МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64}-1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \sin 4x + 2\sin\frac{-8x}{2}\cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x\sin 4x - 2\sin 4x\cos 7x = -2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) =$

$= \sqrt{2}\cos 14x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) =$

$= \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) \Rightarrow$

$\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) + 2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = 0.$

$\sqrt{2}(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x) = 0.$

$\left[\begin{array}{l}\cos 7x + \sin 7x = 0.\\ \cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x = 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x\right) = \sqrt{2}\left(\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0.$

$7x + \frac{\pi}{4} = \pi k \quad k \in Z$

$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x\right) =$ $\quad 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$

$= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)\right)$ $\quad x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \quad k \in Z$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x = 0.$

$= 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2}\right) = 0 = 2\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0\\ \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right) = 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k \quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k.$

$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \quad k \in Z$

$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \pi - 44x = 4\pi + 8\pi k \Rightarrow 44x = -3\pi + 8\pi k.$

$x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{8}{44}\pi k \quad k \in Z$

$x = -\frac{3}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi k$

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$

$x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \qquad k \in Z.$

$x_3 = -\frac{3}{44}\pi + \frac{2}{11}\pi k.$

№3.

$$\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1)\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 & (2)\end{cases}$$

Прологарифмируем по 10 $\Rightarrow \lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg\left(y^{2\lg xy}\right)$

$\Rightarrow \lg x\left(\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)\right) = \lg x\left(5\lg y - \lg x\right) = 2\lg xy\lg y = 2\lg y(\lg x + \lg y)$

$\Rightarrow 5\lg x\lg y - \lg^2 x = 2\lg y\lg x + 2\lg^2 y$

$2\lg^2 y + \lg^2 x - 3\lg x\lg y = 0$. Разделим на $\lg^2 y$. Т.к $\lg y \neq 0$

$2 + \left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2 - 3\frac{\lg x}{\lg y} = 0$ Замена $t = \frac{\lg x}{\lg y}$.

$t^2 - 3t + 2 = 0$ $D: 9-8=1$

$t_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 2 \Rightarrow \lg x = \lg y^2 \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = y^2 \\ x = y \end{array}\right.$

$t_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 1 \rightarrow \lg x = \lg y \Rightarrow$

1) Подставим $x = y^2$ в 2 $\Rightarrow$

$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0.$

$y(y-3)(y^2+y-4) = 0. = y(y-3)\left(y - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(y - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$; $y = 3 \rightarrow x = 9$; $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \rightarrow x = \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4}$

$y = \frac{-\sqrt{17}-1}{2} \rightarrow x = \frac{(\sqrt{17}+1)^2}{4}$

2) Подставим $x = y$ в 1 $\Rightarrow y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0.$

$-4y^2 + 8y = 0 = -4y(y-2) = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow x = 0$; $y = 2 \rightarrow x = 2$

Ответ: $(0;0)$; $(2;2)$; $(9;3)$; $\left(\frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$; $\left(\frac{(\sqrt{17}+1)^2}{4}; \frac{-\sqrt{17}+1}{2}\right)$

№1.

Разложим 3375 на множители $\Rightarrow 3^3 \cdot 5^3$

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ у числа 8 мест под цифры

$\Rightarrow$ возможны два варианта ~~расс.~~ (совокупностей) комбинаций чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1.

2) 9, 3, ~~3~~, 5, 5, 5, 1, 1, 1.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1

Кол-во вариантов будет: $\frac{8!}{3!2!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2} = 560.$

2) 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1

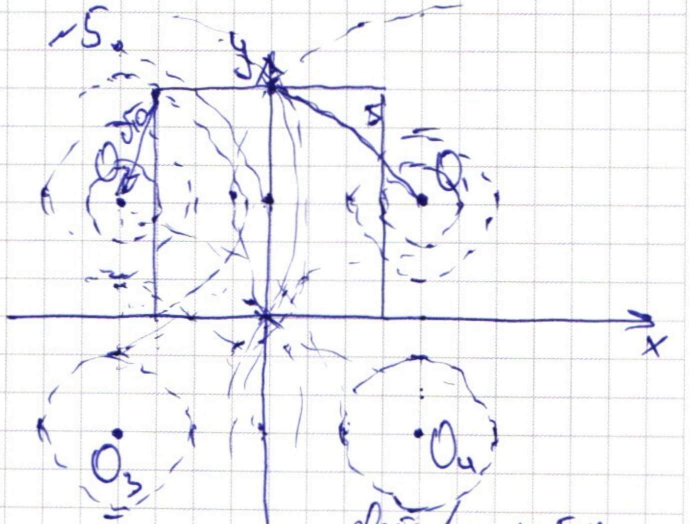
Кол-во вариантов будет: $\frac{8!}{3!\,3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot2\cdot3} = 140\cdot8 = 1120.$

⇒ Всего их $1120+560 = 1680$

Ответ: 1680.

