МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИ(

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + \left(2^{64} - 1\right) x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

1 случай. Три цифры числа равны 5, три – 3, две – 1.

Таких чисел $\frac{P_8}{P_3 \cdot P_3 \cdot P_2} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$

2 случай. Три цифры числа равны 5, одна – 9, одна – 3, три – 1.

Таких чисел $\frac{P_8}{P_3 \cdot P_3} = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$

Итого $560 + 1120 = 1680$ чисел.

Ответ: 1680 чисел.

№2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x \quad | : (-\sqrt{2})$

$\sqrt{2}\sin 7x \cdot \sin 4x + \sqrt{2}\sin 4x \cdot \cos 7x + \cos 14x = 0$

$\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + \cos^2 7x - \sin^2 7x = 0$

$\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x) = 0$

$(\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2}\sin 4x + \cos 7x - \sin 7x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad (1) \\ \sqrt{2}\sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x = 0$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$

$\frac{\pi}{4} - 7x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{28} - \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sin 4x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x\right) = 0$

$\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$

$2\sin\frac{4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2}\cos\frac{4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \quad (3) \\ \cos\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad (4) \end{array}\right.$$

(3) $\frac{\frac{\pi}{4}-3x}{2} = \pi k$

$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$

(4) $\frac{11x-\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$

Итак, $x = -\frac{\pi}{28} - \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} - \frac{\pi k}{7}$, $x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$, $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $k \in \mathbb{Z}$.

№5. $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$ имеет 2 решения.

(1) $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$, $|y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6$

I $3+x < 3-x$, т.е. $x<0$

$|y-3-x|$: $-$ $+$ $+$; точки $-3+x$, $3-x$ на оси y; $|y-3+x|$: $-$ $-$ $+$

II $3+x > 3-x$, т.е. $x>0$

$|y-3-x|$: $-$ $-$ $+$; точки $-3-x$, $3+x$ на оси y; $|y-3+x|$: $-$ $+$ $+$

I.

1) $\begin{cases} y \le 3+x \\ x<0 \\ -y+3+x-y+3-x=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ 0>x \ge -3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3+x < y < 3-x \\ x<0 \\ y-3-x-y+3-x=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ 0<y<6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge 3-x \\ y-3-x+y-3+x=6 \\ x<0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=6 \\ -3 \le x < 0 \end{cases}$

II.

1) $\begin{cases} y \le 3-x \\ x>0 \\ -y+3+x-y+3-x=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ 0<x\le 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3-x < y < 3+x \\ x>0 \\ -y+3+x+y-3+x=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ 0<y<6 \end{cases}$

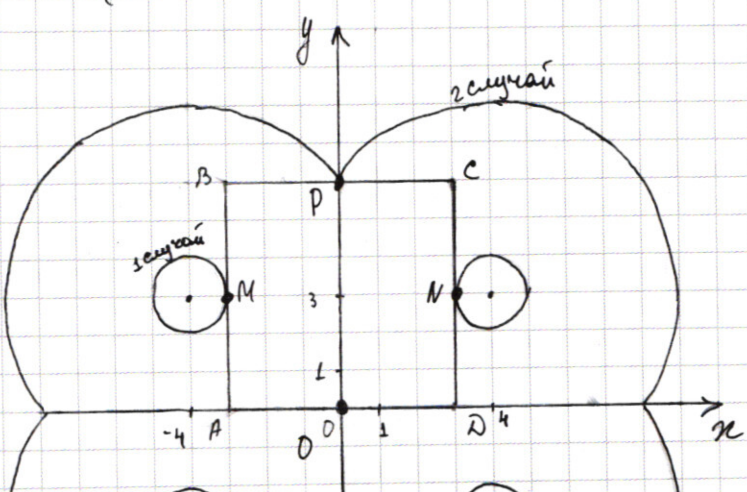
3) $\begin{cases} y \ge 3+x \\ x>0 \\ y-3-x+y-3+x=6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=6 \\ 0<x\le 3 \end{cases}$

III $3+x = 3-x$, т.е. $x=0$.

