МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(1-3)(3^5+\ldots+3^{30}) = 3^5-3^{31}$

26×93: 78, 234, 2418

13×105: 1300 + 65 = 1365

13×27: 91, 26, 351

$2418-1365 = 1053$

$2106-273 = 1833$ $\quad$ $702-9 = 693$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

256 289

$\frac{8\cdot 2\cdot 6\cdot 5^2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$

64827	9
7203	3
2401	7
343	7
49	7^2
1	

$64827 \,|\, 9 = 7203$; -63, -18, -27

$2401 \,|\, 7 = 343$; -21, -28, -21

$64827 = 3^3\cdot 7^4$

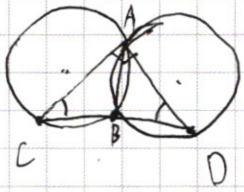
$C_8^4 \cdot \left(4\cdot 3 + C_4^3\right)$

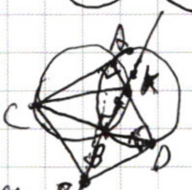
$\frac{(50-r)}{(50+r)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 450-4r = 350+3r$

$r = \frac{50}{7}$

$48r^2 = 7r\cdot \frac{48}{7}r$

$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{7}\right)$





$\frac{\frac{48}{7}r}{6r}\cdot 9 = \frac{72}{7}$

$y > 3^x + 4\cdot 3^{28} = 3^x + 3^{29} + 3^{28}$

$y \le 93 + 3\cdot(3^{27}-1)\cdot x = 3^4+3^3+3^1+x\cdot 3^{28} - 3x$

$34^2 = 900 + 61 + 63 + 65 + 67 = P$

$= 1156 - 256 = 900$

$3^{28}(x-4) + 3\cdot(31-x) - 3^x$

$3(31-x) + x\cdot 3^{28}$

$3^{28} + \ldots + 26\cdot 3^{28} + 3(26+\ldots+1) - (3^5+\ldots+3^{30})$

$x \in \{5;\ldots;30\}$

$2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\right)^2 =$

$= 2\cdot\left(\cos^2\frac{x}{2} - \cancel{\sin^2\frac{y}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} - \sin^2\frac{y}{2} + \cancel{\cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{y}{2}}\right) = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{y}{2} - 2 = \cos x + \cos y$

$2\cdot\left(\cos\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{y}{2} +$

$+ \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin^2\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} - \ldots$

$= \sin x - \sin y$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x +$

$+ 2\cos 5x\cdot\sin 2x + 2\cos 4x =$

$= 2\cos 5x(\cos 2x + \sin 2x) +$

$\cos 3x\cdot\cos 2x - \sin 3x\cdot\sin 2x$

$(\sqrt{2}\cos 3x + 1)\cdot\cos 2x - (\sqrt{2}\sin 3x + 1)\cdot\sin 2x$

$+ \sqrt{2}\cdot\cos 4x = (\cos 2x + \sin 2x)\left(2\cos 5x + \sqrt{2}\cdot(\cos 2x - \sin 2x)\right) = 0$

$\cos^2 2x - \sin^2 2x$

$2\cos^2 x - 1$

$2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$

$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$

$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$

$(x+y)^2 - (2x-3)^2 + 9 + 4y = 0$

$\frac{y^2}{2} + 2xy + 2x^2$

$2\ln(x) + 2\ln(y^2)$

$\log_x\left(\frac{(x^7)^{\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}}\right) = 7\ln(-y) - \log_x\left((-y)^{\ln(-y)}\right) = 2\ln(x\cdot y^2)$

$\frac{(y+2x)^2}{2} + \frac{(y+4)^2}{2} = \frac{y^2}{2} + 4y + 8$

$-\left(\sqrt{5}x - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{36}{5} - 8$

$-\frac{4}{5}$

$2\cos 5x = 2\cos 4x\cdot\cos x - 2\sin 4x\cdot\sin x$

$x > y-8:\ 2x = 0 \Rightarrow y \in [0;8]$

$-y-8 < x < y-8:\ 2y = 16 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x \in [-16;0]$

$x < -y-8:\ -2x-16 = 16 \Rightarrow x = -16 \Rightarrow y \in [0;8]$

$64 + y^2 - 30y + 225 = a$

$8^2 + [-15;-7]^2 = 64 + [49;225] = a \Rightarrow 113 \le a \le 289$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

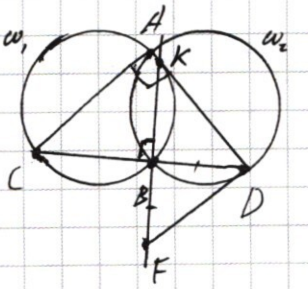
№1.

