $XY \perp SM$.

Тогда $AB \parallel XY$

Аналогично, $AC \parallel XZ$,

$YZ \parallel BC$. тогда $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$



$$\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{S_X}{S_A} \right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} S_A = S_X.$$

Пусть $SK \cap (ABC) = T$
 $SK \cap (XYZ) = P$

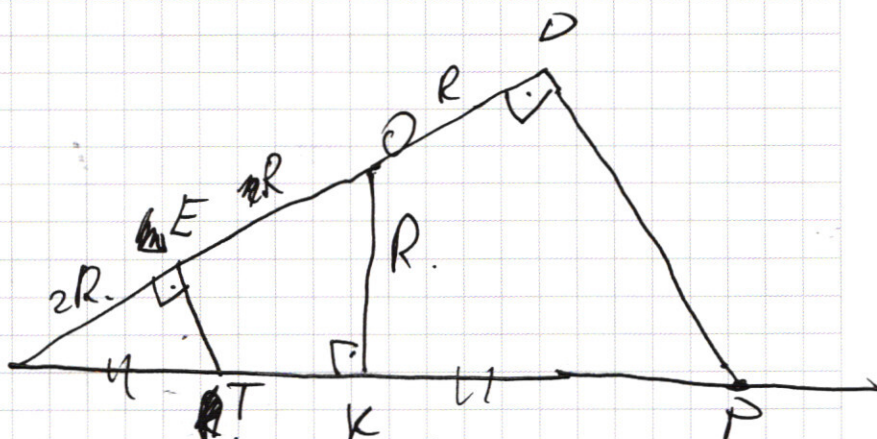
$$\frac{S_T}{S_P} = \frac{S_A}{S_X} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow T$ - середина SP .

$\Rightarrow ET$ - средняя линия $\triangle SPD \Rightarrow SE = ED = 2R$.

~~Следовательно~~ $\cos KSD = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSD = \arccos \frac{1}{3}$.

Ответ: $\angle KSD = \arccos \frac{1}{3}$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \cdot \sin 7x \sin 4x + 2 \sin(-4x) \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cdot (\cos 7x + \sin 7x).$$

$$\Rightarrow (\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \tan 7x = -1 \Leftrightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2): 2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sin 7x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \sin 7x - \cos \frac{\pi}{4} \cos 7x \right) = 2 \cdot \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 2 \sin 4x = 2 \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},$
 $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11}, k, n, m \in \mathbb{Z}.$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2\lg(xy)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right. \quad (1) \quad (2)$$

$$(2): x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 12y + 2xy - x^2 + 4x = 0$$

Рассмотрим как квадратное : $\frac{D}{4} = x^2 + 36 - 12x + 3x^2 - 12x = 4(x^2 - 6x + 9) = 2^2(x-3)^2$
 ур-е относ. у:

$$y = \frac{6-x \pm \sqrt{(2(x-3))^2}}{3} = \frac{6-x \pm |2(x-3)|}{3}$$

$$y = \frac{6-x+2x-6}{3} = \frac{-x}{3} \quad \text{или} \quad y = \frac{6-x-2x+6}{3} = -x+4$$

1) $y = \frac{-x}{3}$ - при таком у получаем $xy = \frac{-x^2}{3} \leq 0 \Rightarrow$
~~Значит~~ $\Rightarrow$ ~~невозможно~~ аргумент лог. ≤ 0 , что некорректно по ОДЗ!

