

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложение на простые множители:

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad (\text{выписанное на гербовике})$$

Т.к. числа восьмизначные, то существует 2 варианта набора цифр, чтобы их произведение было равно 3375:

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \quad \text{или} \quad 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Кол-во перестановок с повторениями: $P = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots}$

$$P_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 2} =$$

$$= 10 \cdot 56 = \underline{560}$$

$$P_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{6} \cdot \cancel{6}} =$$

$$= 20 \cdot 56 = \underline{1120}$$

Ответ: 1680 чисел.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \rightarrow x, y > 0$$

$$(2): x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x+y)(x-3y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x=3y & x+y=4 \end{matrix}$$

1) Подставим $x=3y$ в (1):

$$\left(\frac{y^5}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y^2)}$$

Продолжение на обороте...

$$y^{4 \lg(3y)} = 3^{\lg(3y)} \cdot y^{2 \lg(3y^2)}$$

$$y^{\lg(81y^4)} = 3^{\lg 3} \cdot 3^{\lg y} \cdot y^{\lg(9y^4)}$$

Воспользуемся формулой: $a^{\lg b} = b^{\lg a}$

Т.е. $3^{\lg y} = y^{\lg 3}$

$$y^{\lg(81y^4)} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg(9y^4) + \lg 3}$$

$$y^{\lg(81y^4)} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg(27y^4)}$$

$$y^{\lg 3} \cdot y^{\lg(27y^4)} = 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg(27y^4)} = 0$$

$$y^{\lg(27y^4)} (y^{\lg 3} - 3^{\lg 3}) = 0$$

$\forall (т.к. y > 0)$
О.Д.З.

$$\rightarrow y^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases}$$

Доказано!
Пусть $a^{\lg b} = A, a, b > 0, A > 0$

Тогда $\lg(a^{\lg b}) = \lg A$

$$\lg b \cdot \lg a = \lg A$$

$$\lg b^{\lg a} = \lg A$$

$$b^{\lg a} = A = a^{\lg b}$$

т.т.т.

2) Подставим $x = 4 - y$ в (1): преобразуем (1):

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(4-y)} \quad \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} \quad | : \lg(\dots)$$

$$\lg x (\lg y^5 - \lg x) = \lg y \cdot (2 \lg x + 2 \lg y)$$

Пусть $a = \lg y, b = \lg x \rightarrow b(5a - b) = 2a(a + b)$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow (b-a)(b-2a) = 0$$

либо $\lg y = \lg x$
 $\lg x = 2 \lg y$

$$\rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

на О.Д.З.

Комментарии: 1) все преобразования на О.Д.З. $x, y > 0$
2) "по густоте" следуя 1) делаем подстановки

Исходная система равносильна:

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \\ x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ \begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \\ x = y^2 \\ x + y = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = y^2 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

на чернов.

