

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{4}{x^2})} \\ x^2 - xy - 2x^2 + 8x - y \cdot 4 = 0 \\ x^2 \cdot y^4 - \text{всегда} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{п.к. } \ln x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \\ & \text{п.к. } \ln(\frac{4}{x^2}), x^2 > 0 \Rightarrow y > 0 \end{aligned}$$

п.к. обе части первого ур-ния > 0 , то про-
логорифмируем по основанию e , получим:

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = \ln(\frac{4}{x^2}) \cdot \ln y \Rightarrow -\ln x \cdot (2\ln x + 4\ln y) = \ln y (2\ln y - 7\ln x)$$

$$\text{Пусть } \ln x = a, \ln y = b \Rightarrow -2a^2 - 4ab = b^2 - 7ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \Rightarrow (b^2 - ab) + (2a^2 - 2ab) = 0 \Rightarrow b(b-a) + 2a(a-b) = 0 \Rightarrow$$

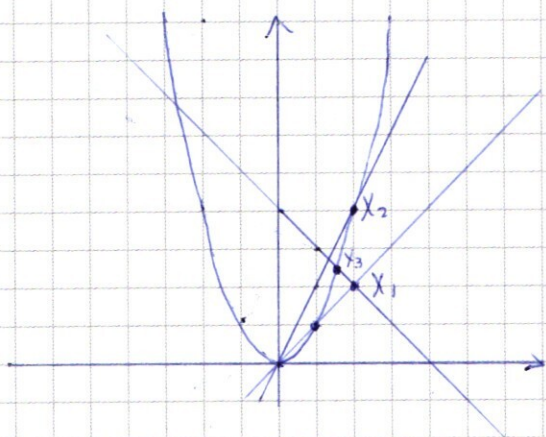
$$\Rightarrow (a-b)/(2a-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ 2a=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y \\ 2\ln x = \ln y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$2) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Rightarrow y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(y-2x) + x(y-2x) - 4(y-2x) = 0 \Rightarrow (y-2x)(y+x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ y=4-x \end{cases}$$

Отметим полученные прямые на рис-
ке:



Учитывая, что $x > 0, y > 0$, полу-
чим ~~два~~ три решения x_1 и x_2, x_3 .
Найдем каждое из них:

$$4 - x_1 = x_1 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2' = 2, x_2'' = 0 - \text{не ст} \Rightarrow y_2 = 4$$

$$4 - x_3 = x_3^2 \Rightarrow x_3^2 + x_3 - 4 = 0 \Rightarrow x_3' = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x_3'' = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{не ст}$$

$$\Rightarrow y_3 = 4 - x_3 = 4 - \frac{-1+\sqrt{17}}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (2; 4), \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$$

✓2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) + \sqrt{2} (\cos 3x - \sin^2 2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x) \cdot \left(\sin 7x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x) \left(\sin 7x - \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x) (\sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 2x - \cos 2x) 2 \sin\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 2x}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \\ \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{П.р. } \sin x \text{ и } \cos x \text{ не могут быть} \\ \text{равны 0, то } \text{не получили } \text{из} \\ \text{у/з-ние } \sin 2x = \cos 2x \text{ получили} \\ \text{tg } 2x = 1 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg } 2x = 1 \\ \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, m, k, n \in \mathbb{Z}.$$

✓1.

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

П.р. числа возвышеннзначные, то они могут содержать либо набор 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, либо

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

набор 1, 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7,

Три цифры 7 в на восьми позициях можно разместить 56 различными способами. В первом наборе три 3 на пяти позициях (три уже занято 7) можно разместить 10 различными способами, в оставшиеся две единицы ~~то~~ в две на двух позициях можно разместить одним способом. Таким образом, из первого набора можно составить $10 \cdot 56 = 560$ различных восьмизначных чисел. Рассмотрим второй набор.