2) $y = 4-x > 0$ (т.к. $x > 0$ по ОДЗ, $xy > 0$ по ОДЗ, то и $y > 0$ по ОДЗ, поставим $4-x > 0$).
 $\left(\frac{(4-x)^5}{x}\right)^{\lg x} = (4-x)^{2\lg(4-x-x)} = (4-x)^{2\lg x} \cdot (4-x)^{2\lg(4-x)}$

~~Если $(4-x)^5 = 0$, то равенство верн. $(x=4)$ не верно~~

$$\frac{(4-x)^5 \lg x}{x^5 \lg x} = (4-x)^{2\lg x} \cdot (4-x)^{2\lg(4-x)} \quad | : (4-x)^{2\lg x} \neq 0$$

$$\frac{(4-x)^3 \lg x}{x^5 \lg x} = (4-x)^{2\lg(4-x)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

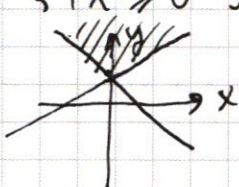
№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6. \quad (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y-3-x+y-3+x=6.$$

$$2y-6=6$$

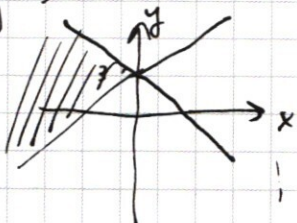
$$\boxed{y=6}$$



$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow y-3-x-y+3-x=6.$$

$$-2x=6$$

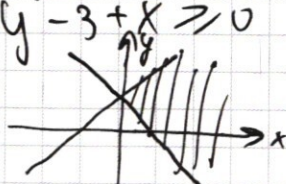
$$\boxed{x=-3}$$



$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -y+3+x+y-3+x=6.$$

$$2x=6$$

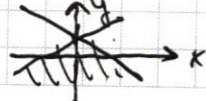
$$\boxed{x=3}$$



$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -y+3+x-y+3-x=6.$$

$$-2y+6=6$$

$$\boxed{y=0}$$



Рассмотрим все случаи разл. модулей (2).

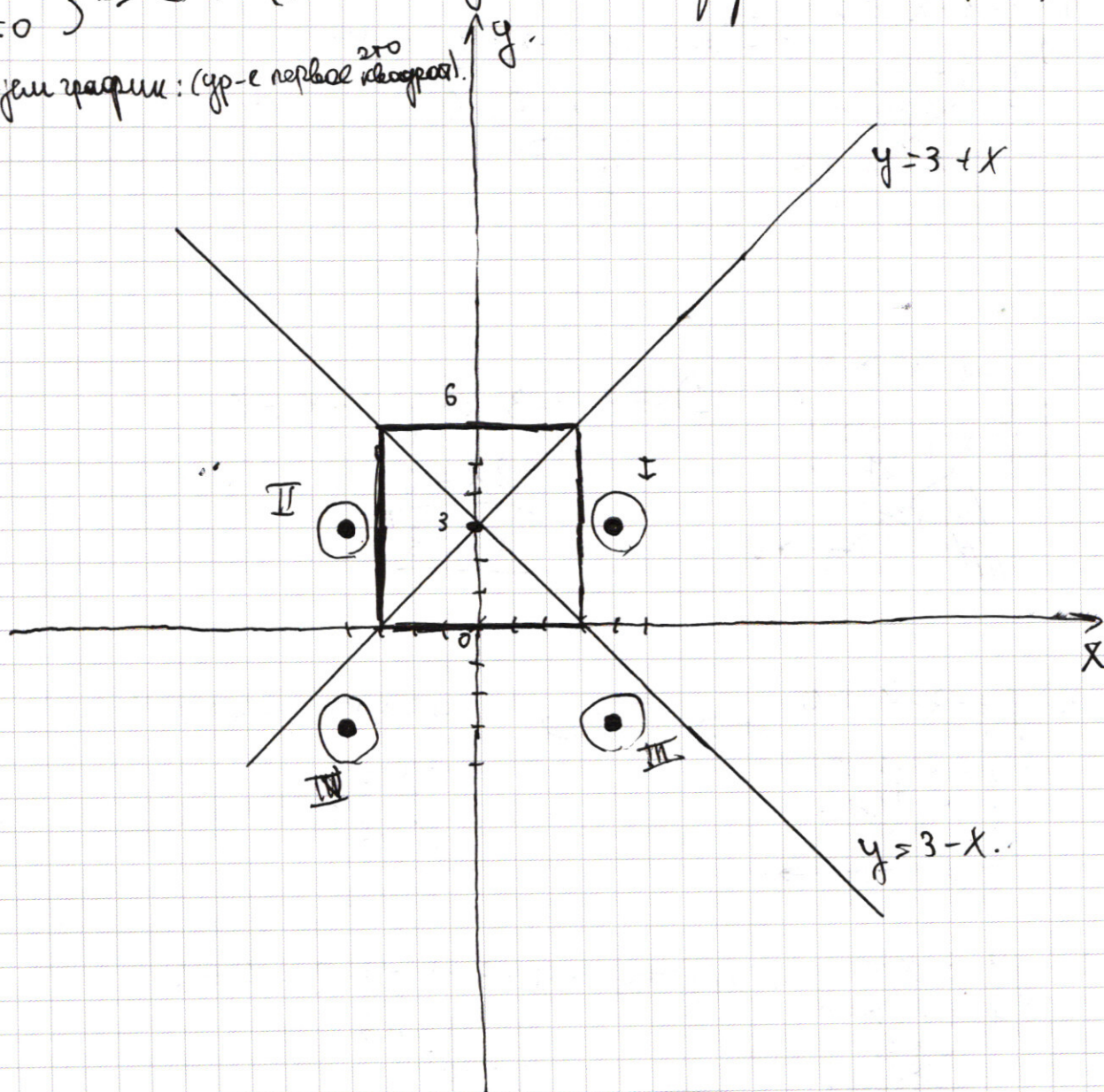
1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ - это окружность с центром $(4; 3)$; $R = \sqrt{a}$.