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$



В точках O_1, O_2, O_3, O_4 – центры окружности с радиусом $\sqrt{a}$

a: чтобы было 2 решения.

1) $\sqrt{a} = 1$ – 2 решения.

2) $\sqrt{a} \in (1; \sqrt{10}]$ – 4 решения.

3) $\sqrt{a} \in (\sqrt{10}; 4)$ – 4 решения. от 4 до 5 – 4 решения.

Остальные 1-5 я нашёл также увеличивая радиус у окружностей

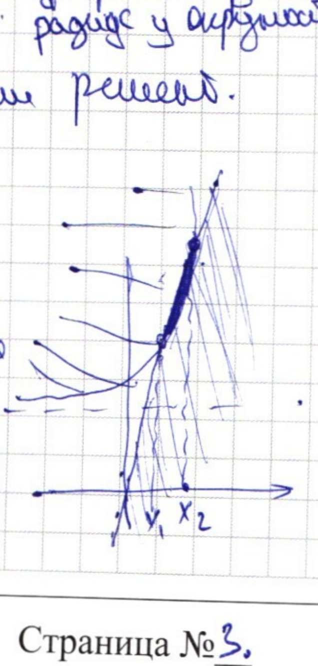
4) $\sqrt{a} = 5$ – 2 решения 5) $\sqrt{a} \in (5; +\infty)$ – не будет решений.

Ответ: $a = 1, 25$.

№7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

Примерный вид графиков:



Получается, что искомые точки будут находится в закрашенной области. Причем прямая будет иметь

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2 общие точки с показательной функцией (показательная функция выпукла вниз, можно это определить по 2 производной).

$\Rightarrow \begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$ Подбором находим эти общие точки, это x_1, x_2.

$x_1 = 6$

$x_2 = 70$. $\Rightarrow$ все точки будут лежать в области от 6 до 70 по oX и между прямой и показательной функцией по oY.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x =$ → $\cos(2\alpha)$

$= \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

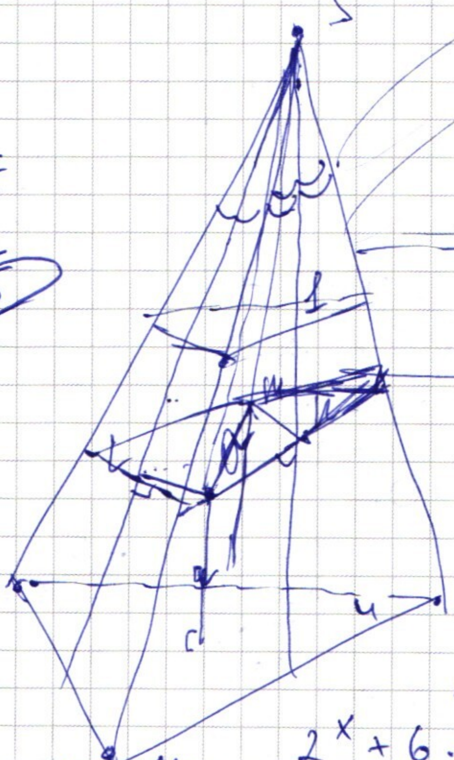
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$-2\cdot\sin 7x \sin 4x - 2\sin(4x)\cos(7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