Три единицы на 5 позициях можно разместить 10 различными способами (аналогично трём 3 в из первого набора). Оставшиеся 3 и 9 на двух позициях можно разместить двумя способами. Итого, из второго набора можно составить $56 \cdot 10 \cdot 2 = 1120$ восьмизначных чисел. ~~На~~ Вместе из двух наборов можно составить $1120 + 560 = 1680$ различных восьмизначных чисел.

Ответ: 1680

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение. Оно представляет собой сис.-цу из 4-х окружностей, в которой:

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow (x+12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$x > 0, y < 0 \Rightarrow (x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$x < 0, y > 0 \Rightarrow (x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow (x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Рассмотрим первое уравнение. Пусть $y+5=t$, тогда ур-ние примет вид: $|x+t| + |t-x| = 10$

$$x < -t \Rightarrow -(x+t) + (t-x) = 10 \Rightarrow x = -5$$

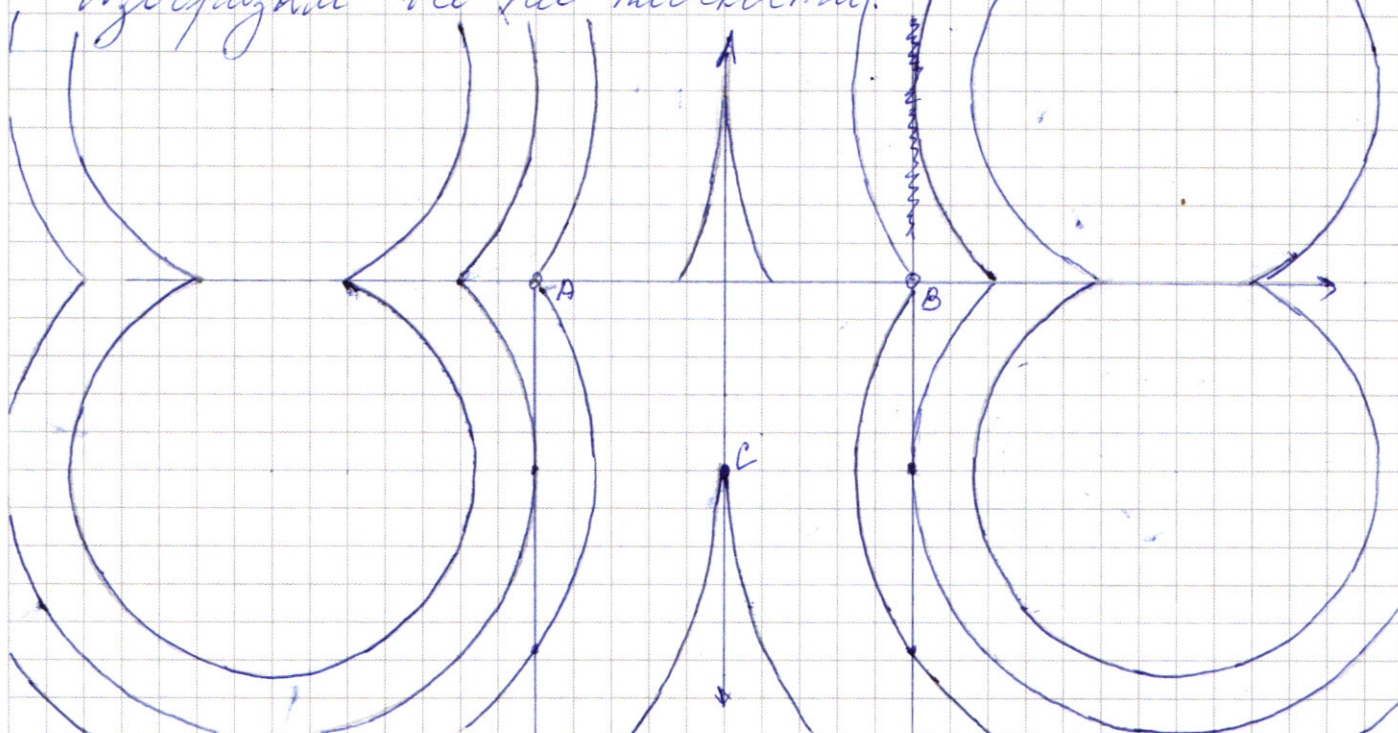
$$x = -t \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