$$2) \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow \begin{cases} (-x-4)^2 + (y-3)^2 = a \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases} - \text{окружность } (-4; 3) \\ R = \sqrt{a}!$$

3) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \textcircled{2} \Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = a$ - окружность $(4; -3), R = \sqrt{a}$

4) $\left. \begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \textcircled{2} \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y+3)^2 = a$ — окружность $(-4; -3)$, $R = \sqrt{a}$.

Нарисуй картину: (ср-е первая ²⁰⁰ диагональ).



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Картина симметрична относительно прямой $x=0$.
Тогда сколько будет решений правее этой прямой
столько же будет и левее нее (Вспомогательное ни одно решение
не лежит на прямой $x=0$).

Рассмотрим различные значения $R = \sqrt{a}$, $a \geq 0$.

Расстояние от центра окружности I до правой стороны
квадрата = 1. Расст. от $(4; 3)$ до $(3; 6)$ равно $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

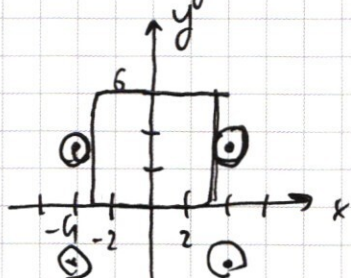
Расст. от $(3; 4)$ до $(3; 6)$ равно $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Расст. от центра окр. II до квадрата = $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Расст. от $(4; -3)$ до $(3; 0)$ равно $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Расст. от $(4; -3)$ до $(3; 6)$ равно $\sqrt{1+49} = \sqrt{50}$.

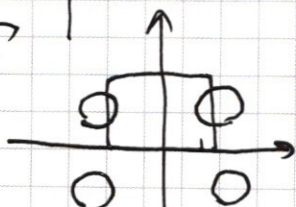
1) $0 \leq R \leq 1$. В этом случае никакая окружность
не имеет общих точек с квадратом т.е. Решений.

2) $R = 1$.



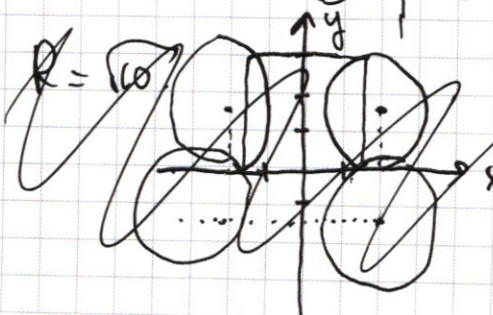
При $R=1$ нарисованы два решения.