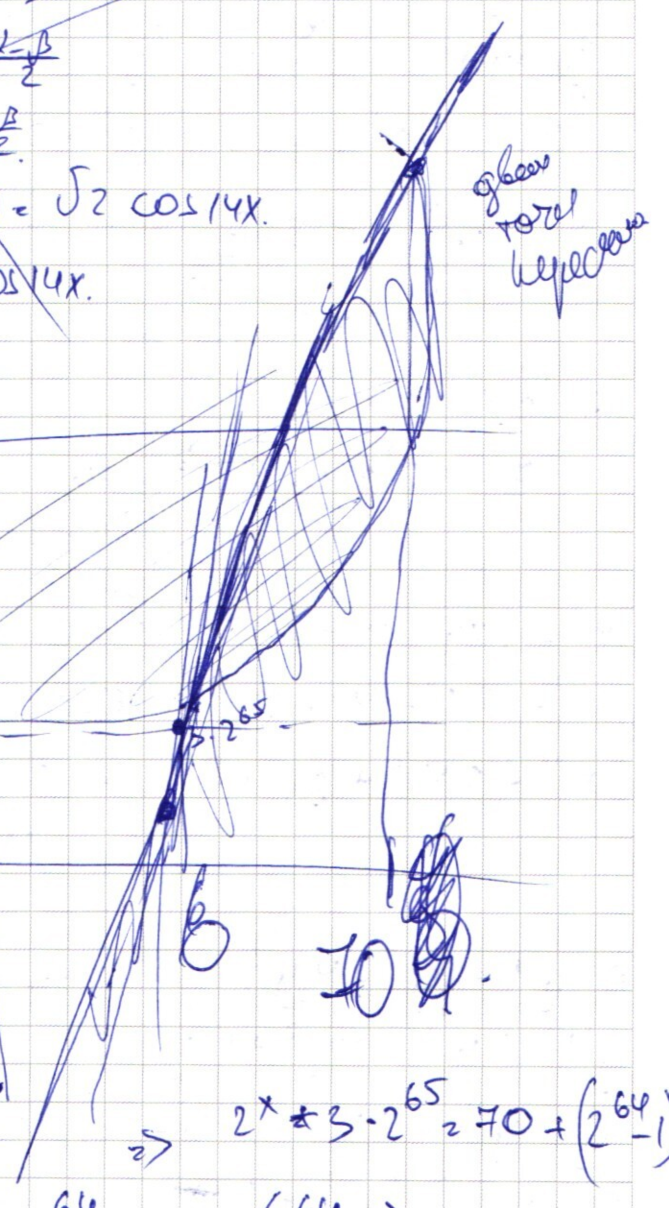
$-2\sin 4x(\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}(\sin(7x+\frac{\pi}{4}))$

$\sqrt{2}\cos(7x-\frac{\pi}{4})$



$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$



$\Rightarrow 2^x + 3\cdot 2^{65} = 70 + (2^{64}-1)x$

$2^x + 6\cdot 2^{64} = 70 + (2^{64}-1)x$

$x = 6$

$x = 70$

$2^6 = 64$

$64 + 6\cdot 2^{64} = 70 + 6\cdot 2^{64} - 6 =$

$2 + 6\cdot 2^{64} = 70 + 2^{64} - 1 < 6\cdot 2^{64} + 64$

$2 + 6\cdot 2^{64} = 69 + 2^{64}$

$2^{70} = 2^{64}\cdot 64$

$2^{70} + 6\cdot 2^{64} = 64\cdot 2^{64} + 6\cdot 2^{64} = 70\cdot 2^{64} = \cancel{70} + 2^{64}\cdot 70 \cancel{70}$

140
8
560
680

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(3) $\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} = y^{2(\lg x+\lg y)}$ ОДЗ: $x,y>0$

$\frac{y^5}{x}$ и $y^{2\dots} > 0 \Rightarrow$ возьмем lg от обеих частей.

$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg\left(y^{2\lg xy}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lg x(5\lg y - \lg x) = 2\lg xy \cdot \lg y = 2(\lg x+\lg y)\lg y$

$\Rightarrow \lg x\cdot 5\lg y - \lg^2 x = 2\lg x\lg y + 2\lg y^2$

Разделим на $\lg y^2 \Rightarrow$

$2\lg y^2 + \lg^2 x - 3\lg y\lg x = 0.$

$2 + \left(\frac{\lg x}{\lg y}\right)^2 - 3\frac{\lg x}{\lg y} = 0$ Замена $\frac{\lg x}{\lg y} = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0.$ $D: 9-8=1 \Rightarrow t_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$t_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x = \lg y\\ \lg x = 2\lg y.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=y^2\end{array}\right.$

$D: 1+16=\sqrt{17}$

$y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$x^2 - 5x^2 + 8x = 0. \Rightarrow 8x - 4x^2 = 0$