$$-t < x < t \Rightarrow (x+t) + (t-x) = 10 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

$$x = t \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

$$x > t \Rightarrow (x+t) - (t-x) = 10 \Rightarrow x = 5.$$

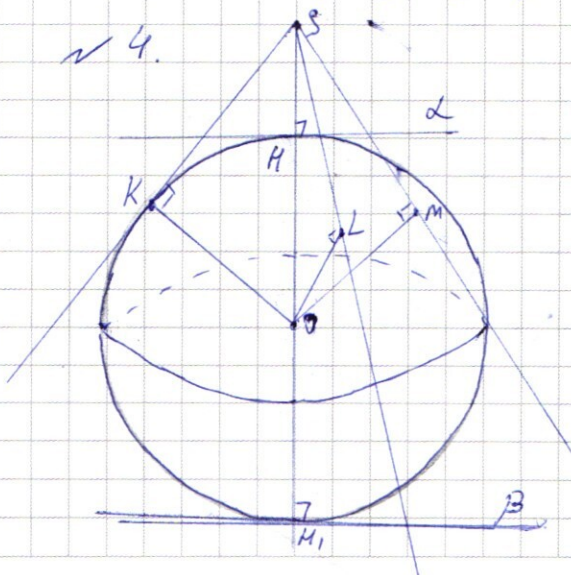
Изобразим всё на плоскости:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пока нижние окружности не коснутся
прямых $x = 5$ и $x = -5$ система не будет иметь
решений. Когда они коснутся, сис-ма бу-
дет иметь два решения. Это произойдет при
 $a = 72$ ~~73~~ ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~ ~~78~~ ~~79~~ ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ ~~83~~ ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ ~~89~~ ~~90~~ ~~91~~ ~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ ~~97~~ ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~ ~~101~~ ~~102~~ ~~103~~ ~~104~~ ~~105~~ ~~106~~ ~~107~~ ~~108~~ ~~109~~ ~~110~~ ~~111~~ ~~112~~ ~~113~~ ~~114~~ ~~115~~ ~~116~~ ~~117~~ ~~118~~ ~~119~~ ~~120~~ ~~121~~ ~~122~~ ~~123~~ ~~124~~ ~~125~~ ~~126~~ ~~127~~ ~~128~~ ~~129~~ ~~130~~ ~~131~~ ~~132~~ ~~133~~ ~~134~~ ~~135~~ ~~136~~ ~~137~~ ~~138~~ ~~139~~ ~~140~~ ~~141~~ ~~142~~ ~~143~~ ~~144~~ ~~145~~ ~~146~~ ~~147~~ ~~148~~ ~~149~~ ~~150~~ ~~151~~ ~~152~~ ~~153~~ ~~154~~ ~~155~~ ~~156~~ ~~157~~ ~~158~~ ~~159~~ ~~160~~ ~~161~~ ~~162~~ ~~163~~ ~~164~~ ~~165~~ ~~166~~ ~~167~~ ~~168~~ ~~169~~ ~~170~~ ~~171~~ ~~172~~ ~~173~~ ~~174~~ ~~175~~ ~~176~~ ~~177~~ ~~178~~ ~~179~~ ~~180~~ ~~181~~ ~~182~~ ~~183~~ ~~184~~ ~~185~~ ~~186~~ ~~187~~ ~~188~~ ~~189~~ ~~190~~ ~~191~~ ~~192~~ ~~193~~ ~~194~~ ~~195~~ ~~196~~ ~~197~~ ~~198~~ ~~199~~ ~~200~~ ~~201~~ ~~202~~ ~~203~~ ~~204~~ ~~205~~ ~~206~~ ~~207~~ ~~208~~ ~~209~~ ~~210~~ ~~211~~ ~~212~~ ~~213~~ ~~214~~ ~~215~~ ~~216~~ ~~217~~ ~~218~~ ~~219~~ ~~220~~ ~~221~~ ~~222~~ ~~223~~ ~~224~~ ~~225~~ ~~226~~ ~~227~~ ~~228~~ ~~229~~ ~~230~~ ~~231~~ ~~232~~ ~~233~~ ~~234~~ ~~235~~ ~~236~~ ~~237~~ ~~238~~ ~~239~~ ~~240~~ ~~241~~ ~~242~~ ~~243~~ ~~244~~ ~~245~~ ~~246~~ ~~247~~ ~~248~~ ~~249~~ ~~250~~ ~~251~~ ~~252~~ ~~253~~ ~~254~~ ~~255~~ ~~256~~ ~~257~~ ~~258~~ ~~259~~ ~~260~~ ~~261~~ ~~262~~ ~~263~~ ~~264~~ ~~265~~ ~~266~~ ~~267~~ ~~268~~ ~~269~~ ~~270~~ ~~271~~ ~~272~~ ~~273~~ ~~274~~ ~~275~~ ~~276~~ ~~277~~ ~~278~~ ~~279~~ ~~280~~ ~~281~~ ~~282~~ ~~283~~ ~~284~~ ~~285~~ ~~286~~ ~~287~~ ~~288~~ ~~289~~ ~~290~~ ~~291~~ ~~292~~ ~~293~~ ~~294~~ ~~295~~ ~~296~~ ~~297~~ ~~298~~ ~~299~~ ~~300~~ ~~301~~ ~~302~~ ~~303~~ ~~304~~ ~~305~~ ~~306~~ ~~307~~ ~~308~~ ~~309~~ ~~310~~ ~~311~~ ~~312~~ ~~313~~ ~~314~~ ~~315~~ ~~316~~ ~~317~~ ~~318~~ ~~319~~ ~~320~~ ~~321~~ ~~322~~ ~~323~~ ~~324~~ ~~325~~ ~~326~~ ~~327~~ ~~328~~ ~~329~~ ~~330~~ ~~331~~ ~~332~~ ~~333~~ ~~334~~ ~~335~~ ~~336~~ ~~337~~ ~~338~~ ~~339~~ ~~340~~ ~~341~~ ~~342~~ ~~343~~ ~~344~~ ~~345~~ ~~346~~ ~~347~~ ~~348~~ ~~349~~ ~~350~~ ~~351~~ ~~352~~ ~~353~~ ~~354~~ ~~355~~ ~~356~~ ~~357~~ ~~358~~ ~~359~~ ~~360~~ ~~361~~ ~~362~~ ~~363~~ ~~364~~ ~~365~~ ~~366~~ ~~367~~ ~~368~~ ~~369~~ ~~370~~ ~~371~~ ~~372~~ ~~373~~ ~~374~~ ~~375~~ ~~376~~ ~~377~~ ~~378~~ ~~379~~ ~~380~~ ~~381~~ ~~382~~ ~~383~~ ~~384~~ ~~385~~ ~~386~~ ~~387~~ ~~388~~ ~~389~~ ~~390~~ ~~391~~ ~~392~~ ~~393~~ ~~394~~ ~~395~~ ~~396~~ ~~397~~ ~~398~~ ~~399~~ ~~400~~ ~~401~~ ~~402~~ ~~403~~ ~~404~~ ~~405~~ ~~406~~ ~~407~~ ~~408~~ ~~409~~ ~~410~~ ~~411~~ ~~412~~ ~~413~~ ~~414~~ ~~415~~ ~~416~~ ~~417~~ ~~418~~ ~~419~~ ~~420~~ ~~421~~ ~~422~~ ~~423~~ ~~424~~ ~~425~~ ~~426~~ ~~427~~ ~~428~~ ~~429~~ ~~430~~ ~~431~~ ~~432~~ ~~433~~ ~~434~~ ~~435~~ ~~436~~ ~~437~~ ~~438~~ ~~439~~ ~~440~~ ~~441~~ ~~442~~ ~~443~~ ~~444~~ ~~445~~ ~~446~~ ~~447~~ ~~448~~ ~~449~~ ~~450~~ ~~451~~ ~~452~~ ~~453~~ ~~454~~ ~~455~~ ~~456~~ ~~457~~ ~~458~~ ~~459~~ ~~460~~ ~~461~~ ~~462~~ ~~463~~ ~~464~~ ~~465~~ ~~466~~ ~~467~~ ~~468~~ ~~469~~ ~~470~~ ~~471~~ ~~472~~ ~~473~~ ~~474~~ ~~475~~ ~~476~~ ~~477~~ ~~478~~ ~~479~~ ~~480~~ ~~481~~ ~~482~~ ~~483~~ ~~484~~ ~~485~~ ~~486~~ ~~487~~ ~~488~~ ~~489~~ ~~490~~ ~~491~~ ~~492~~ ~~493~~ ~~494~~ ~~495~~ ~~496~~ ~~497~~ ~~498~~ ~~499~~ ~~500~~ ~~501~~ ~~502~~ ~~503~~ ~~504~~ ~~505~~ ~~506~~ ~~507~~ ~~508~~ ~~509~~ ~~510~~ ~~511~~ ~~512~~ ~~513~~ ~~514~~ ~~515~~ ~~516~~ ~~517~~ ~~518~~ ~~519~~ ~~520~~ ~~521~~

Obtem: $a \in \{49\} \cup [74; 144) \cup (144; +\infty)$



Дано: $\frac{P_d}{S_B} = \frac{1}{16}$

Найти: $\angle KSD, \angle KLM = ?$

Решение

М. к. ^{сфера} окружность вписана
в трёхгранной угол, а
пл. α и пл. $\beta \perp SO$, то

пирамиды образованные этими плоскостями и вершиной S подобны, а значит $\frac{S_K}{S_B} =$

$= \left(\frac{SH}{SH_1}\right)^2$ Пусть $SH = x$, тогда $SH_1 = x + 2R \Rightarrow$

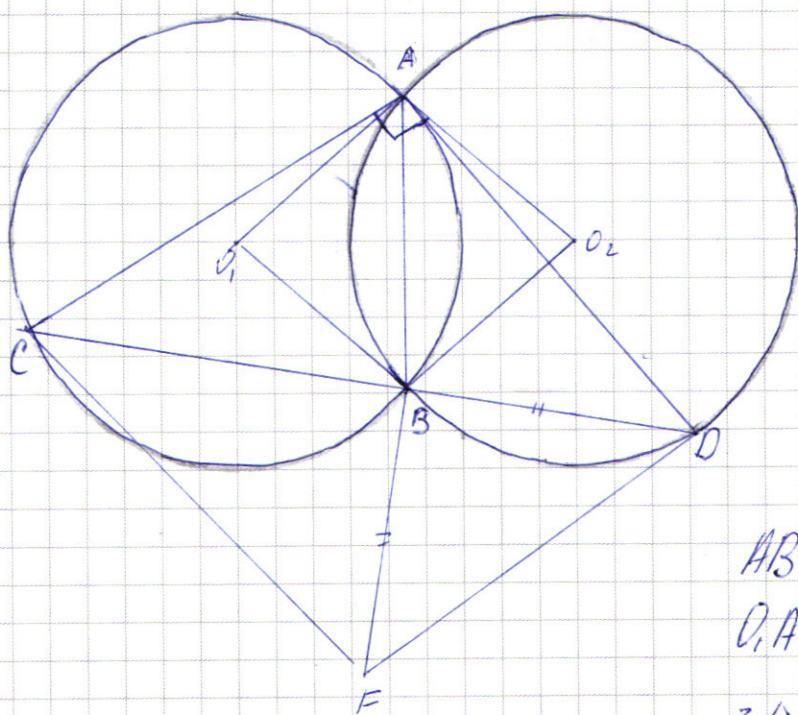
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x+2R}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{x}{x+2R} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3x = 2R \Rightarrow x = \frac{2}{3}R, \text{ где } R - \text{радиус сфер.}$$

П.р. сфера вписана в 3-х-гран. $\angle$, то SK - касательная $\Rightarrow SK \perp$ радиусу $\Rightarrow \angle OSK = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OSK$ - прямоугольный. В нем $SO = x + R = \frac{5}{3}R$, $KO = R \Rightarrow \sin(\angle KSO) = \frac{KO}{SO} = \frac{2}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$

26.



Дано: $R = 10$, $\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

Найти: CF

Решение.

Соединим O_1 и O_2 с

A и B . $\angle A O_1 B$ и

$\angle A O_2 B$ - центральные

AB - общая

$O_1 A = O_1 B = O_2 A = O_2 B = R \Rightarrow \triangle O_1 A B =$

$= \triangle O_2 A B = \angle A O_1 B = \angle A O_2 B \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle A B =$ - одинаковая в разных окружностях $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle A C D = \angle A D C = 45^\circ$ (как вписанные)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ -26 \\ \underline{-12} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ -12 \\ \underline{-12} \\ 9 \\ -9 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 348 \overline{) 7} \\ \underline{28} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 4y + 4) - 4$$

$$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 49 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\begin{array}{c} 333 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 11333777 \\ 11333777 \\ 77777777 \\ 77777777 \\ 77777777 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \\ 11193777 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3338 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \\ 333 \end{array}$$

$$5+4+3+2+1 = 15 \cdot 6 = 10$$

$$(10) (56) (560)$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 2 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$3+2+7 = 12$$

$$21+15+10+6+3+1 = 56$$

$$(5-12)^2 + (5)^2 = a$$

$$15+6=21$$

$$5+4 = 15$$

$$4+3+2+1 = 10$$

$$3+2+1=6$$

$$2+1=3$$

$$1=1$$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Ответ. 1680

$$5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\S \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = x \quad \alpha - \beta = y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$2\beta = x - y$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \sin \alpha (\cos \beta - \sin \beta) + \sin \beta (\cos \alpha - \cos \alpha) = \\ &= (\cos \beta - \sin \beta) (\sin \alpha - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\alpha + \beta = y$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$+ 2 \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) + (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\sin 2x - \cos 2x) (\sqrt{2} \sin 7x + \cos 2x + \sin 2x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2(\ln x)^2 - 4 \ln x \ln y - (\ln y)^2 - 2 \ln x \ln y$$

$$- \ln x \cdot (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \ln y$$

$$\ln x = a, \ln y = b$$

$$-2a^2 - 4ab + b^2 - 7ab$$

$$-a^2 - 4ab = b^2 + a^2 - 7ab$$

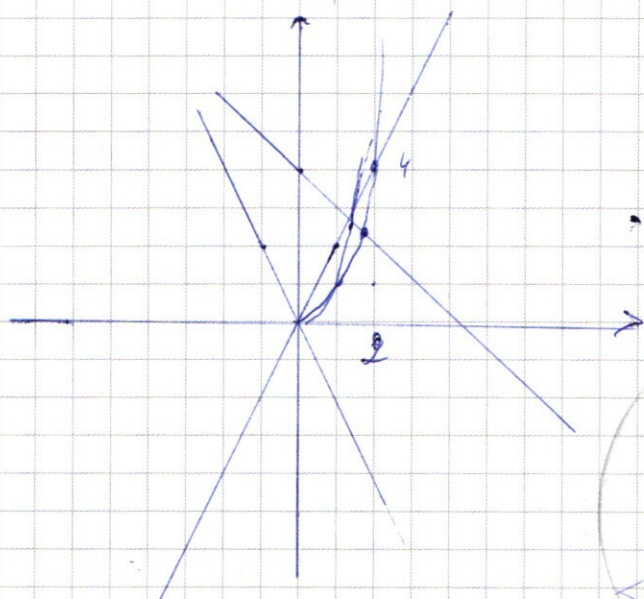
$$-a^2 = b^2 + a^2 - 3ab$$

$$b^2 + 3ab + 2a^2 = 0$$

$$(b^2 - ab) + (2a^2 - 2ab) = 0$$

$$b(b-a) + 2a(a-b) = 0$$

$$(a-b)(2a-b) = 2a^2 - 3ab + b^2$$



$$a = b \quad x = y$$

$$V = 2A$$

$$\ln y = 2 \ln x$$

$$y = x^2$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 2x - 4y = 0$$

~~$$y^2 - 2x^2 + 8x - 5xy = 0$$~~

$$(y^2 - 4y) - 2x^2 + 8x - xy$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 2x - 4yz = 0$$

$$y/(y-2x) + x/(y-2x) - 4/(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)/(y+x-4) = 0$$

$$p_y = 2x$$

$$y = 4 - x \quad 8$$

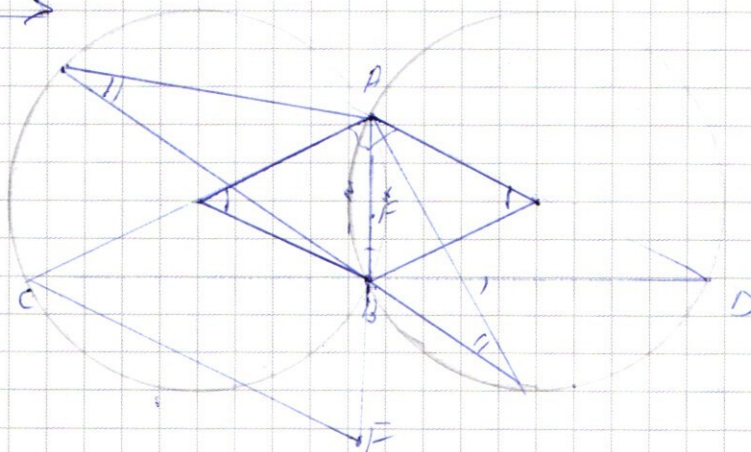
$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

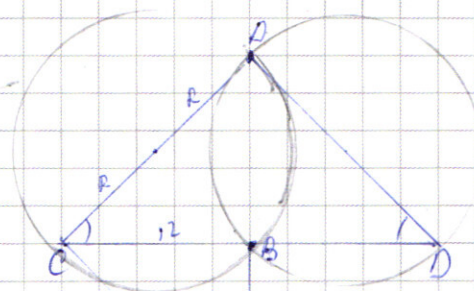
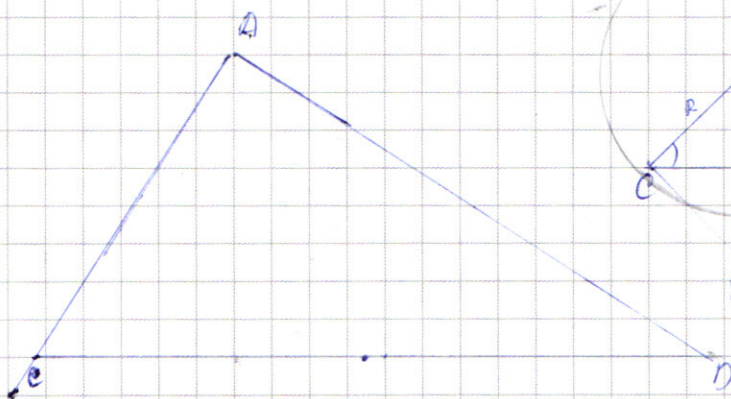
$$V^2 = 4 - X$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$\textcircled{4} z/1 + 16z/17$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$





20

$$R = \frac{R}{5}$$

$$\left(\frac{RT}{4}\right)^2 = y^2 + x^2 - 2xy \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{RT}{4}\right)^2 = x^2 + (x\sqrt{2} - y)^2 - 2x(x\sqrt{2} - y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} = 2x^2 - 2xy\sqrt{2} + y^2 + x^2 + \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2xy\sqrt{2}$$

$$-xy\sqrt{2} = 2x^2 - 2xy\sqrt{2} - 2x^2 - 2xy\sqrt{2}$$

$$-xy\sqrt{2} = 2x^2 - 2xy\sqrt{2} - 2x^2 + xy\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 49 \\ \hline 243 \\ + 10182 \\ \hline 1323 \\ \times 2 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\frac{R}{2} = x \cdot \frac{R}{2}$$