$2|y-3| = 6$

$|y-3| = 3$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=6 \end{array}\right.$



Изображу множество решений уравнения $|y-3-x|+|y-3+x|=6$ на координатной плоскости (квадрат ABCD). Уравнение $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$ имеет решение только при $a \ge 0$. Если $a>0$, то на координатной плоскости это 4 окружности или их части (в зависимости от значения a). Координаты их центров: $(4;3)$, $(-4;3)$, $(-4;-3)$, $(4;-3)$, радиусы равные $\sqrt{a}$ (Если $a=0$, то это 4 точки)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Система будет иметь 2 решения в следующих случаях:

1) $r = 1$, $a = 1$ $\quad (M(-3;3),\ N(3;3))$

2) $r = 5$, $a = 25$ $\quad (P(0;6),\ O(0;0))$

Ответ: $a = 1$, $a = 25$.

№ 3.
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (1) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

(1) $x^2 - 2(y+2)x + (12y - 3y^2) = 0$

Решу это уравнение как квадратное относительно x.

$\frac{D}{4} = y^2 + 4y + 4 - 12y + 3y^2 = 4(y-1)^2$

$x = y + 2 \pm 2(y-1)$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{array}\right.$$

1 случай: $x = 3y$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2}$

$(y^{2\lg 3y})^2 = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2(\lg 3y + \lg y)}$

$(y^{2\lg 3y})^2 = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}$

$y^{2\lg 3y}\left(y^{2\lg 3y} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}\right) = 0$

Т.к. $y^k > 0$, и $y > 0$, то можно разделить обе части уравнения на $y^{2\lg 3y}$

$y^{2\lg 3y} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} = 0$

$y^{2(\lg 3 + \lg y)} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} = 0$

$y^{2\lg 3} \cdot y^{2\lg y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} \quad | : y^{2\lg y}$

$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}$

$y^{2\lg 3} > 0$, $3^{\lg 3y} > 0$, прологарифмирую обе части по основанию 10

$\lg y^{2\lg 3} = \lg 3^{\lg 3y}$

$2\lg 3 \lg y = \lg 3 \cdot \lg 3y$.

$2\lg y = \lg 3y$

$\lg y^2 = \lg 3y$

$y^2 = 3y$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ - не подходит по ОДЗ.} \\ y = 3 \end{array}\right., \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases} \quad (9;3)$$

2 случай. $x = 4 - y$.

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y)y}$

$$\begin{cases} y^{5\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg(4-y)y} \quad (2) \\ y \neq 4 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(2) $y^{5\lg(4-y)} - y^{2\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0.$

$y^{2\lg(4-y)} \left(y^{3\lg(4-y)} - y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}\right) = 0$

$y > 0$, значит, $y^{2\lg(4-y)} > 0$, поэтому разделим обе части уравнения на $y^{2\lg(4-y)}$

$y^{3\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$

$4 - y = x > 0$ по ОДЗ, значит, $(4-y)^{\lg(4-y)} > 0$. Тогда

левая и правая части положительны. ~~Прол~~ Прологарифмируем их по основанию 10.

$\lg y^{3\lg(4-y)} = \lg\left(y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}\right)$

$3\lg(4-y)\lg y = 2\lg^2 y + \lg^2(4-y)$

$(\lg(4-y) - \lg y)(\lg(4-y) - 2\lg y) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \lg(4-y) = \lg y \\ \lg(4-y) = 2\lg y \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4-y = y \\ 4-y = y^2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Т.к. $y > 0$ (по ОДЗ), то $y = 2$ или $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \quad (2;2) \\ \begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} > 0 \end{cases} \quad \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \end{array}\right.$$