$4x(2-x) = 0.$

$\Rightarrow x=0 \quad y=0$

$x=2. \quad y=2.$

$\Rightarrow y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0.$

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0.$

$y(y-3)(y^2+y-4) = 0. \Rightarrow$

	1	−2	−7	12
3	1	1	−4	0

$\Rightarrow y^2 - y + 4.$

$27 - 18 - 21 + 12 =$

$y_1 = 0 \quad x = 0$

$y_2 = 3 \quad x = 9$

$y_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad x = \wedge 2$

$y_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad x = \wedge 2.$

$(y^2+y-4)(y-3) = y^3+y^2-4y-3y^2-3y+12 =$

$= y^3 - 2y^2 - 7y + 12$

$D: 1+16 = 17 \Rightarrow \sqrt{17}$ $y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение 2

$$2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}-11x+3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}-11x-3x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\cos 14x.$$

$$2\sin\left(\frac{-8x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-14x}{2}\right)=\cos 14x.$$

$$2\sin(-4x)\cos\left(\frac{\pi}{4}-7x\right)=\cos 14x \quad V$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\ldots\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos 11x-\cos 3x-\sin 11x+\sin 3x=\sqrt{2}(\cos 14x)=\sqrt{2}\left(\cos(11x+3x)\right)=$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos 11x\cos 3x-\sin 3x\sin 11x\right)$$

$$\Rightarrow\cos 11x-\cos 3x-\sin 11x+\sin 3x-\sqrt{2}\cos 11x\cos 3x+\sqrt{2}\sin 3x\sin 11x=0$$

$$\cos 11x\left(1-\sqrt{2}\cos 3x\right)+\sin 11x\left(\sqrt{2}\sin 3x-1\right)+\sin 3x-\cos 3x=0.$$

$$\cos 11x-\cos 3x-\sin 11x+\sin 3x=\sqrt{2}\cos 14x.$$

$\cancel{2\cos 14x}$

$$\cos\alpha-\cos\beta=\cancel{2\cos}$$

$$=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\Rightarrow -2\sin\frac{11x-3x}{2}\sin\frac{11x+3x}{2}+\sin 3x-\sin 11x=$$

$$=-2\sin(4x)\sin(7x)+2\sin\frac{3x-11x}{2}\cos\frac{3x+11x}{2}=$$

$$=-2\sin(4x)\sin(7x)+2\sin(-4x)\cos(7x)=\sqrt{2}\cos 14x.$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=$$

$$-2\sin(4x)\sin(7x)-2\sin(4x)\cos(7x)=\sqrt{2}\cos 14x$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$-2\sin(4x)\left(\sin 7x+\cos 7x\right)=\sqrt{2}\cos 14x=\sqrt{2}\left(\cos^2 7x-\sin^2 7x\right)=$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}\cdot\cos^2 7x-\sqrt{2}\sin^2 7x+2\sin(4x)\sin(7x)+2\sin(4x)\cos(7x)=0.$$

$$\cos(7x)\left(\sqrt{2}\cos 7x+2\sin 4x\right)+\sin(7x)\left(2\sin(4x)-\sqrt{2}\sin(7x)\right)=0.$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$ (25)

a? чтобы было 2 решения

1) $(|x|-4)^2 + ((y|-3)^2 = a$

1) $x, y > 0$. тогда $(x-4)^2 +$

$+(y-3)^2 = a$

2) $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

1 $y-3-x \geq 0$ $\quad y \geq x+3$

2 $y-3+x \geq 0$

$y \geq 3-x$

а) 1 с $-$, 2 с $+$

~~$-y+3+x-y+3-x=6$~~

~~$-2y+6=+6$~~

~~$-2y=0 \Rightarrow y=0$~~

$-y+3+x+y-3+x=6$

$2x=6 \quad x=3$

2) 1 с $+$, а 2 с $-$

$-y+3+\cancel{x}-y+3-\cancel{x}=6$

$y=0$

б) $(0;10) \rightarrow$ 1 с $+$, 2 с $+$ $\Rightarrow y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$

