МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

Значит наше число точно будет иметь 4 пятерки и может иметь еще цифры 3,3,3,1 или 9, 3, 1, 1

• посчитаем кол-во чисел с цифрами 5,5,5,5, 3, 3, 3, 1:

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!} \cdot \frac{4\cdot3\cdot2}{3!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 280$

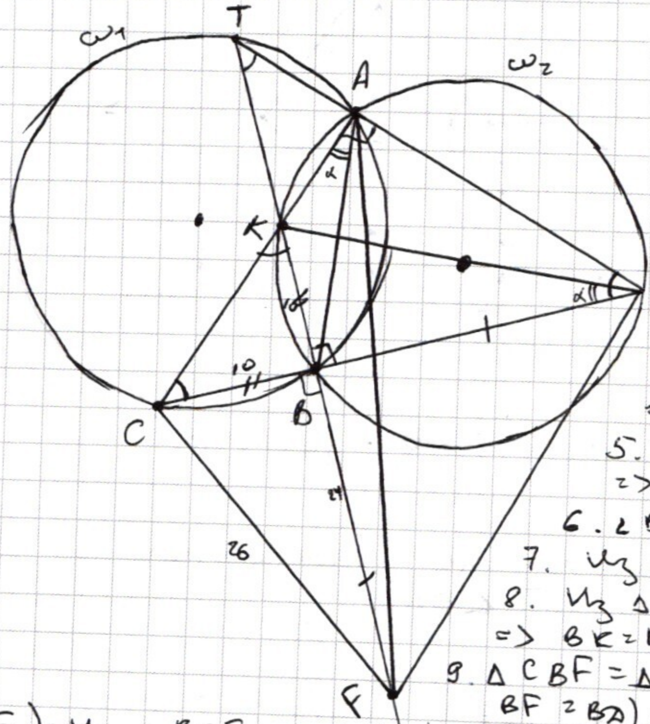
• посчитаем кол-во чисел с цифрами 5,5, 5, 5, 9, 3, 1, 1

$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!} \cdot 4\cdot3 = \frac{8\cdot7\cdot6^3\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot3}{\cancel{4}\cdot3\cdot2} = 56\cdot15 = 840$

Значит всего чисел $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120.

№6.



Дано: $R_1 = R_2 = 13$ (ω_1, ω_2) $\angle CAD = 90°$

$BF = BD$

б) $BC = 10$

Найти: а) CF

б) S_{ACF}

Решение:

А) 1. Пусть $AC \cap BF = K$, $AD \cap BF = T$

2. $\angle KBD + \angle KAD = 90° \Rightarrow ADBK$ - впис.

3. Т.к. $ADBK$ - впис и точки A, B, D лежат на $\omega_2 \Rightarrow K$ лежит на ω_2

4. $\Delta KCB \sim \Delta AKT$ ($\angle CBK = \angle KAT = 90°$, $\angle CKB = \angle TKA$) $\Rightarrow \angle KCB = \angle KTA \Rightarrow$
$\Rightarrow$ точка T лежит на ω_1

5. Т.к. $\angle KAD = 90° \Rightarrow KD$ - диаметр $\Rightarrow$
$\Rightarrow KD = 2R = 26$

6. $\angle BDK = \angle BAK = \alpha$

7. Из ΔBKD по т. синусов $\frac{BK}{\sin\alpha} = 2R$

8. Из ΔBAC по т. синусов $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow BK = BC$

9. $\Delta CBF = \Delta KBD$ ($BC = BK$; $\angle CBF = \angle KBD = 90°$; $BF = BD$) $\Rightarrow CF = KD = 26$

Б) 10. Из ΔBCF по т. Пифагора $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16\cdot36} = 24$

11. Т.к. $BC = BK \Rightarrow \Delta BCK$ - равнобед $\Rightarrow \angle BCK = \angle CKB$

12. Т.к. $ADBK$ - впис. $\Rightarrow \angle CKB = \angle ADB$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC \Rightarrow \Delta ACD$ - равнобед. $\Rightarrow AC = AD$