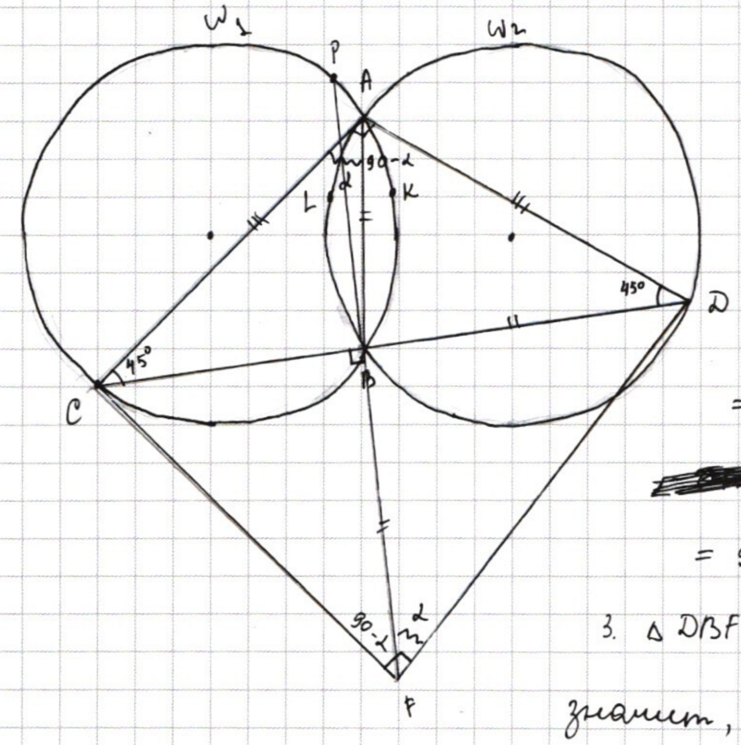
Итак, $(2;2)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$, $(9;3)$ – решения системы.

Ответ: $(2;2)$, $(9;3)$, $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

№ 6.

1. Т.к. окружности имеют одинаковые радиусы, то $\smile ALB = \smile AKB$, где $L \in w_2$, $K \in w_1$ (см. рисунок). Значит, равны и вписанные углы, опирающиеся на эти дуги, т.е. $\angle ACD = \angle ADC = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, т.к. ΔCAD – прямоугольный. Тогда $AC = AD$. Пусть $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle BAD = 90^\circ - \alpha$; $\smile BC = 2\alpha$, $\smile BD = 180^\circ - 2\alpha$ по теореме о вписанном угле.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2. Пусть $FB \cap \omega_1 = P$.

Тогда $\angle CFB = \dfrac{\smile CP - \smile BC}{2}$,

$\angle CBP = 90^\circ$, значит, $\smile CP = 180^\circ$

$\angle CFB = \dfrac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$

Аналогично $\angle DFB =$

$= \dfrac{180^\circ - \smile BD}{2} = \dfrac{180^\circ - 180^\circ + 2\alpha}{2} = \alpha$

$\angle CFD = \angle CFB + \angle BFD =$

$= 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$

3. $\triangle DBF$ – прямоугольный, $\angle BFD = \alpha$, значит, $\angle BDF = 90^\circ - \alpha$, но $BF = BD$ (по условию), поэтому $\angle BFD = \angle BDF = \alpha = 90^\circ - \alpha$, $\alpha = 45^\circ$.

Тогда $\angle DCF = \angle CDF = 45^\circ$, $CF = FD$.

4. $\angle BAD = 90^\circ - \alpha = 45^\circ = \angle ADB$, $\triangle BAD$ – равнобедренный, $BA = BD$

5. в $\triangle CFD$ – равнобедренном высота, проведенная к основанию, является биссектрисой, значит, FB еще и медиана, $CB = BD = FB = AB$

$CF = \dfrac{CD}{\sqrt2} = \dfrac{2BC}{\sqrt2} = \sqrt2 BC$.