3) $1 < R < \sqrt{10}$



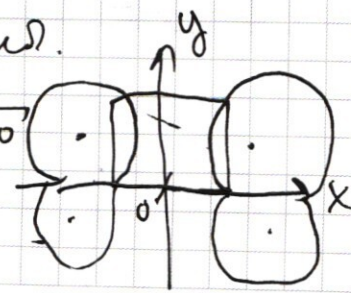
- 4 решения.

4) $R = \sqrt{10}$



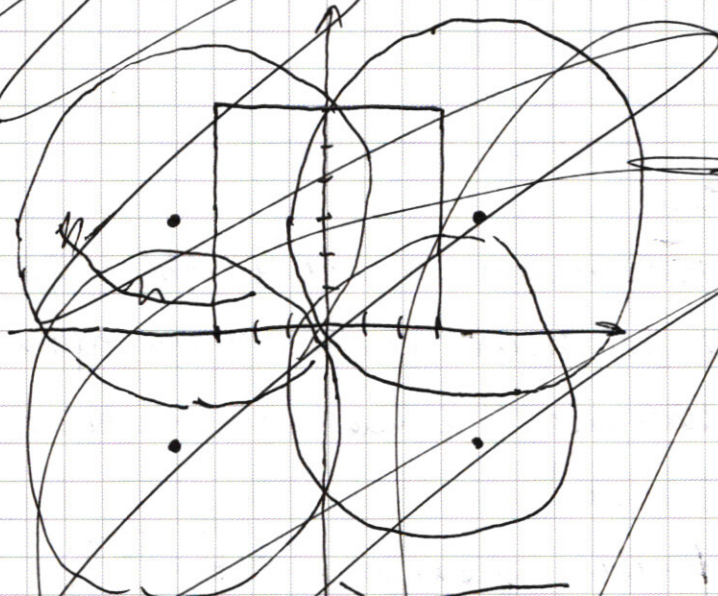
4 решения.

4) $R = \sqrt{10}$



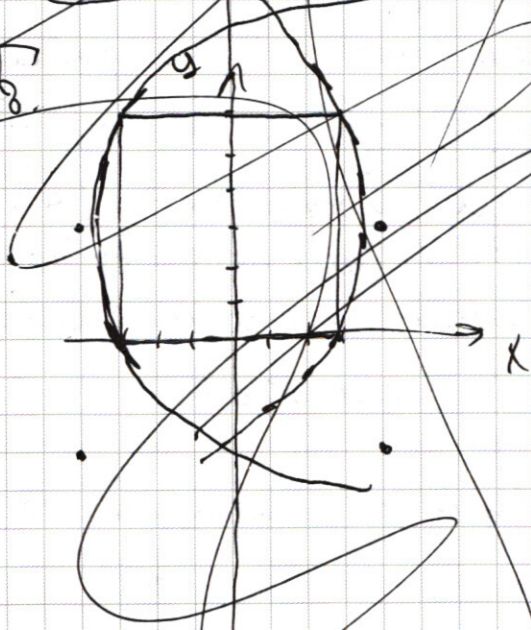
- 4 реш.

$$5) \sqrt{10} \in R \subset \sqrt{58}$$



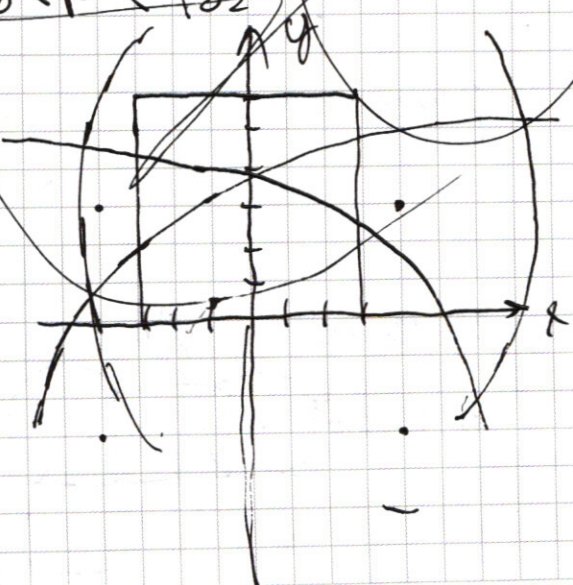
- Больше двух решений

$$6) R = \sqrt{58}$$



- Больше двух решений.