13. Из ΔCKB по т. Пифагора $CK = 10\sqrt{2}$

14. $AC = CK + AK = 10\sqrt{2} + AK = AD$

15. Пусть $AK = x$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

16. Из $\triangle AKD$ по т. Пифагора $AK^2 + AD^2 = KD^2$, тогда

$x^2 + (10\sqrt{2}+x)^2 = 26^2$

$2x^2 + 20\sqrt{2}x + 200 - 676 = 0$

$x^2 + 10\sqrt{2}x - \cancel{476}\,238 = 0$

$D/4 = 50 + 238 = 288$

$x_1 = -5\sqrt{2} - \sqrt{288} < 0$

$x_2 = -5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \Rightarrow AK = 7\sqrt{2}$

17. Т.к. $\triangle BCK$ - равнобед. и прямоуг. $\Rightarrow \angle BCK = \angle CKB = 45^\circ \Rightarrow \angle AKB = 180^\circ - \angle BKC = 135^\circ$

18. $S_{CBF} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 = 120$

19. $S_{CBK} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$

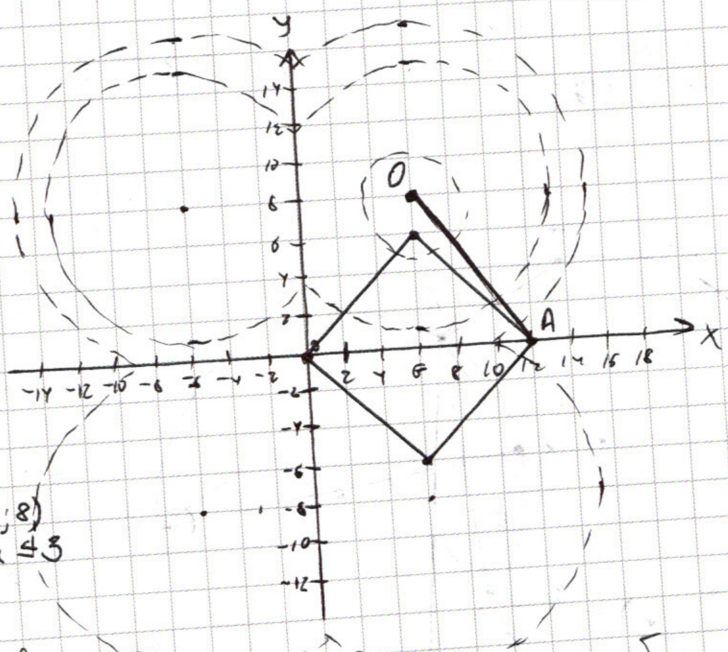
20. $S_{AKF} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot KF \cdot \sin\angle AKF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2}(10+24) \cdot \sin 135 = 7\sqrt{2} \cdot 17 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7 \cdot 17 = 119$

21. $S_{ACF} = S_{BCF} + S_{BCK} + S_{AKF} = 120 + 50 + 119 = 289$

Ответ: а) 26
б) 289

N 5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$



Заметим, что графиком ф-ии $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$ является квадрат с вершинами в точках (0;0) (0,12) (6;6) (-6;6)

Рассмотрим вторую ф-ию

• ~~~~ при $\sqrt{a} \le 3$ это просто окружность с центром (6;8) и решений будет 2 при $1 < \sqrt{a} \le 3$

• ~~~~ при $3 < \sqrt{a} \le 4$ это будет 2 соединенных окружности Заметим, что при любом значении $3 < \sqrt{a} \le 4$ - решений будет 2.

• при $\sqrt{a} > 4$ это будет 4 совмещенные окружности Тогда решение будет 2 при $4 < \sqrt{a} < OA$

$OA = \sqrt{36+64} = 10 \Rightarrow 4 < \sqrt{a} < 10$

Значит ровно 2 решения при ~~~~ $1 < \sqrt{a} < 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 < a < 100$

Ответ: $a \in (1; 100)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 10x$

$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\cancel{\cos}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 7x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 7x\right) + \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 3x - \cancel{\cos}\sin\frac{\pi}{4}\sin 3x\right) = \cos 10x$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos 10x$

$2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)\cos 2x = \cos 10x$

$2\cos 2x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$

1) $\cos 5x = \sin 5x$ – однородное ур.

