

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

1) Разложим 64824 на простые множители

$$64824 = 3^3 \cdot 4^4$$

2) Нам нам единственная цифра, которая делится на 4 это 4, то в восьмизначном числе должно быть 4 единицы

3) Из 12 и 11 вычитаем, что произведений оставшихся четырех цифр = 24 ($64824 : 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 24$)

4) Есть 2 варианта представления 24 в виде 4 цифр

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9$$

~~1111~~

Рассчитаем количество получаемых чисел для каждого варианта, пользуясь правилами комбинаторики

числа 1, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

числа 1, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 9

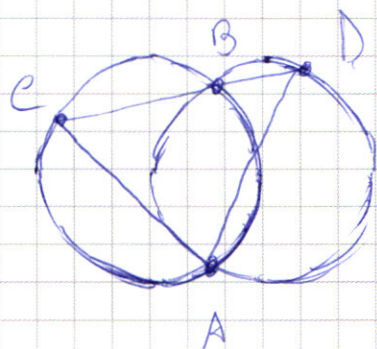
$$X_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}{6} = 280$$

$$X_2 = \frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}{2} = 280$$

$$\text{Всего чисел} = X_1 + X_2 = 1160$$

Ответ: 1160 восьмизначных чисел произведение цифр которого 64824

#4 Задача №6



- 1) Так как окружности одинаковые, то они обе симметричны относительно точки A и B
- 2) из симметрии поймем, что $\angle ACB$ на одной окружности равен дуге $\angle ADB$ на другой окружности.

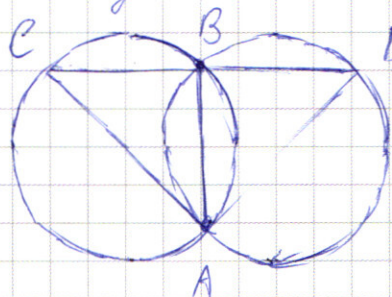
$$3) \angle ACB = \frac{1}{2} \text{ дуги } AB$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \text{ дуги } AB$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

$$4) \angle ACB + \angle ADB = 90^\circ, \text{ т.к. } \triangle CAD - \text{прямоугольный}$$

5) из п.3 поймем, что C и D тоже симметрично расположены,



т.е. то есть весь рисунок симметричен
 6) из п.5 $BC = BD \Rightarrow AB$ - высота
 7) из п.3 $\triangle ACD$ - равнобедренный

8) т.к. AB - высота $\angle CBA = 90^\circ$, $\angle ABD = 90^\circ$, тогда ABC и ADB - прямоугольные, так как эти углы на них опираются $CA = AD = R \cdot 2 = 34$
~~9) $CA =$~~

9) т.к. AB - высота то F в прямой AB

10) AB - медиана в $\triangle ABC \Rightarrow AB = BC = BD$

по двум катетам

11) из п.3 и п.10 следует что $\triangle CFB = \triangle CAB$ - прямоугольный
 $CB = BA = CA = BF$ т.к. $BF = BD$ по условию

12) из равенства $CF = AC = 34$

$$S(ACF) = \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} BC \cdot (AB + BF) = \frac{1}{2} 16 \cdot 32 = 256$$

BC - высота т.к. $\angle ABC = 90^\circ$ $AB = BF = BC = 16$ из п.10 и условия

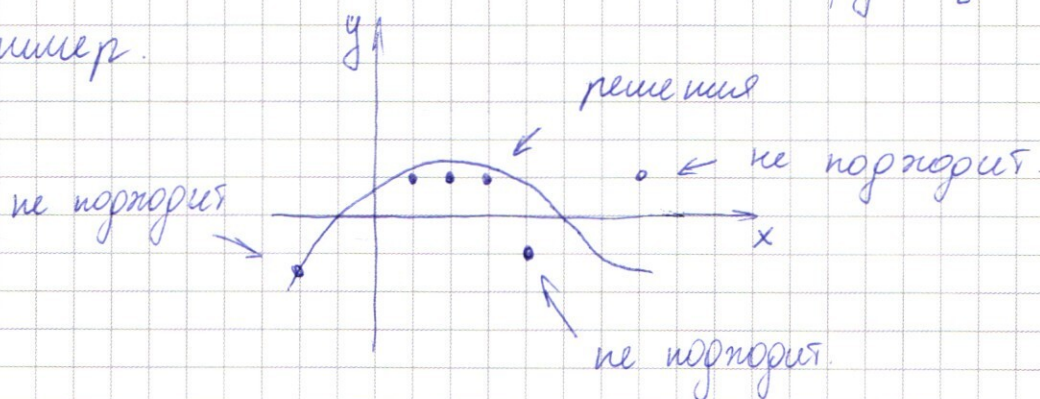
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1)x \end{cases}$$

1) Рассмотрим функцию $f(x) = 93 + 3(3^{2x} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$

2) Заметим, что решения нашей системы уравнений есть множество точек с целыми координатами лежащих выше оси x и ниже нашей функции
пример.