$2y-6=6 \quad 2y=12$

$y=6$

в) $(-5;+5) \rightarrow$ 1 с $+$, 2 с $-$

$\Rightarrow$ ~~$-y+3+x-y+3-x=6$~~ $\Rightarrow y-3-x-y+3-x=6$

~~$-2y+6=6 \quad y=0$~~

$-2x=6$

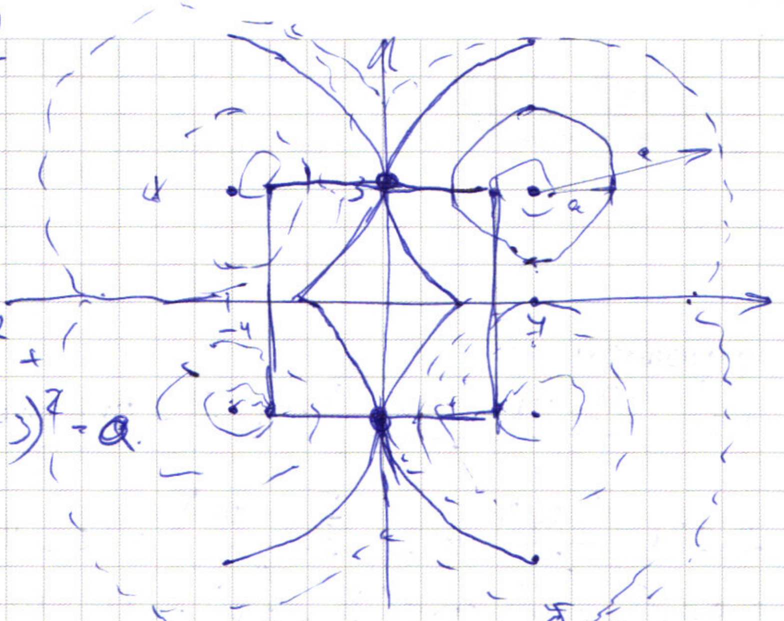
$x=-3$

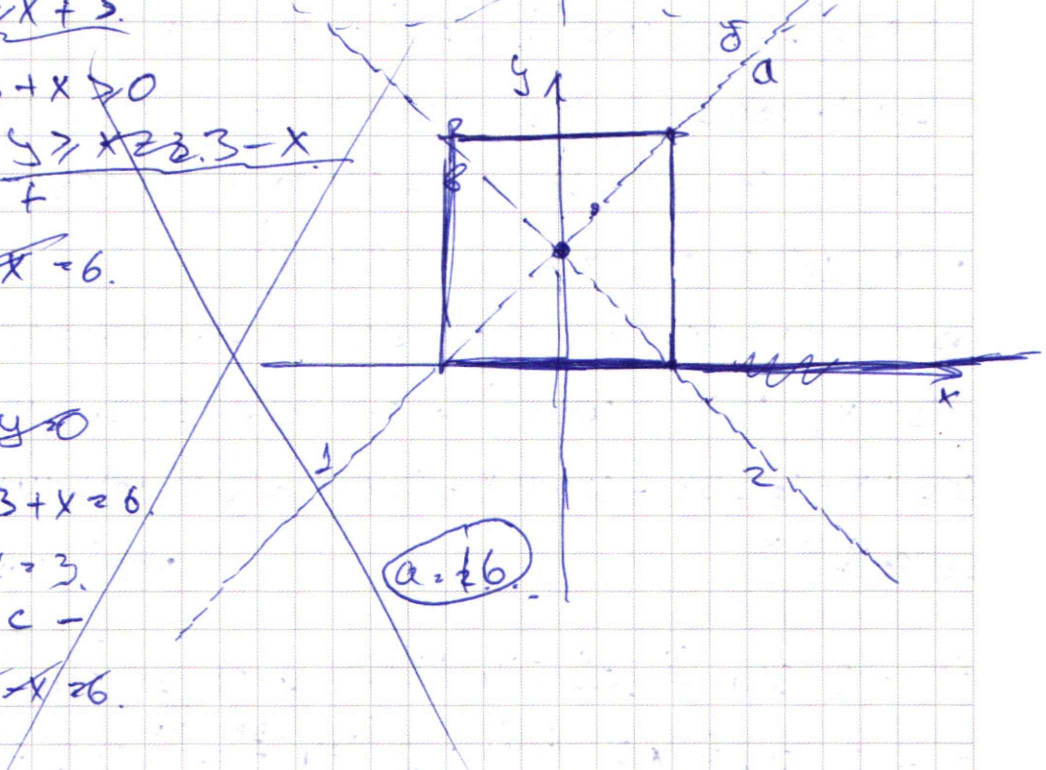
$|6-3-2| + |6-3+2| =$

$= 5+1 = 6$

(0;3)

~~$|3-2|+|0-3+3|=0$~~





$a = \pm 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) . . . .