$\operatorname{tg} 5x = 1$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z$

2) $\sqrt{2}\cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$

$\sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 5x + \sin\frac{\pi}{4}\sin 5x\right)$

$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$

$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$

$-2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0$

$\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in Z$

$7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in Z$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, n \in Z$

$\sin\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0$

$\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \pi n, n \in Z$

$\frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi n, n \in Z$

$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in Z$

$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z$

$\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}n, n \in Z$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$16 \cdot 70 = 1120$

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!} : \left(\frac{4\cdot3\cdot2}{3!} + 4\cdot3\right) =$$

$$= \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot3\cdot2} \cdot \left(\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2} + 12\right) =$$

$$= 70 \cdot 16 = \boxed{1120}$$

3 3 3 1

9 3 1 1

$\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}$ $4\cdot3$

$\cos\cdot\cos = \frac{1}{2}(\cos(\beta-\alpha)+\cos(\beta+\alpha))$

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2\cdot\cos\frac{7x+3x}{2}\cdot\cos\frac{7x-3x}{2} - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin\frac{7x+3x}{2}\sin\frac{7x-3x}{2}$$

$$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\sin 2x$$

$$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2\sin 5x\sin 2x$$

$$\cos 5x(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x) = \sin 5x(2\sin 2x - \sqrt{2}\sin 5x)$$

$$\cancel{\sin 7x - \cos 7x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x\right)}$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x\right) = \sqrt{2}\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{10x+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{4x}{2} =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = 2\sqrt{2}\cos 2x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) =$$

$$= 2\cos 2x\cos 5x - 2\cos 2x\sin 5x = \cancel{\cos 3x + \cos 7x}$$

$56 \cdot 5 = 270$

$56 \cdot 5 = 280$

$56 \cdot 15 = 840$

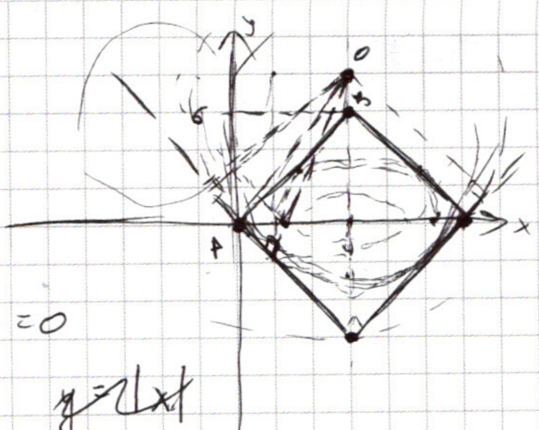
$840 + 270 = 1110$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№ 3.

$|x|$



$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$\cancel{2y^2 - 8y + 16 + y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 \ldots \frac{5}{4}x^3}$

$y^2 - 8y + 16 - (x^2 + 4x + 4) + 4 - 16 + y^2 - xy = 0$

$(y-4)^2 - (x+2)^2$

$y = 2|x|$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$ $\quad |x-6| = 6$ $\quad (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$

$\cancel{|-6-y| + |-6+y| = 12}$ $\quad O(6;8)$

$(|x-6-y| + |x-6+y|)(|x-6-y| - |x-6+y|) = 12(|x-6-y| - |x-6+y|)$

$(x-6-y)^2 - (x-6+y)^2 = 12|x-6-y| - 12|x-6+y|$

$\cancel{(x-6-y)^2 = x^2 - 6x + xy - 6x + 36 - 6y + xy - 6y + y^2 = x^2 + 2xy + y^2}$

$(x-6-y)^2 - 12|x-6-y| + 36 = (x-6+y)^2 - 12|x-6+y| + 36$ $\quad AB = 6\sqrt{2}$

$(|x-6-y| - 6)^2 = (|x-6+y| - 6)^2$

$$\begin{array}{r} 1{,}4 \\ 6 \\ \hline 8{,}4 \end{array}$$

1) $|x-6-y| - 6 = |x-6+y| - 6$

$|x-6-y| = |x-6+y|$ $\quad |y| = x$

2) $|x-6-y| - 6 = -|x-6+y| + 6$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