6. $\triangle ABC$ вписан в окружность ω_1. По т. синусов $\dfrac{BC}{2\sin 45^\circ} = R$;

$BC = 2\sin 45^\circ R = 5\sqrt2$, $CF = 5\sqrt2 \cdot \sqrt2 = 10$.

Ответ: 10.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $3375 = 25 \cdot 135 = 25 \cdot 5 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3 = (15)^3$

6 цифр. значит, ост - единицы. 5(3), 3(3), 1(2)

1) $\frac{P_8}{P_2 P_3 P_3} = \frac{\cancel{8!} \; 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{3!}\,\cancel{3!}\,\cancel{2!}} \cdot 2 = 560$

2) 5(3) 9(1) 3(1) 1(3)

$\frac{8! \; 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{3!}\,\cancel{3!}} = 20 \cdot 56 = \cancel{224}0$ 112

$\frac{2}{11^2}$

$225 \cdot 15 = 1125 + 225 = 3375$

4 5 6 7 8

Итого: ~~2240~~ ~~560~~ $\boxed{\cancel{2800}}$

$1120 + 560 = 1680$

2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\sin 7x \sin 4x + \sqrt{2}\sin 4x \cos 7x + \cos 14x = 0$

$\sqrt{2}\sin 7x \sin 4x + \sqrt{2}\sin 4x \cos 7x + \cos^2 7x - \sin^2 7x = 0$

$\cos 7x(\cos 7x + \sqrt{2}\sin 4x) + \sin 7x(\sqrt{2}\sin 4x - \sin 7x) = 0$

$\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + \cos 14x = 0$

$\sqrt{2}\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0$

$(\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2}\sin 4x + \cos 7x - \sin 7x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 7x + \sin 7x = 0 \quad (1) \\ \sqrt{2}\sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0 \end{array}\right.$$

(1) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$

$\frac{\pi}{4} - 7x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$7x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - \pi k = -\frac{\pi}{4} - \pi k$

$x = -\frac{\pi}{28} - \frac{\pi k}{7};\ k \in \mathbb{Z}$

(2) $\sqrt{2}\sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0$

$\sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 7x - \sin 7x) = 0$

$\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = 0$

$2\sin\frac{4x + \frac{\pi}{4} - 7x}{2}\cos\frac{4x - \frac{\pi}{4} + 7x}{2} = 0$

$\sin\frac{\frac{\pi}{4}-3x}{2}=0$ (1)

$\cos\frac{11x-\frac{\pi}{4}}{2}=0.$ (2)

(1) $\frac{\pi}{8}-\frac{3x}{2}=\pi n$

$\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{8}-\pi n$

$3x=\frac{\pi}{4}-2\pi n$

$x=\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi n}{3}$

(2) $\frac{11x}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi l$

$\frac{11x}{2}=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}+\pi n$

$\frac{11x}{2}=\frac{5\pi}{8}+\pi n$

$x=\frac{5\pi}{44}+\frac{2\pi n}{11}$

Отв: 3 серии

3. $\begin{cases}\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy}\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0\end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ xy>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}$

Решение:

$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}}=y^{2\lg xy}$

$\frac{y^{5\lg x}-y^{2\lg xy}\cdot x^{\lg x}}{x^{\lg x}}$

$\frac{y^{5\lg x}-y^{2\lg x+2\lg y}\cdot x^{\lg x}}{x^{\lg x}}$

$\frac{y^{2\lg x}\left(y^{3\lg x}-y^{2\lg y}\cdot x^{\lg x}\right)}{x^{\lg x}}$

(2yp-е) $x^2-2xy-4x+12y-3y^2=0.$

$\cancel{(x-y)^2}$

$x^2-2(y+2)x+(12y-3y^2)=0$

$\frac{D}{4}=y^2+4y+4-12y+3y^2=$

$=4y^2-8y+4=$

$=4(y-1)^2$

$x=y+2\pm2(y-1)$

$x_1=y+2+2y-2=3y$

$x_2=y+2-2y+2=4-y$

$(x-3y)(x-4+y)=0$

$\left[\begin{array}{l}x=3y\\ x=4-y\end{array}\right.$

(1) $x=3y$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y}=y^{2\lg 3y^2}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y}=y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y}=3^{\lg 3y}\cdot y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y}-3^{\lg 3y}\cdot y^{2(\lg 3y\cdot y)}=0.$