Заметим, что число $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Т.к. единственная цифра кратная 7 это 7, то среди цифр числа точно есть четыре цифры 7. ~~[illegible]~~ Тогда произведение оставшихся цифр равно $\frac{64827}{7^4} = 3^3$. Т.к. цифры кратные 3 это только 3 и 9, то оставшиеся ~~[illegible]~~ цифры либо 3, 3, 3, 1 либо 9, 3, 1, 1. Т.е. для каждого такого числа сначала выбираются четыре позиции для цифр 7, а потом либо три позиции для циф 3, либо ~~[illegible]~~ одну позицию для цифры 9 и одну — для цифры 3. Т.е. всего ~~[illegible]~~ таких чисел $C_8^4 \cdot C_4^3 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = 70 \cdot 4 + 70 \cdot 4 \cdot 3 =$

$= 70 \cdot 16 = 1120$

Ответ: всего таких чисел 1120.

№6.



а) Пусть $AD \cap BF = K$. Тогда в $AKBC$ $\angle CAK = \angle CBK = 90°$.

Т.е. $\angle CAK + \angle CBK = 180° \Rightarrow$ $AKBC$ — вписанный четырёхугольник. (Пусть ω_1 — та окружность которой принадлежат A, B, C, а ω_2 — ABD). Т.к. $A, B, C \in \omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow K \in \omega_1$. Тогда т.к. $\angle CAK = 90° \Rightarrow CK$ — диаметр.

Т.е. $CK = 17 \cdot 2 = 34$.

Т.к. $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одинаковую хорду в равных окружностях $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \frac{180° - \angle CAD}{2} = 45°$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда $\angle BKD = 180° - \angle KBD - \angle KDB = 180° - 90° - 45° = 45° = \angle KDB \Rightarrow$ т.е. $\triangle BKD$ р/б с основанием $KD \Rightarrow BK = BD \Rightarrow BK = BD = BF \Rightarrow$ Тогда CB — высота и медиана в $\triangle CKF \Rightarrow \triangle CKF$ — р/б и $CK = CF$. Т.е. $CF = CK = 34$.

б) Т.к. $BK = BD = BF$, то $\angle KDF = 90°$.

По теореме Пифагора $BK = \sqrt{CK^2 - BC^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$. ($BC = 16$ по усл.)

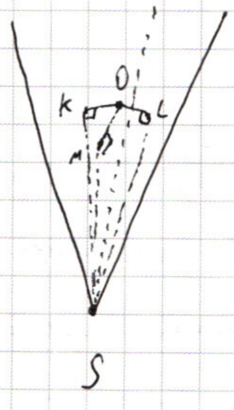
Тогда $CD = CB + BD = CB + BK = 46 \Rightarrow CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2AD^2 \Rightarrow AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} = 23\sqrt{2}$. При этом $FD^2 = BF^2 + BD^2 = 2BK^2 \Rightarrow FD = \sqrt{2}BK = 30\sqrt{2}$.

Т.к. $\angle CAD = \angle ADF = 90°$, т.е. $\angle CAD + \angle ADF = 180°$, $CA \parallel DF$, т.е. $CADF$ — трапеция $\Rightarrow S_{CADF} = \frac{CA + DF}{2} \cdot AD = \frac{23\sqrt{2} + 30\sqrt{2}}{2} \cdot 23\sqrt{2} = 53 \cdot 23 = 1219$.

$S_{ADF} = \frac{AD \cdot DF}{2} = \frac{23\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{2}}{2} = 23 \cdot 30 = 690$ (т.к. S прямоугольного тр-ника равна половине произведения катетов). Тогда $S_{ACF} = S_{CADF} - S_{ADF} = 1219 - 690 = 529$. (т.к. $S_{ACF} + S_{ADF} = S_{CADF}$)

Ответ: Площадь $\triangle ACF = 529$.

№4.



Пусть SO пересекает сферу в точках A и B. ($A \in SB$). Т.к. Заметим, что радиус опущенный к касательной плоскости перпендикулярен ей. Тогда если эта плоскость $\perp SO$, т.к. SO проходит через O, то радиус опущенный на плоскость $\parallel SO \Rightarrow$ он принадлежит $SO \Rightarrow$ Тогда основание радиуса — либо A, либо B. Т.е. сечения касающиеся сферы и $\perp SO$ проходит через A или B. Пусть α — сечение, которому принадлежит A, β — B. Т.к. α и $\beta \perp SO \Rightarrow \alpha \parallel \beta$. Пусть также t_α и t_β — отрезки, которые высекли на одном

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

из ~~двух~~ плоских углов α и β соответственно. Т.к. $\alpha \parallel \beta \Rightarrow t_\alpha \parallel t_\beta$, при этом $\frac{t_\alpha}{t_\beta} = \frac{SA}{SB}$. Т.е. α подобно β с коэфициентом подобия $\frac{SA}{SB}$. $\Rightarrow \frac{S_\alpha}{S_\beta} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{3}{4}$.