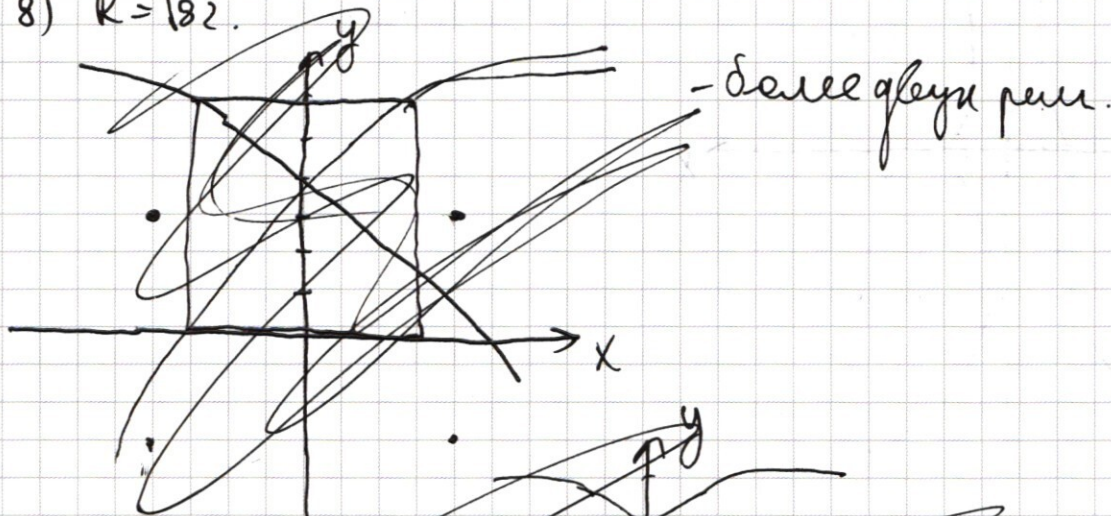
$$7) \sqrt{58} \in R \subset \sqrt{82}$$



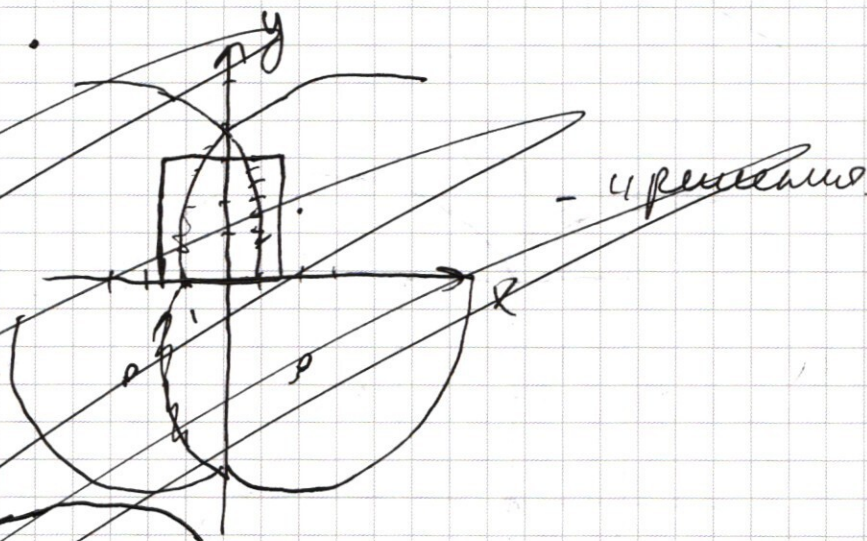
- Решение.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