$y^{4\lg 3y}-3^{\lg 3y}\left(y^{\lg 3y+\lg y}\right)^2$

$y^{4\lg 3y}-3^{\lg 3y}\cdot y^{2\lg 3y}\cdot y^{2\lg y}=0$

$0\neq y^{2\lg 3y}\left(y^2-3^{\lg 3y}\cdot y^{2\lg y}\right)=0.$

$y^2-3^{\lg 3+\lg y}\cdot y^{2\lg y}=0$

$0\neq y^2\left(1-3^{\lg 3y}\cdot y^{\lg y}\right)=0.$

$1=3^{\lg 3y}\cdot y^{\lg y}$

$1=3^{\lg 3}\cdot 3^{\lg y}\cdot y^{\lg y}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 3y$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2(\lg 3y + \lg y)}$

$y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}$

$(y^{2\lg 3y})^2 - \cancel{\lg}\ 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y}\, y^{2\lg y} = 0$

$0 \neq y^{2\lg 3y} \left(y^{2\lg 3y} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}\right) = 0$

$y^{2\lg 3y} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} = 0$

$y^{2(\lg y + \lg 3)} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} = 0$

$y^{2\lg y} \cdot y^{2\lg 3} - 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} = 0$

$y^{2\lg 3} = 3^{\lg 3y}$

$2\cancel{\lg 3} \cdot \lg y = \cancel{\lg 3} \cdot \lg 3y$

$2\lg y = \lg 3y$

$y^2 = 3y$

$\left[\begin{array}{l} \cancel{y=0} \\ y = 3 \end{array}\right.$

(2) $x = 4 - y$. $y \neq 4$!

$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(4-y)y}$

$y^{5\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg x} \cdot y^{2\lg(4-y)y}$

$y^{5\lg(4-y)} - y^{2\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$

$y^{2\lg(4-y)}\left(y^{3\lg(4-y)} - y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}\right) = 0$

$y^{3\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$

$y^{3 \cdot \frac{\lg 4}{\lg y}} = y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$

y

$y^{3\lg(4-y)} = y^{2\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$

$\lg y^{3\lg(4-y)} = \lg y^{2\lg y} + \lg(4-y)^{\lg(4-y)}$

$3\lg(4-y)\lg y = 2\lg y \lg y + \lg^2(4-y)$

$\lg y\,(3\lg(4-y) - 2\lg y) = \lg^2(4-y)$

$\cancel{\frac{3\lg y}{\lg(4-y)} = 2}$

$2\lg y^2 + \lg^2(4-y) - 3\lg(4-y)\lg y = 0$

$2t^2 + h^2 - 3th = 0$

$\cancel{(h-t)}($

$h^2 - 3th + 2t^2 = 0$

$(h - t)(h - 2t) = 0$

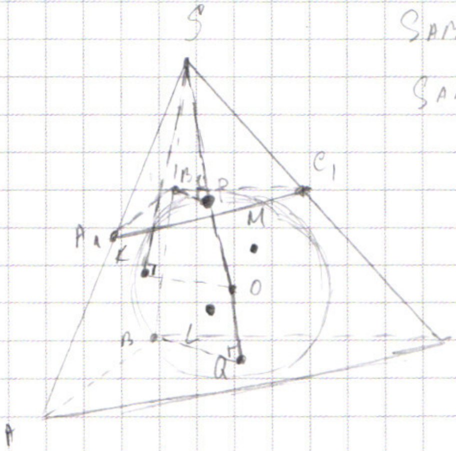
$h^2 - 3th + 2t^2 = 0$

17

$4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$S_{ABC} = 4 = \frac{AB+BC+AC}{2} \cdot r_M$