Пусть r – радиус сферы $\Rightarrow \frac{(SO-r)}{(SO+r)} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{SO}{7}$.

Тогда $tg\angle KSO = \frac{r}{SK} = \frac{r}{\sqrt{49r^2 - r^2}} = \frac{1}{\sqrt{48}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \angle KSO = arctg\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$.

~~Заметим, что, т.к. $SK = SL = SL = \sqrt{SO^2 - r^2}$, что высота~~

Пусть SH – высота из S в $SKLM$, т.к. $SK = SL = SM \Rightarrow$
$\Rightarrow HK = HL = HM = \sqrt{SH^2 - SK^2} \Rightarrow$ т.е. H – центр описанной окр. $\triangle KLM$. Пусть OT – высота из O в $OKLM$. Т.к. $OK = OL = OM = r \Rightarrow$
$\Rightarrow TK = TL = TM = \sqrt{OH^2 - r^2} \Rightarrow T$ – центр опис. окр. $\triangle KLM \Rightarrow$
т.е. $T = H$, и $OT \parallel SH$ (т.к. $OT \perp KLM$ и $SH \perp KLM$) $\Rightarrow OT$ и $SH \in SO$.

Тогда $SO \perp KLM \Rightarrow$ ~~$\angle SKH = SKO$~~ $\angle SHK = \angle SKO = 90°$, $\angle KSO$ – общий $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle SKO \sim \triangle SHK \Rightarrow \frac{SO}{SK} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SH = \frac{SK^2}{SO} = \frac{SO^2 - r^2}{SO} = \frac{48r^2}{7r} =$
$= \frac{48}{7}r$. Т.к. $KLM \parallel \alpha$, то сечение $KLM \sim \alpha$ с коэф. подобия $\frac{SH}{SA} \Rightarrow \frac{S_{KLM}}{S_\alpha} = \frac{SH^2}{SA^2} \Rightarrow S_{KLM} = S_\alpha \cdot \frac{SH^2}{SA^2} = 9 \cdot \frac{\frac{48^2}{7^2}r^2}{(SO-r)^2} = 9\frac{\frac{48^2}{7^2} \cdot r^2}{(6r)^2} = \frac{9 \cdot 8^2}{7^2} =$
$= \frac{576}{49} = 11\frac{37}{49}$.

Ответ: $\angle KSO = arctg\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$, площадь сечения KLM равна $11\frac{37}{49}$.

~~нов~~ №7.

Т.к. $\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1) \cdot x \end{cases} \Rightarrow 3(31 - x) + x \cdot 3^{28} > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 \cdot (31 - x) - 3^x + (x - 4) \cdot 3^{28} > 0$

Т.к. $3^{28} \gg 93 \Rightarrow$ при $x<4$ $93+(x-4)\cdot 3^{28}<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 93-3x-3^x+(x-4)\cdot 3^{28}<0 \Rightarrow x \geq 4$, а т.к. при $x=4$

$93-3x-3^x+(x-4)\cdot 3^{28} = 93-12-81 \not> 0$, то $x>4$.

Заметим, что при $x = 31$:

$93-3x-3^x+(x-4)\cdot 3^{28} = 93-93-3^{31}+3^3\cdot 3^{28} = 0 \not> 0$.

А при $x>31$: $3x>93 \Rightarrow 93-3x<0$, $3^{x-28}>x-4$ $\Rightarrow (93-3x)-\left(3^{x-28}-(x-4)\right)3^{28} < 0$.

Тогда $x<31$.

Итого $5 \le x \le 30$ и для каждого x a_x (кол-во подходящих y-ков) $= 93-3x-3^x+(x-4)\cdot 3^{28}$.

Тогда $\sum_{x=5}^{30} a_x = 26\cdot 93-15-\ldots-90-3^5-\ldots-3^{30}+3^{28}(1+\ldots+26) =$

$= 26\cdot 93+\frac{26\cdot(-105)}{2}-\frac{3^{31}-3^5}{3-1}+3^{28}\cdot\frac{26\cdot 27}{2} = 1053+3^{28}\cdot 351-\frac{3^{31}-3^5}{2} =$

$= 1053-\frac{243}{2}+3^{28}\cdot\left(351-\frac{3^3}{2}\right) = \frac{833+3^{28}\cdot 693}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА