МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + \left(3^{81} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos\frac{10x}{2}\cos\frac{4x}{2} - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin\frac{10x}{2}\cos\frac{4x}{2}$

$\cos 7x + 4\cos^2 x - 3\cos x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + 3\sin x - 4\sin^2 x$

$\cos 7x + 4(\cos^2 x + \sin^2 x) - 3(\cos x + \sin x) - \sqrt{2}\cos 10x - \sin 7x = 0$

$\cos 7x - \sin 7x - 3(\cos x + \sin x) - \sqrt{2}\cos 10x + 4 = 0$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$\frac{\pi}{4}$ ~~cos~~ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) = \left[\begin{array}{l}\cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \\ \sin(5x + \frac{\pi}{4})\end{array}\right.$

~~2cos5x si~~

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x - 2\sin 5x\cos 2x = 0$

$-4 \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}\sin\frac{8x - \frac{\pi}{4}}{2}(\cos 5x - \sin 5x) =$

$2\cos 5x\cos 2x - 2\sin 5x\cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

~~$2(\cos 2x - \sin(5x + \frac{\pi}{4}))$~~

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2})\sin(4x - \frac{\pi}{8})(\cos 5x - \sin 5x$

$(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$2(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$2(\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{4} - 5x))(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

1. $16875 : 5 = 3375$, $3375 : 5 = 675$, $675 : 5 = 135$, $135 : 5 = 27$

$27 = 3^3$ $\quad 16875 = 5^4 \cdot 3^3$

Так как цифры, то подходят 5, 3, 9.

Числа восьмизначные, тогда присутствует одна или две (при наличии цифры 9) единицы.

$24 \cdot 30 = 720$

~~С одной единицей: 8!~~ 8 7 6 5 4 3 2 1

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 24 \cdot 30 \cdot 56 = 720 \cdot 56$

~~С двумя единицами: 8!~~

$720 \cdot 56 = 4320 + 360 = 40320$ $\quad 40320 \cdot 2 = 80640$ $\quad 24 \cdot 3 = 72$ $\quad 28 \cdot 3 = 84$

~~80640~~

$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = 2\pi n$ $\quad x = \frac{2}{3}(\frac{\pi}{8} - 2\pi n)$

Сочетания!

~~$x = \frac{\pi}{12} - \frac{4}{3}\pi n$~~

$\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$y(2y - x) - 4(2y + x) - x^2 = 0$

$24 \cdot 5 = 120$ $\quad 120 \cdot 7 = 840$ $\quad 5 \cdot 6 \cdot 7$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) = 0 \\ \sin(4x - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \cos 5x = \sin 5x \end{array}\right.$$

$2y^2 - xy - 4x = x^2 + 8y$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ $\quad 8 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!}$

$>0 \quad >0 \quad <0 \quad >0 \quad <0$

~~$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$~~

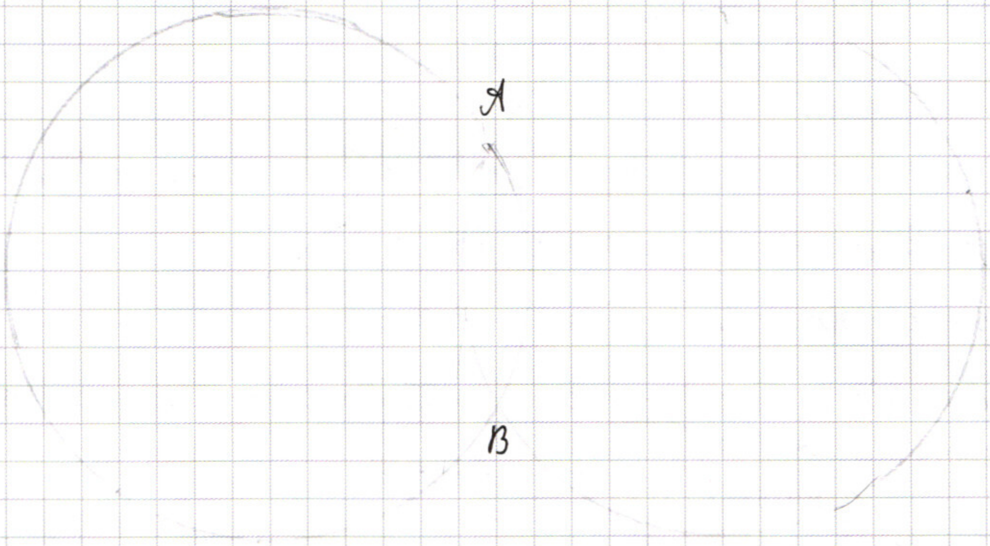
$5x = \frac{\pi}{4} + \pi m$

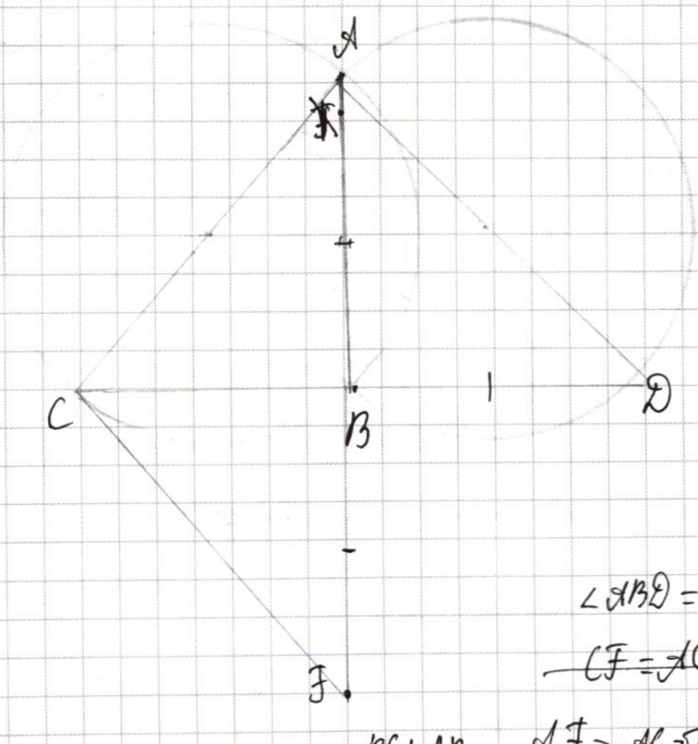
$4x - \frac{\pi}{8} = 2\pi k$ $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{32} + \frac{\pi}{2}k}$ $\quad \boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}m}$

$35 \cdot 8 = 280$ $\quad 280 + 840 = 1120$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)





$\cancel{\angle CAB}$ $\angle ACB$ и $\angle BDA$ вписанные, опираются на одну и ту же хорду, $\angle ACB = \angle BDA = \frac{1}{2} \smile AB$.

$\triangle ACD$ р/б. AB - выс. мед. бис.
через точку B на CD можно провести ед. перп.
$CD = AC\sqrt{2}$ $BD = BF = AC\frac{\sqrt{2}}{2} = CB$

$\triangle CBF$ р/б. $CF = BC\sqrt{2} = AC$

$\angle ABD = 90^0$, тогда $AC = AD$ - диаметр.

$\cancel{CF = AC = 2 \cdot 13 = 26}$

$\cancel{BC \perp AB \quad AF = AC\sqrt{2} \quad AF = 26\sqrt{2} \quad S = \frac{1}{2} BC.}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg y + \lg(-x)} \qquad \frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg y}\cdot(-x)^{\lg(-x)} \qquad \frac{(-x)^{4\lg y} - y^{2\lg y}(-x)^{\lg y}\cdot(-x)^{\lg(-x)}}{y^{2\lg y}} = 0$$

$$\frac{(-x)^{\lg y}\left((-x)^{3\lg y} - y^{2\lg y}\cdot(-x)^{\lg(-x)}\right)}{y^{2\lg y}} = 0 \qquad (-x)^{3\lg y} - y^{2\lg y}\cdot(-x)^{\lg(-x)} = 0$$

$$\cancel{(-x)^{\frac{3\lg y}{\lg(-x)}}} \qquad (-x)^{3\lg y - \lg(-x)} = y^{2\lg y}$$

$$(-x)^{\lg\frac{y^3}{(-x)}} = y^{\lg y^2}$$

$$\begin{cases} (-x)^{\lg\frac{y^3}{-x}} = y^{\lg y^2} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Прологарифмировать.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим на простые множители: $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

$16875 : 5 = 3375$ (15, 18, 15, 37, 35, 25, 25, 0)

$3375 : 5 = 675$ (30, 37, 35, 25, 25, 0)

$675 : 5 = 135$ (5, 17, 15, 25, 25, 0)

$135 : 5 = 27$ (10, 35, 35, 0)

$27 = 3^3$.

Так как числа восьмизначные, они могут состоять из цифр 1, 3, 5, 9.

Числа могут формироваться либо из одной единицы, трёх троек и четырёх пятёрок (1); либо из двух единиц, ~~двух~~ одной тройки, одной девятки и четырёх пятёрок (2).

1) Возможность расположения единицы в записи C_8^1, тогда троек C_7^3.

Всего возможных чисел тогда $C_8^1 \cdot C_7^3 = 280$, так как пятёрки занимают оставшиеся места.

2) Если единицы две, то возможность расположения единиц C_8^2, троек C_6^1, а девяток C_5^1.

Всего возможных чисел тогда $C_8^2 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 6 \cdot 5 = 840$, так как пятёрки так же занимают оставшиеся места.

Так как других случаев нет, то общее количество подходящих чисел составит $280 + 840 = 1120$.

Ответ: 1120.

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (1) \end{cases}$$

1) $2y^2 - xy - 8y - x^2 - 4x = 0 \qquad 2y^2 - (x+8)y - (x^2+4x) = 0$

$$y_{1,2} = \frac{(x+8) \pm \sqrt{x^2+16x+64+8x^2+32x}}{4} \qquad y_{1,2} = \frac{(x+8) \pm (3x+8)}{4} \qquad \left[\begin{array}{l} y = x+4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ \left[\begin{array}{l} y = x+4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y = x+4 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases} \quad (4) \\ \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ 2y = -x \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

2) $$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ 2y = -x \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (3) \end{cases}$$

3) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

С учётом $-x = 2y$:

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

Прологарифмируем по основанию 10:

$$2\lg y \cdot \lg(4y) = \lg(2y^2)\lg(2y)$$

$$2\lg y(\lg y + \lg 4) = (2\lg y + \lg 2)(\lg y + \lg 2)$$

$$2\lg^2 y + 2\lg y \lg 4 = 2\lg^2 y + 2\lg y \lg 2 + \lg y \lg 2 + \lg^2 2$$

$$\lg y(\lg 16 - 3\lg 2) = \lg^2 2$$

$$\lg y \lg 2 = \lg^2 2 \qquad \lg y = \lg 2$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y = 2 \\ x < 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y = x+4 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (5) \end{cases}$$

5) С учётом $y = (x+4)$ прологарифмируем по основанию 10:

$$\lg\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)\lg(x+4) = \lg(-x(x+4))\lg(-x)$$

$$(4\lg(-x) - 2\lg(x+4)) \cdot \lg(x+4) = (\lg(-x) + \lg(x+4))\lg(-x)$$

Пусть $\lg(-x) = u$, $\lg(x+4) = v$, тогда

$$v(4u - 2v) = u(u+v) \qquad u^2 - 3uv + 2v^2 = 0 \qquad u_{1,2} = \frac{3v \pm \sqrt{9v^2 - 8v^2}}{2} = \frac{3v \pm v}{2}$$

К замене: $$\left[\begin{array}{l} \lg(-x) = \lg(x+4)^2 \\ \lg(-x) = \lg(x+4) \end{array}\right. \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -x = x^2 + 8x + 16 \\ -x = x+4 \end{array}\right. \\ x < 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = \frac{-9-\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-9+\sqrt{17}}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение).

К системе 4: $\begin{cases} x<0 \\ y>0 \\ y=x+4 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{-9-\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-9+\sqrt{17}}{2} \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-9+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$(-2;2)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(-4;2)$, $(-2;2)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$.

№2.

$\cos 7x+\cos 3x-\sqrt{2}\cos 10x=\sin 7x+\sin 3x$ $\quad \sin 7x-\cos 7x+\sin 3x-\cos 3x=-\sqrt{2}\cos 10x$

Используя формулу дополнительного аргумента, получим: $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos 10x$ $\quad \sqrt{2}\sin\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(10x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}$

Используя формулы суммы синусов и синус двойного угла, получим:

$2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2x = 2\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\left[\begin{array}{l} \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x \end{array}\right.$ Используя разность косинусов: $\left[\begin{array}{l} \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin\left(\frac{3x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0 \\ \sin\left(\frac{7x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n,\ n\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi m}{7},\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}$, $x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi m}{7},\ m\in\mathbb{Z}$

Ответ: $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi m}{7},\ m\in\mathbb{Z}$

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \ (1) \\ (|x|\mp 6)^2+(|y|-8)^2=a \ (2) \end{cases}$$

1) $|x-6-y| \overset{+}{\underset{-}{}} |x-6+y|=12$

а) $\begin{cases} x-6-y\ge 0 \\ x-6+y\ge 0 \\ x=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-6-y\ge 0 \\ x-6+y\le 0 \\ y=-6 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-6-y\le 0 \\ x-6+y\ge 0 \\ y=6 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-6-y\le 0 \\ x-6+y\le 0 \\ x=0 \end{cases}$

Построив ~~прямые~~ отрезки, получим квадрат с вершинами $A(0;-6)$, $B(0;6)$, $C(12;6)$, $D(12;-6)$.