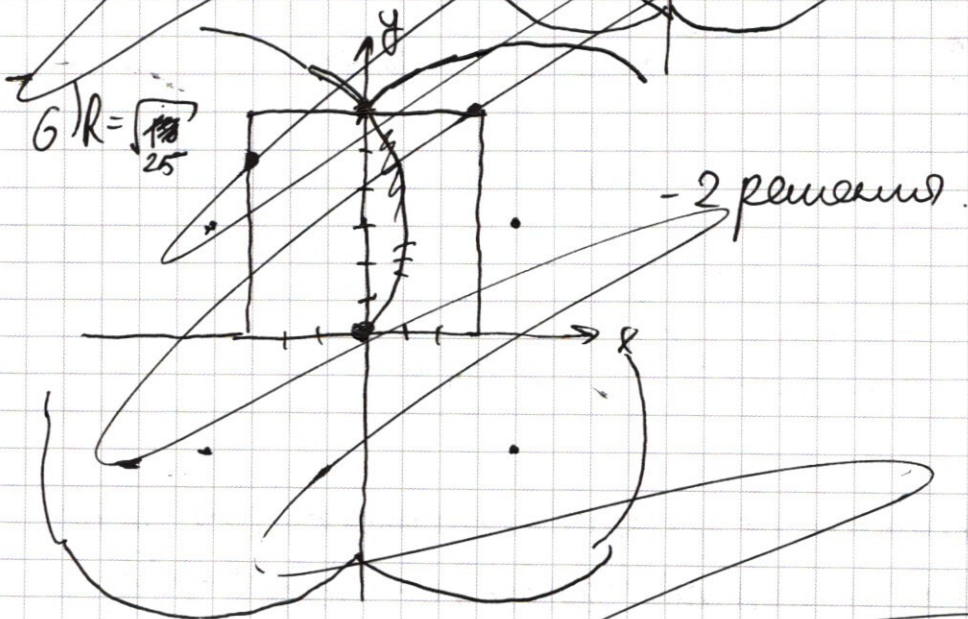
8) $R = \sqrt{82}$.



5) $\sqrt{10} < R < \sqrt{18}$
или $\sqrt{10} < R < \sqrt{54}$



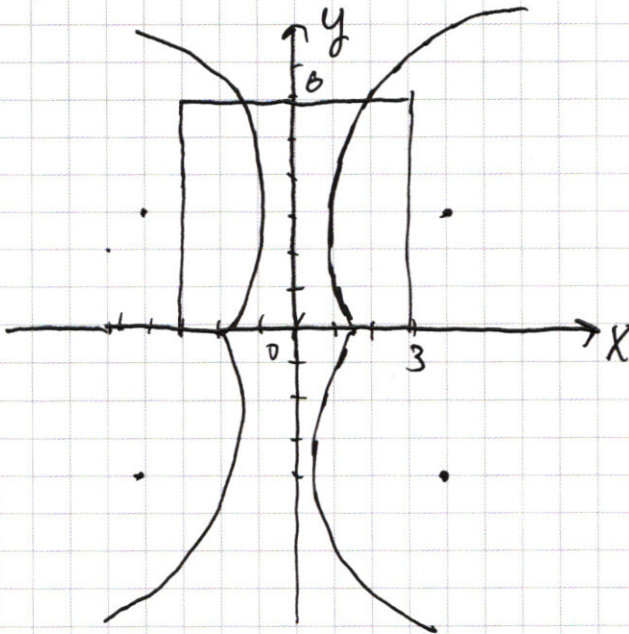
6) $R = \sqrt{\frac{10}{25}}$



7) ~~При $R > \sqrt{18}$ ни одна из окружностей не будет иметь общих точек с квадратом, ведь их радиусы~~