$S_{A_1B_1C_1} = 1$

$KS = SM = SL$

SO – линия пересечения

с бисс. пл-тей трехгр. угла

P и Q – ц. впис. окр-тей

$7. \begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$

~~$2^x + 3\cdot 2^{65} \le 70 + (2^{64}-1)x$~~

$2^x + 3\cdot 2^{65} \le 70 + (2^{64}-1)x$

$\triangle SQB_1 = \triangle SPB_1$

$|y-3| = 3.$

$y = 0$
$y = 6.$

$|-3-3| + |-3+3| = 6$

$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & \text{2 реш.} \\ ((|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & \text{4 окр-ти} \end{cases}$

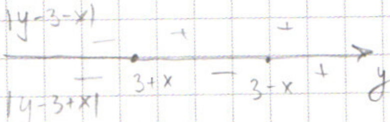
$y = 3+x \qquad y = 3-x.$

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

$3+x < 3-x.$

1) $y-3-x \ge y-3+x$

$x \le 0$



1.1) $y \le 3+x$

$-y+3+\cancel{x}-y+3-\cancel{x} = 6$

$2y = -3$

$y = -0.$

$x+3 \ge -\frac{3}{2} \quad 0$

$\begin{cases} 0 \ge x \ge -4{,}5 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

1.2) $3+x < y < 3-x$

$\cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x = 6$

$x = -3$

$\begin{cases} 0 < y < 6 \end{cases}$

1.3) $y \ge 3-x$

$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x} = 6$

$2y = 12$

$y = 6$

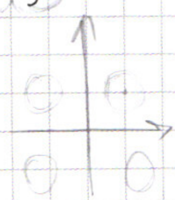
$6 \ge 3-x$

$\begin{cases} 0 \ge x \ge -3 \\ y = 6 \end{cases}$

$3+x \vee 3-x$
$x \vee 0$

2) $y-3-x < y-3+x.$

$x > 0$



2.1) $y \le 3-x.$

$-y+3+x-y+3-x = 6$

$y = 0$

$3-x \ge -1{,}5$

$x \le 4{,}5$

$\begin{cases} 0 < x \le 4{,}5 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

2.2) $3-x < y < 3+x$

$-\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x = 6$

$x = 3$

$\begin{cases} 0 < y < 6 \end{cases}$

2.3) $y \ge 3+x$

$2y-6 = 6$

$y = 6$

$x+3 \le 6$

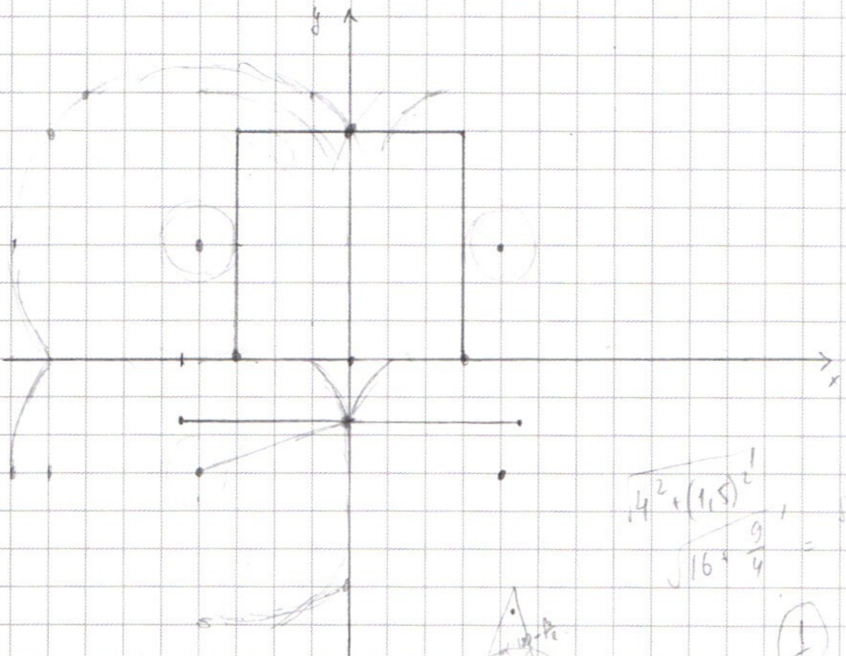
$\begin{cases} y = 6. \\ 0 < x \le 3 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

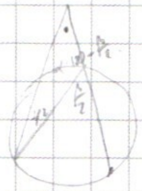
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \cdot 4^2$

$\sqrt{4^2+(1{,}5)^2}$, $\sqrt{16+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$ — 3 точки



1) от $\sqrt{\frac{73}{4}}$ до 5

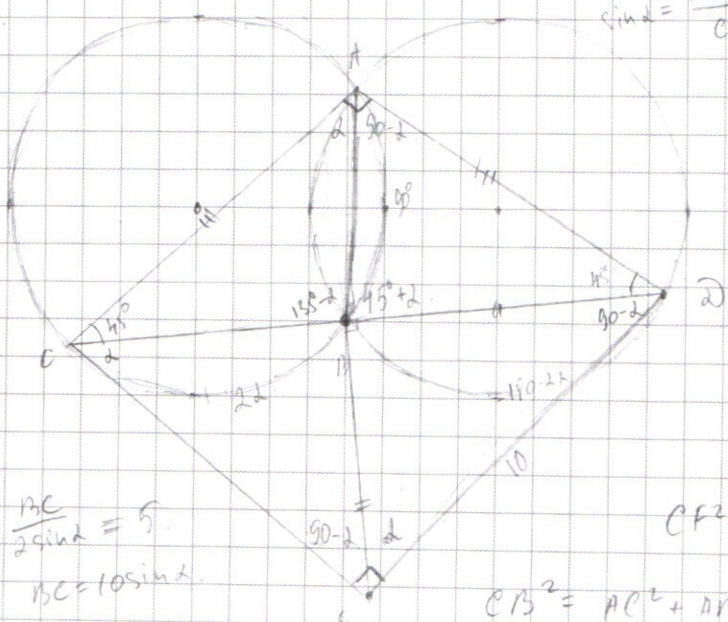
2) или $a=1$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{73}{4}} < a < 25 \\ a = 1\end{array}\right.$

$\sin 2 = \frac{BF}{CF}$; $BF = BD = 10 \cdot \cos \alpha$

$\sin \alpha = \frac{10 \cos \alpha}{CF}$. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{CF}$ => $FD = 10$

6.



$\triangle ACD \sim \triangle BFD$ по 2 пр. ст. и углу м.н.

$\frac{AC}{BF} = \frac{CD}{FD}$

$\frac{AB}{2\sin 45^\circ} = R$

$AB = \sqrt{2} R = 5\sqrt{2}$

$AC = 10 \sin(135^\circ - \alpha)$

$\angle CFD = 90^\circ$

$CF^2 = CB \cdot CD$

$\frac{BC}{2\sin\alpha} = 5$

$BC = 10 \sin\alpha$

$\frac{AB}{\sqrt{2}} = 5$

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\,AB \cos\alpha$

$CD = AC\sqrt{2}$ $\quad \cos\alpha = \frac{BC}{CF}$ $\quad CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \frac{BC}{CF}$

$CF^2 = 100\sin^2(135^\circ-\alpha) + 50 - 100\sqrt{2}\sin(135^\circ-\alpha) \cdot \frac{10\sin\alpha}{CF} \cdot 10\sqrt{2}\sin(135^\circ-\alpha)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)