3) ~~В~~ ~~найдя~~ производную нашли что функция имеет одну точку экстремума, то есть имеет функцию максимум

4) Заметим, что $f(4) = 0$
 $f(31) = 0$ — границы нули функции

5) Из п4 и п3 имеем точки ~~на~~ имеют координату $x \in [5, 30]$ ~~Найдя~~ ~~все~~ ~~возмож~~

6) Найдём количество точек для каждого $x \in [5, 30]$
~~сделано~~

Количество упорядоченных точек равно (для координаты x ,
 $93 + 3(3^{28} - 1)x_1 - (3^{28} - 4 \cdot 3^{28})$)

разобьем ее на несколько слагаемых
 $(93) + ((3^{28} - 3)x_1) - (3^{28}) - (4 \cdot 3^{28})$

Теперь получаем формулы арифметической и геометрической прогрессий найдем сумму ~~для x_1~~ для каждого члена сделаем для $x \in [5; 30]$

$$1) \underbrace{93 + 93 + \dots + 93}_{(30 - 5 + 1) \text{ раз}} = 93 \cdot 26 = S_1$$

$$2) (3^{28} - 3)5 + (3^{28} - 3)6 + \dots + (3^{28} - 3)30 = (3^{28} - 3) \cdot \frac{5 + 30}{2} \cdot 26 = \\ = (3^{28} - 3) \cdot 35 \cdot 13 = S_2$$

$$3) \cancel{3^5} + 3^6 + \dots + 3^{30} = \frac{3^{31} - 3^5}{3 - 1} = \frac{3^{31} - 3^5}{2} = S_3$$

$$4) (-4 \cdot 3^{28}) \cdot 5 + \dots + (-4 \cdot 3^{28}) \cdot 30 = -4 \cdot 3^{28} \cdot \frac{5 + 30}{2} \cdot 26 = \cancel{-4 \cdot 3^{28} \cdot 139} \\ = -4 \cdot 3^{28} \cdot 139 \cdot 35 \cdot 13 = S_4$$

Количество пар решений $= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$

$$= 93 \cdot 26 + 3^{28} \cdot 35 \cdot 13 - 3 \cdot 35 \cdot 13 + \frac{3^{31} - 3^5}{2} - 4 \cdot 3^{28} \cdot 35 \cdot 13 = \\ = 1053 - 3^{28} \cdot 455 + \frac{3^{31} - 3^5}{2} = \frac{2106 + 3^{31} - 3^5}{2} - 3^{28} \cdot 455$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$\left(-\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$1) y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(y+3x)(y-x+4) = 0$$

$$y+3x=0$$

$$y-x+4=0$$

$$y=-3x$$

$$y=x-4$$

пересаживаем во второе
первое

$$3) y = x-4$$

$$\left(-\frac{x^2}{x-4}\right)^{\ln 4-x} = x^{2\ln(x-4)^2 x}$$

$$\frac{-x^{2\ln 4-x}}{x^{2\ln(x-4)^2 x}} = x-4$$

$$\frac{x^{\ln(4-x)^2}}{x^{\ln(4-x)^2 x^2}} = 4-x$$

$$4-x = x^{\ln(4-x)^3 x^2}$$

$$4-x = x$$

$$4-x = x \Rightarrow x=2$$

$$(4-x)^3 = 0$$

$$4-x = 0$$

$$x=4$$

я не знаю, как это решать

$$2) \left(-\frac{x^2}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^{2\ln(3x^3)}$$

$$\left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = x^{2\ln(3x^3)}$$

$$\frac{x^{6\ln 3x}}{x^{2\ln(3x^3)}} = 3^{\ln 3x}$$

$$\frac{x^{\ln 3^6 x^6}}{x^{\ln 3^4 x^6}} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 3^6 x^6 / \ln 3^4 x^6} = 3^{\ln 3x}$$

$$x^{\ln 9} = 3^{\ln 3x}$$

$$x=3 \Rightarrow y=-9$$

корней больше нет, так как
обе функции возрастающие
правая растет быстрее левой
и корень

Проверка

$$-\frac{3^{4\ln 3}}{-9} = 3^{2\ln(3(-9)^2)}$$

$$3^{5\ln 9} = 3^{2\ln 3^5}$$

$$3^{10\ln 3} = 3^{10\ln 3}$$

все нормально.

Ответ: $x=3; y=-9$

Задача №2

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 4x + \cos 3x) + (\sin 4x - \sin 3x) + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos \frac{4x+3x}{2} \cos \frac{4x-3x}{2} + 2 \sin \frac{4x-3x}{2} \cos \frac{4x+3x}{2} + \sqrt{2}$$

$$+ \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\sin 2x$$

и не знаю как это решить

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{N}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{N}$$

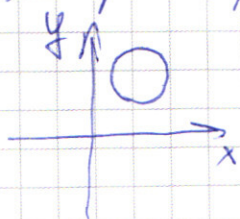
Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{N}$

Задача №5.

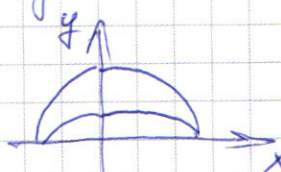
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

1) график первого уравнения

2) график второго в зависимости от a



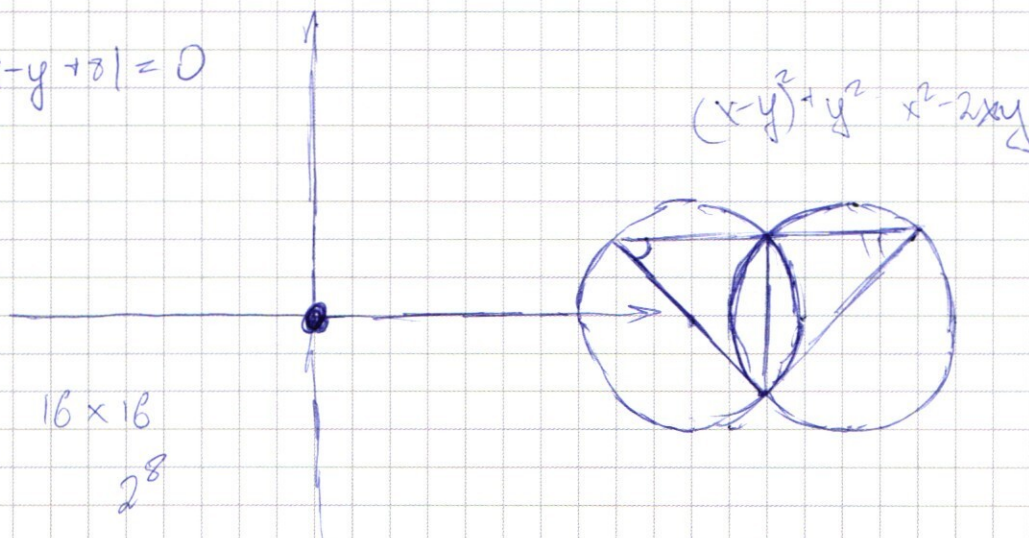
т.н. $|y|$ отражение



т.н. $|x|$ симметричен относительно осей Y

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 0$$



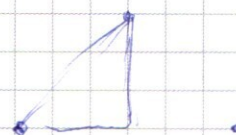
~~2x+16~~

$$|8-y| + |8+y| = 16$$

~~16 x 16~~

$$8 - \cancel{10}$$

$$8 - y$$



$$18 - 2y = 16$$

$$\cancel{8-1} + \cancel{8+1}$$

$$8-2 + 8+2$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$$x + y + 8 > 0$$

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$2x + 16 = 16$$

$$x = 0$$

$$\cancel{2y+16=0}$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{24} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^x + (4-x)3^{28} < 93 - 3x$$

$$3^{x-1} + (4-x)3^{27} < 31 - x$$

$$x < 0$$

решений нет.

$$3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{27} \leq 31 + x < 0$$

$$y = 3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{27} - 31 + x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{27} - 3^{27}x + x - 31$$

$$3^{x-1} - 3^{27}x + x$$

$$1 - 3^{27}$$

$$3^{31} + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3(3^{24} - 1)$$

$$93 + 3^{24}$$

$$93 \cdot 3^{24}$$

$$1 \ 3 \ 3 \ 3$$

$$1 \ 1 \ 3 \ 9$$

$$3$$

$$93 + 3^{28}$$

$$1 < 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5$$

$$\leq$$

$$93 + 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}x - 3x - 3^x - 4 \cdot 3^{28}$$

$$3(31 + 3^{24}(x-4) - 1 - 3^{x-1})$$

$$x=1$$

$$3^0 + 3^{28} < 30 \text{ не}$$

$$x=2 \quad 8$$

$$3 + 2 \cdot 3^{24} < 28 \text{ не}$$

$$x=3$$

$$8 + 3^{24} < 24 \text{ не}$$

$$x=4$$

$$24 + 0 < 24 \text{ не}$$

$$x=5$$

$$3^4 + 3^{24} < 26 \text{ да}$$

$$x=6$$

$$3^5$$

4

$$3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{27} = 31 - x$$

$$3^5 -$$

$$3^{x-1} + (4-x)3^{27} = 31 - x$$

$$3^5 - 3$$

$$31 - 4$$

$$4 - 31$$

$$31$$

$$x^{31} - 3$$

$$-3$$

$$3^{32} + 3^{20} - 3 \cdot 3^{24} = 0$$

$$3^{32}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \frac{\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{2}$$

$$2 \cos \alpha \cos \alpha$$

$$2 \cos 5x \cos 2x \neq 2 \sin 2x \cos 5x \cos 0 = 1$$

$$\sin 4x - \sin 3x =$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\sin 30 - \sin 60 =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$2 \sin 30 \cos 60$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin 15$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x.$$

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3^{28} - 3x$$

39

$$\begin{array}{r} 1 \\ 93 \\ \times 26 \\ \hline 558 \\ 186 \\ \hline 2418 \\ - 1365 \\ \hline 1053 \\ 35 \\ \times 13 \\ \hline 105 \\ 35 \\ \hline 455 \\ \times 3 \\ \hline 1365 \end{array}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3x$$

31

$$3^x + 3^{28} < 93 - 3x$$

$$3^x + 3^{28} < 3(31 - x)$$

$$3^{x-1} + 3^{28} < 31 - x$$

24

$$81 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} \cdot 4 - 12$$

$$81 + 3^{28} \cdot 4$$

$$81$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3(31 - x)$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{28} \leq 31 + 3^{28} - x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} \leq 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{x-1} + 4 \cdot 3^{28} \leq 31 + 3^{28}x - x$$

$$3^{x-1} + (4-x) \cdot 3^{28} \leq 31 - x$$

$$3^{x-1} + 3^{28} \leq 31$$

$$35 - 9 = 3^{26} - 1$$

$$x=2$$

$$2 + 3 \leq 31 - 4$$

24

$$x=4$$

$$81 \leq$$

$$3 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} \cdot 3 - 9$$

$$-3^4 \cdot \frac{3^{26} - 1}{2}$$

$$-3^{30} + 3^4$$

$$\frac{3^4 - 3^{30}}{2}$$

$$x \in [5; 30]$$

$$31 + 3^{28}(x-4) - 1 - 3^{x-1}$$

$$-3^4 - 3^5 \dots - 3^{28}$$

$$-3^4(1 + 3 + 3^2 \dots + 3^{25})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 64824 & 4 \\ 9261 & 4 \\ 1323 & 3 \\ 189 & 3 \\ 27 & 3 \\ & 3 \\ & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4722 \\ 1333 \\ 1136 \\ 1119 \end{array}$$

$$y = -\cancel{3x} 3x$$

$$(y+3x)(y-x+4)=0$$

$$\cancel{y^2} + 3xy - xy - \cancel{3x^2} + 4y + 12x$$

$$\left(-\frac{x^3}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^2 \ln(xy^2)$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$\cancel{(y+x)^2} - \cancel{4x^2} + 12x + 4y = 0$$

$$y^2 + (2x+4)y - 3x^2 + 12x = 0$$

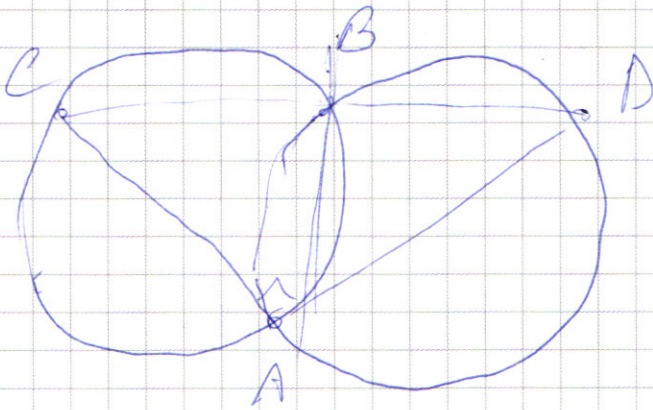
$$\begin{aligned} D &= 4x^2 + 16x + 16 + 12x^2 - 48x = 16x^2 - 32x + 16 \\ &= 4^2(x^2 - 2x + 1) = (4x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-2x - 4 \pm (4x - 4)}{2}$$