2) Уравнение $(|x|\mp 6)^2+(|y|-8)^2=a$ определяет окружности радиусом $\sqrt{a}$ $(a\ge 0)$ с центрами в точках $O_1(6;8)$, $O_2(-6;8)$, $O_3(-6;-8)$, $O_4(6;-8)$.

Расположение окружностей относительно квадрата ABCD приводит к следующему: окружности с центрами в точках O_1 и O_4 при одном и том же a имеют одинаковое количество общих точек с квадратом ABCD (или обе не имеют с ним общих точек).

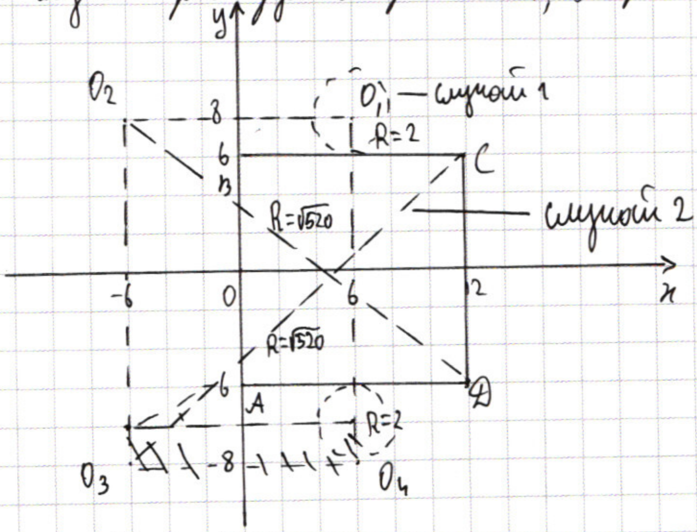
Аналогично ведут себя окружности O_2 и O_3.

Тогда, чтобы система имела ровно два решения, необходимо, чтобы:

1. Окружности O_1 и O_4 имели по одной общей точке с ABCD, а окружности O_2 и O_3 не имели с ним общих точек.

2. Окружности O_2 и O_3 имели по одной общей точке с ABCD, а окружности O_1 и O_4 не имели с ним общих точек.

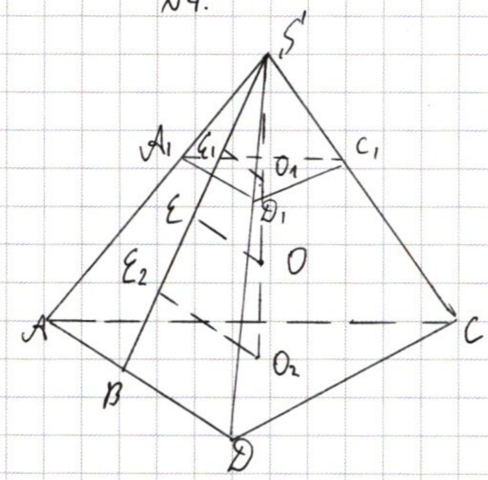
Первый случай реализуется при $a=4$, второй — при $a=520$.



Ответ: $a=4$, $a=520$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано:

S – трёхгранный угол.

O – сфера, вписана, O – центр.

O касается в K, L, M. $S_{\text{сеч.}1} = 4$

$S_{\text{сеч.}2} = 9$.

Найти:

$\angle KSO$, $S_{\text{сеч.}}$

Решение:

Плоскости $(A_1C_1D_1)$ и (ACD) касаются сферы в точках O_1 и O_2 соответственно.

Эти плоскости параллельны друг другу, так как перпендикулярны SO и касаются сферы. O – центр сферы.

$\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle ACD$, так как плоскости $(A_1C_1D_1) \parallel (ACD)$.

$O_1E_1 \perp SB$, $O_2E_2 \perp SB$, где SB – прямая, на которой лежит точка касания грани сферой.
(точка E).

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{2}{3}\left(=\sqrt{\frac{4}{9}}\right)$$

$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{E_1O_1}{E_2O_2} = \frac{2}{3}$, тогда, если $E_1O_1 = 2x$, а $E_2O_2 = 3x$, то $OE = 2{,}5x$ (как средняя линия трапеции $E_1O_1O_2E_2$).

O_1O_2 – диаметр сферы, $O_1O_2 = 5x$.

Пусть $SO_1 = y$: $SO_2 = y + 5x$ и $\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{y}{y+5x} = \frac{2}{3}$ $y = 10x$

Из $\triangle O_1E_1S$ $SO_1 = y = 10x$, $E_1O_1 = 2x$, тогда $\cos\angle E_1SO_1 = \frac{2x}{x} = \frac{1}{5}$

$\angle ESO = \angle KSO = \angle E_1SO = \arccos\frac{1}{5}$ $\angle KSO = \arccos\frac{1}{5}$