$$(2x \cdot 2R + x \cdot 2R = x \cdot 2R)$$

$$\left(\frac{x}{x}\right)^2 = \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \sin\alpha(\cos\beta - \sin\beta) + \cos\alpha(\cos\beta + \sin\beta)$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \sin x \cos x$$

$$= \cos x(\cos x + \sin x) - \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\sin 7x = \left(\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \right)$$

$$\sin(7x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha + \beta = \sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\sim 5 \quad (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a$$

$$x < 0, y < 0 \quad (x + 12)^2 + (y + 5)^2 = a$$

$$x > 0, y < 0 \quad (x - 12)^2 + (y + 5)^2 = a$$

$$x < 0, y > 0 \quad (x + 12)^2 - (y - 5)^2 = a$$

$$x > 0, y > 0 \quad (x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$$

$$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10$$

$$y + 5 = t \Rightarrow |x + t| + |t - x| = 10$$

$$t > 0, x > t \quad x + t - t + x = 10 \Rightarrow 2x = 10$$

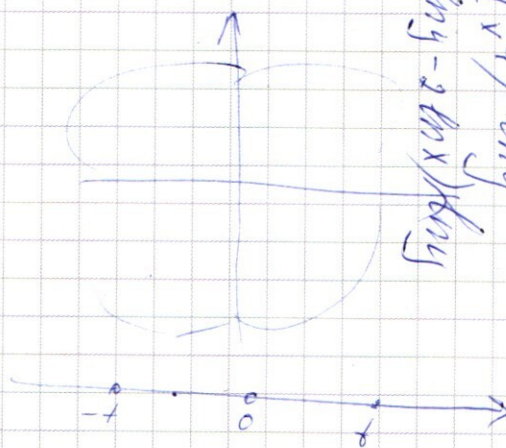
$$t > 0, x < t$$

$$\ln(x^2 y^2) = \ln\left(\frac{y}{x}\right) \ln y$$

$$= \ln y (\ln x + \ln y) = (\ln y - 2 \ln x) \ln y$$

$$\ln a = e$$

$$\ln a = a$$



$$\frac{\frac{1}{4}}{2} - \frac{\frac{1}{8}}{8} = \frac{35}{8}$$

$$\frac{35}{4 \cdot 8} =$$

$$|x+t| + |\overset{t-x}{x-t}| = 10 \quad y+5=t$$

$$|x+t| \quad x+t=0 \Rightarrow x=-t$$

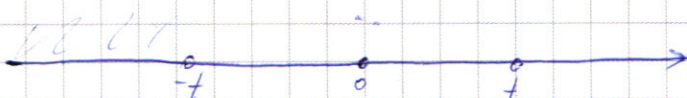
$$x > -t \Rightarrow x+t$$

$$x < -t \Rightarrow -(x+t)$$

$$|t-x| \quad x-t=0 \Rightarrow x=t$$

$$x > t \Rightarrow -(t-x)$$

$$x < t \Rightarrow t-x$$



$$x < -t \Rightarrow -(x+t) + t - x = 10 \Rightarrow -x - t + t - x = 10 \Rightarrow -2x \Rightarrow x = -5$$

$$x = -t \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

$$-t < x < t \Rightarrow x+t+t-x=10 \Rightarrow t=5$$

$$x = t \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5$$

$$x > t \Rightarrow x+t-t+x=10 \Rightarrow x=5$$

$$x \leq -y-5 \Rightarrow x > y+5 \Rightarrow y < x-5$$

$$y = x - 5 \Rightarrow x + y = 5$$

$$y+5=5 \Rightarrow y=0$$

$$x < -y-5 \Rightarrow -x > y+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y < -5-x$$

$$x > y+5$$

$$y < x-5$$

$$x < y+5 \Rightarrow y > x-5$$

$$y+5 < x$$

$$x > y+5$$

$$y < x-5$$