$$y_1 = \cancel{x} - 4$$

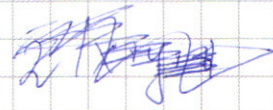
$$y_2 = -3x$$

$$\begin{aligned} &-\frac{x^4}{-3x} \ln(3x) \\ &= x^2 \ln(3x^3) \\ &= x^2 \ln(3x^3) = 2 \ln \end{aligned}$$



$$x+y+8 = x-y+8$$

~~2y~~

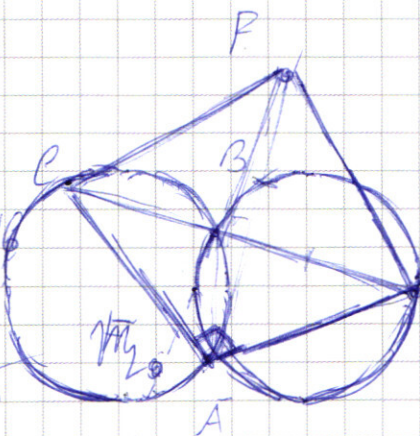


y

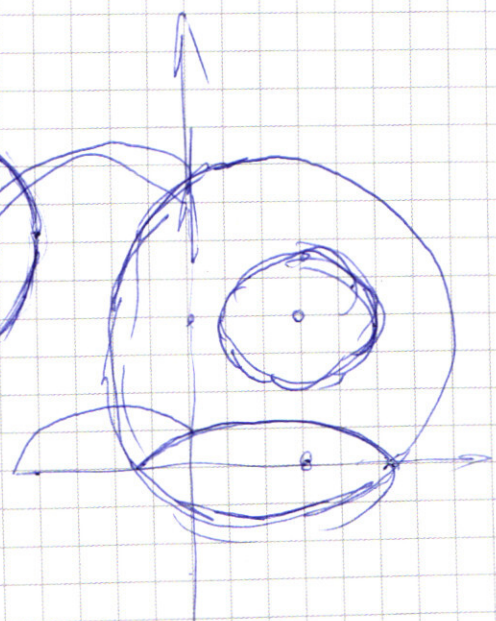
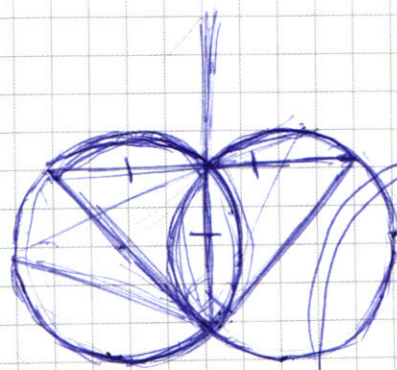
$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$$

$$|8+y| + |8-y| = 16$$

$$8.5 + 8.5$$



$$(1 \times 1 - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = 9$$



$$(x-8)^2 + (y-15)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$93 + 3(3^{28} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 0 \quad \text{или} \quad 3(31 + 3^{28}x - x - 3^x - 3^{28})$$

[5, ... 30]

$$93 \cdot (30 - 5 + 1) = 26 \cdot 93$$

$(3^{28} - 3) \cdot 130 \sim$

$$3(3^{28} - 1) \cdot 3^{28}x - x$$

$$-57 - 6; -4 \dots -30 = \frac{-30 - 5}{2} \cdot 26 = 13 \cdot (-35)$$

$$-35(3^{28} - 3) \cdot 13 = 8$$

$-455 \cdot 3^{28} \quad -455 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 13 \\ x - 35 \\ - 65 \\ \hline 38 \\ 455 \end{array}$$

$$(y + 3x)(y - x + 4) = 0$$

$$y = -3x$$

$$\left(-\frac{x}{-3x}\right)^{\ln 3x} = x^{2/\ln(9x^3)}$$

$$\log_{10} x^3 \quad 3/\log_{10} x$$

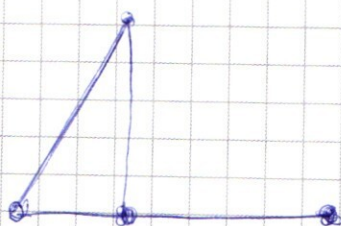
$$\log_{10} 25x$$

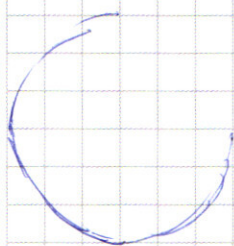
$$\ln 3x = \ln 3 + \ln x$$

$$4\ln 3 + 3/\ln x$$

$$x^{4\ln 3 + 3/\ln x}$$

$$\frac{x^6}{3}^{\ln 3x} = x^{2/\ln 9x^3}$$







ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