$a_1 \ldots a_8$

$a_1 \cdot \ldots \cdot a_8 = 3375 = 675 \cdot 5 = 135 \cdot 5^2 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 9 \cdot 3$

3375 : 5 = 675; 675 : 5 = 135; 135 : 5 = 27; $27 = 3^3$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$

$\frac{\pi}{4} - 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$7x = -\frac{\pi}{4} +$

$\Rightarrow$ но 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1 $\Rightarrow$ ~~8·7·6·5~~·4·3·2·1·1

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5040$

C^8_4 160 · 7 = 1120

210 · 24 = 84; 42 · ... = 5040

не убрал повторяющиеся!!

2) но 5, 5, 5, 3, 9 $\Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 720$

140 · 8 = 1120

24 · 30 = 720

$\Rightarrow 5040 + 720 = 5760$

2) $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 11x\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 11x\right) \quad -\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\cos 3x \cos\frac{\pi}{4} - \sin 3x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\Rightarrow$

$2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x + 3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 14x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} = y^{2(\lg x+\lg y)} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x, y > 0$.

$2x^2-4xy-8x-6y^2+24y=0$.

$(x^2-4)^2-16+(x^2-2y)^2-4y^2-6y^2+24y ~~+16-16~~ ~~-4+4~~$

$+16-16$.

$x^2+16-8x-16+x^2+4y^2-4xy$.

~~$-4y^2-6y^2+24y$~~ $-4y^2-6y^2+24y-16=$

$=-10y^2+24y-16=-y^2-9y^2+24y-4=$

$2\cdot 4\cdot 3y \quad 4\cdot 4$

$=-y^2-(9y^2-24y+16)=$

$=-y^2-(3y-4)^2$

$(x^2-4)^2-16+(x-2y)^2-y^2-(3y-4)^2+16=0$.

$(x^2-4)^2+(x-2y)^2-y^2-(3y-4)^2=0$.

$x^2-x(2y+4)+3y^2+12y=0$.

D: $4y^2+16+16y-12y^2-48y=-8y^2-32y+16=$

$=-8(y^2+4y-2)$.

$y^2+4y-2=0$

D: $16+8=24 \Rightarrow 2\sqrt{6}$

$y_1=\frac{-4+2\sqrt{6}}{2}=-2+\sqrt{6}$

$y_2=-2-\sqrt{6}$.

$x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0$.

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

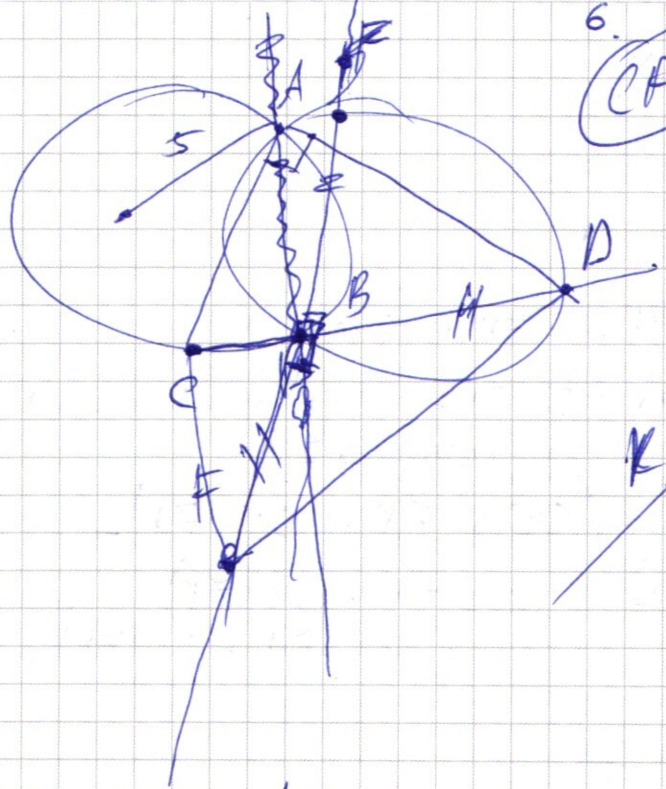
$y>2^x+3\cdot 2^{65}$ $\quad x,y\in Z$ сколько?

$y\leq 70+(2^{64}-1)x$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



6.

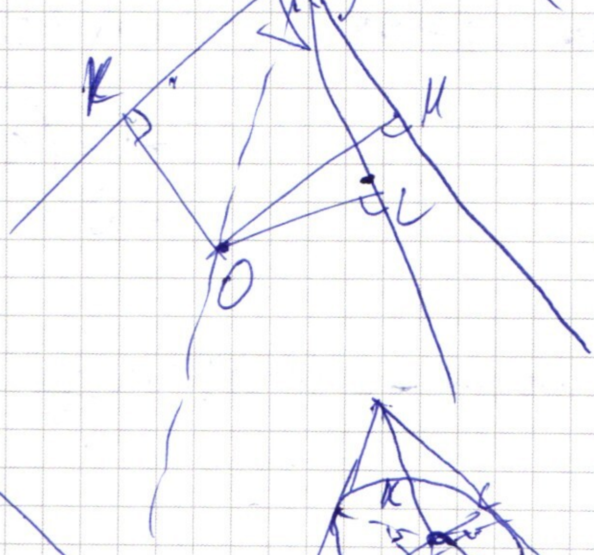
CF? $x=270$

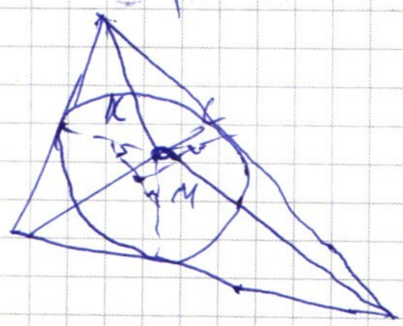
$\sum = ((g(n) - f(n)) \cdot u)$

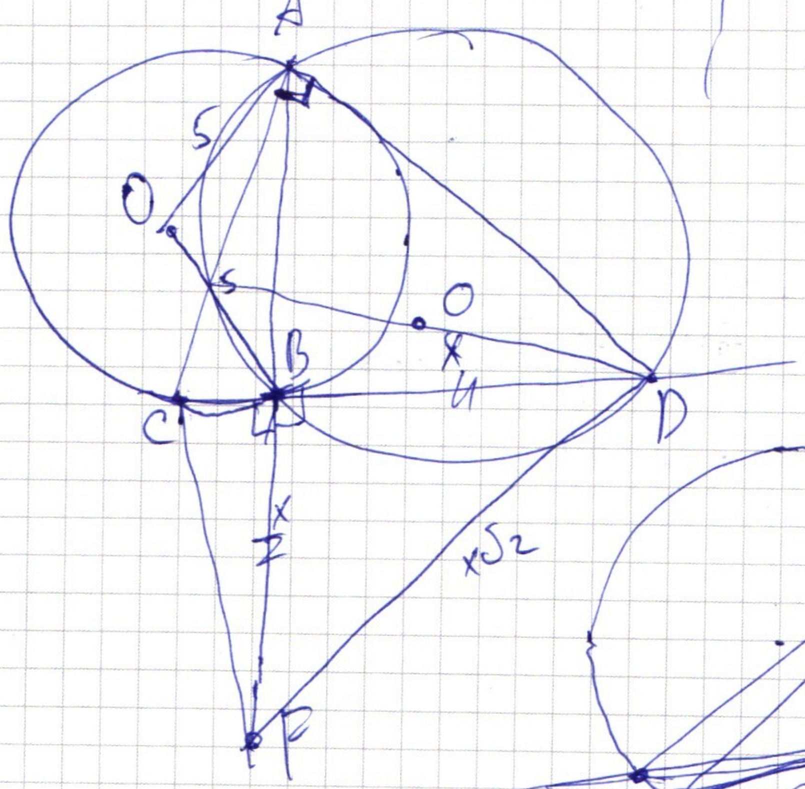
№6

$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$g(n) = 270 + (2^{64}-1)x$







CF?

$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

$\downarrow$

$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x.$

$2^x + 6 \cdot 2^{64} < 70 + x \cdot 2^{64} - x.$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

$-2\sin 7x \sin 4x + 2\sin \cancel{4x}\cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x.$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x =$

$= \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) =$

$= \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 11x\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x.$

$-2\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 11x + 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 11x - 3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x.$

$-2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)\sin(4x) = \cos 14x.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)