1.1) $x-6-y = x-6+y$

$-y = y$

$y = 0$

2.2) $x-6-y = -x+6-y$

$2x = 12$

$x = 6$

$\cancel{\sqrt{a} > 4}$ $\quad \sqrt{a}$

$\sqrt{a} > 1$ $\quad 6\sqrt{2} > 8$

$64 + (|y|-8)^2 = 100$

$(|y|-8)^2 = 36$

$1 < \sqrt{a} \le 8$

$1 < a \le 64$

$y = |x-6| - 6$

$AO = \sqrt{64+36} = 10$

$|y|-8 = 6$ $\quad |y|-8 = -6$

$|y| = 14$ $\quad |y| = 2$

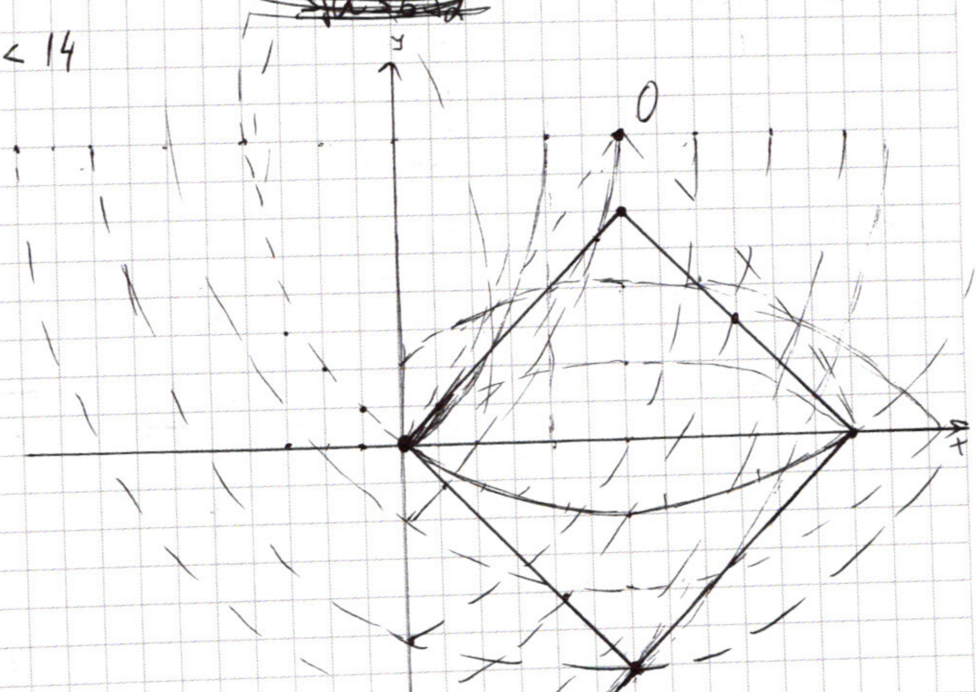
$y = \pm 14$ $\quad y = \pm 2$ $\quad 10 \le \sqrt{a} < 14$

$(|y|-8)^2 = 64$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -\,49 \\ \hline 51 \end{array}$$

$|y|-8 = 8$ $\quad |y|-8 = -8$

$|y| = 16$ $\quad |y| = 0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 10x$

$\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos 7x - \cos\frac{\pi}{4}\sin 7x) + \sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos 3x - \sin 3x\cos\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos 10x$

$2\sin(\frac{\pi}{2} - 5x)\cos(-2x) = \cos 10x$

$2\sin(\frac{\pi}{2} - 5x)\cos 2x = \cos 10x$

$2\cos 2x(\sin\frac{\pi}{2}\cos 5x - \sin 5x\cos\frac{\pi}{2}) = \cos 10x$

$\cancel{2\cos^2 5x = \cos 10x}$ $\quad 2\cos(2x)\cos(5x) = \cos 10x$

$\cancel{2\cos^2 5x = 2\cos^2 5x - 1}$ $\quad \cos 7x + \cos 3x = \cos 10x$

$\cos(\frac{\pi}{4} + 7x) + \cos(\frac{\pi}{4} + 3x) = \cos 10x$

$2\cos(\frac{\pi}{2} + 5x)\cos 2x = \cos 10x$

$2\cos 2x(\cos\frac{\pi}{4}\cos 5x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 5x) = \cos 10x$