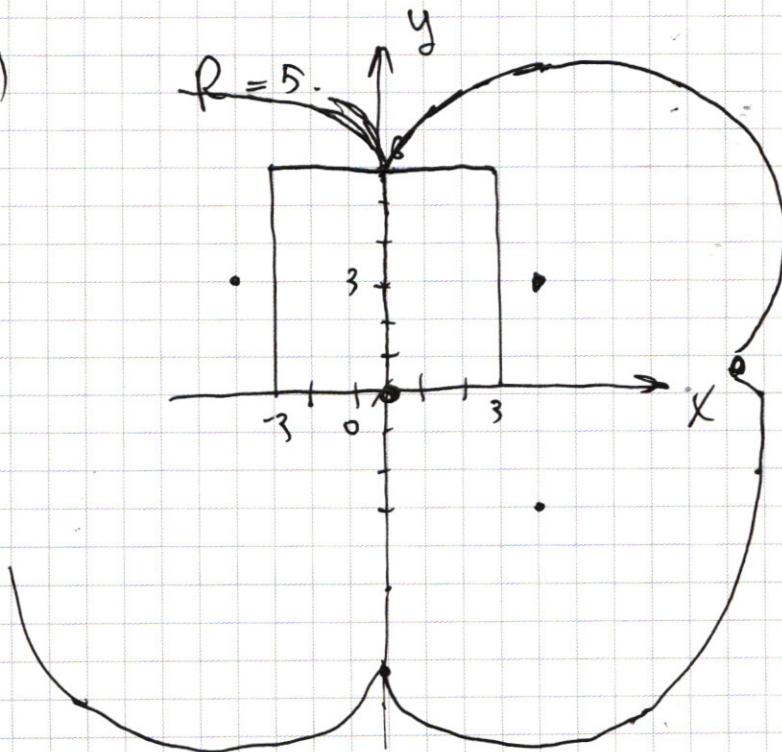
~~4) $\sqrt{10} < R < \sqrt{25}$~~

5) $\sqrt{10} < R < 5$



- 4 решения.

6)



- при $R=5$ ровно
два решения.
(0; 0) и (0; 6).

~~R=5~~

7) При $R > 5$ расстояние от центров окружностей до части квадрата их координатной четверти будет $< R$.
поэтому решений не будет.

$R=1, R=5 \Rightarrow \alpha=1, \alpha=25.$

Ответ: $\alpha=1, \alpha=25.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_8$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dots a_8 &= 3375 = 675 \cdot 5 = \\ &= 135 \cdot 5^2 = \\ &= 27 \cdot 5^3 = \\ &= 3^3 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 645 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 14 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$$

три пятерки три тройки и две единицы.
либо одна девятка две пятерки и три ед.
одна тройка три

~~11-3=~~

$$11-3=$$

$$\cos 11x - \cos 3x =$$

$$= 2 \cos$$

$$= 2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{7x}{2}$$

$$3-11=-8$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin 7x - \cos 7x =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x -$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\sin 3x - \sin 11x =$$

$$= 2 \sin(-4x) \cos 7x$$

$$\cos 11x -$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

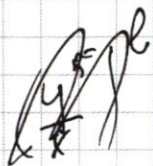
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

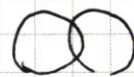
$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$\frac{D}{4} = y^2 + 4 - 4y + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 16y + 4 = 4(y^2 - 4y + 1).$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$



$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg xy}.$$

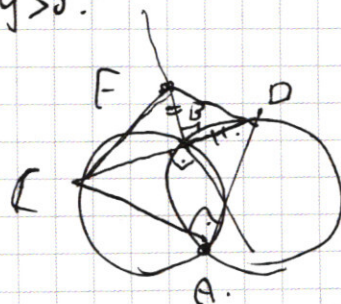


$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$$

$$(|x|-4)^2 + (|y-3|)^2 = a.$$

$$x > 0$$

$$y > 0.$$



$$3y^2 + 2y(2x-6) + 4x - x^2 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = x^2 + 36 - 12x - 12x + 3x^2 =$$

$$= 4x^2 - 24x + 36 =$$

$$4(x^2 - 6x + 9).$$