$\cancel{-2\cos 2x \cdot \sin 5x = \cos 10x}$ $\quad \sqrt{2}\cos 2x\cos 5x + \sqrt{2}\cos 2x\sin 5x = \cos 10x$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\beta-\alpha) + \cos(\beta+\alpha))$

$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x + \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$\sqrt{2}\cos 2x = \cos 5x - \sin 5x$

$\cancel{\cos 7x + \cos 3x = \cos}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}(\cos 7x\cos 3x - \sin 7x\sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x(1 - \sqrt{2}\cos 3x) + \cos 3x =$

$\cancel{\cos 7x(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x) +}$

$R_1 = R_2 = 13 \qquad CF - ?$

$\frac{2BP}{\sqrt{2}} = 26$

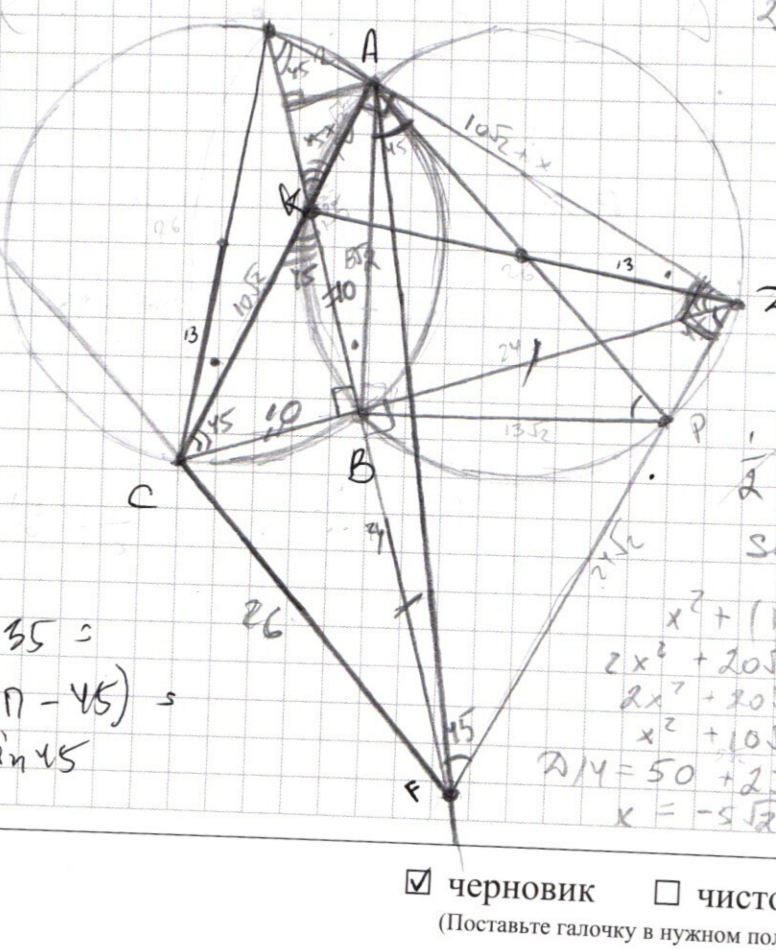
$BP = 13\sqrt{2}$

$26 \cdot 26$: 156, 52, 676

$S_{ACF} - ?$

$\cancel{BF = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576}}$

$BF = \sqrt{(26-10)(26+10)} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24$



$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 34 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 26\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{34}{26\sqrt{2}} = \frac{17}{13\sqrt{2}}$

$\sin 135 = \sin(\pi - 45) = \sin 45$

$x^2 + (10\sqrt{2} + x)^2 = 676$

$2x^2 + 20\sqrt{2}x + 200 = 676$

$2x^2 + 20\sqrt{2}x - 476 = 0$

$x^2 + 10\sqrt{2}x - 238 = 0$

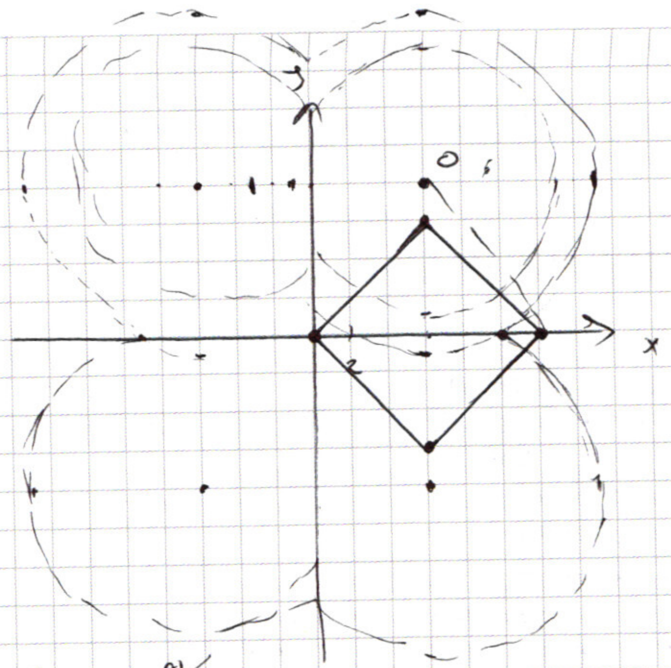
$D/4 = 50 + 238 = 288$

$x = -5\sqrt{2} + \sqrt{288} = 12\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$17 \cdot 7 = 119$; 120, 119, 50, 289

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$1 < \sqrt{a} < 10$

$1 < a < 100$

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\sqrt{2}(\cancel{\cos} \sin \frac{\pi}{4} \cos 7x - \sin 7x \cos \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}(\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin 3x \cos \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$

$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{4} - \cancel{8}3x) = \cos 10x$

$2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \sin 2x = \cos 10x$

$2\sin 2x(\cancel{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x) = \cos 10x$

$\sqrt{2} \sin 2x \cos 5x - \sqrt{2} \sin 2x \sin 5x = \cos 10x$

$\sqrt{2} \sin 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

$\sqrt{2} \sin 2x(\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$\cancel{2\sin} \sqrt{2} \sin 2x = \cos 5x + \sin 5x$

$\sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2}(\sin \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin 5x \cos \frac{\pi}{4})$

$\cancel{\sin 2x = \sin(\frac{\pi}{4} + 5x)}$

$\cancel{\sin 2x}$

$\cancel{B}$ $\cancel{\frac{\sqrt{6}}{3}}$ $\frac{\sqrt{6}}{3} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 5x$

$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x - \sin 5x$

$\sqrt{2} \cos 2x = \sqrt{2} \cancel{(} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

$\cos 2x = \cos(5x + \frac{\pi}{4})$

$\cos 2x - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$\cancel{-2\sin}$

$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 2x = 0$

$-2\sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{7x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШ
ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

20010037

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$(1)\ x^{4\lg y} \cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

$x^{4\lg y} \cdot 10^{-2} = (-x)^{\lg(-xy)}$

$\cancel{(x)^{4\lg y - \lg(-xy)} = -100}$

$\cancel{x^{\lg y^4 - \lg(-xy)} = -100}$

$\cancel{x^{\lg(-\frac{y^3}{x})} = -100}$

$x^{4\lg y} \cdot 10^{-2} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$

$x^{4\lg y} = \cancel{1000x}\ 1000(-x)^{\lg y}$

$\cancel{(-x)^{4\lg y}}$ ~~$= 10^3$~~

$\cancel{(-x)^4 = 10^3}$

$\cancel{-x = \sqrt[4]{10^3}} \qquad \cancel{x^4 = 10^3}$

$\cancel{x = -\sqrt[4]{10^3}} \qquad \cancel{x = \sqrt[4]{10^3}}$

$2y^2 + \sqrt[4]{10^3}\,y + 10\sqrt{10} + 4\sqrt[4]{10^3} - 8y = 0$

$2y(y-4) - \sqrt[4]{10^3}(y+4) - 10\sqrt{10} = 0$

$\angle KSO - ?$
(KLM)