Ответ: $(9; 3); (2; 2); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

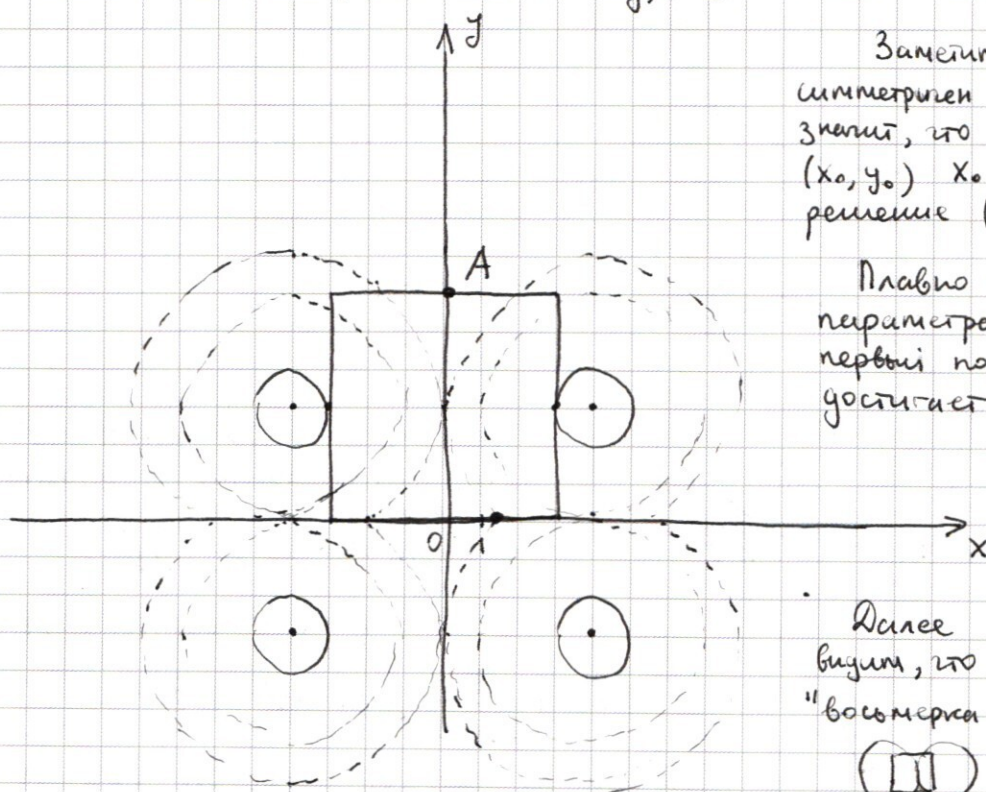
5. a - ? ровно 2 реш-я

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ ((|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$((|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad (2)$$

Г.М.Т. (1) - квадрат с центром в точке $(3; 0)$ и стороной = 6

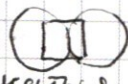
Г.М.Т. (2) - ~~хорошо~~ ~~хорошо~~ ~~хорошо~~ окр-ть с центром в т. $(4; 3)$, отрицательная симметрично отн-но Oy , а затем отн-но Ox



Заметим, что рисунок симметричен отн-но оси Oy , это значит, что если есть решение (x_0, y_0) $x_0 > 0$, то есть и решение $(-x_0, y_0)$.

Плавно увеличивая значение параметра a заметим, что первый подходящий случай достигается при $a = 1$

Далее увеличивая параметр, видим, что конструкция "восьмерка + квадрат"

 всегда будет пересекаться в 4-х точках при $R > 1$ до тех пор, пока

стыковка двух окр-тей не произойдет в точках: $O(0; 0)$ и $A(0; 6)$, в этом случае "восьмерка" пересечет квадрат в точках O и A ! рисунок на следующей странице!

Примечание: "восьмеркой" я называю только верхнюю часть рисунка, данная модель не теряет общности, поскольку покрывает все точки искомой фигуры при $y \geq 0$ - область, где лежит квадрат.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) $BC = 6$

$$U_3 (*): a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax = 50 \quad \text{г.к. } x=6, \text{ то } a^2 - 6\sqrt{2}a - 14 = 0$$

$$D = 72 + 56 = 128$$

$$a = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

$CK \perp FD \rightarrow ACKD$ — квадрат $\rightarrow AC = CK = KD = AD = a = 7\sqrt{2}$

$\triangle CFK: CF^2 = CK^2 + FK^2 \rightarrow FK^2 = 10^2 - 98 = 2$

$$FK = \sqrt{2}$$

$\triangle AFD: FD = FK + KD = \sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$$AD = 7\sqrt{2}$$

$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 98 + 128 = 226$$

$\triangle CAF:$

$$AF^2 = AC^2 + CF^2 - 2AC \cdot CF \cdot \cos \angle ACF$$

$$226 = 98 + 100 - 140\sqrt{2} \cdot \cos \angle ACF$$

$$28 = -140\sqrt{2} \cos \angle ACF$$

$$\cos \angle ACF = -\frac{28}{140\sqrt{2}} = -\frac{4}{20\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ACF = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{\triangle CAF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 49$$

Ответ: а) 10 б) 49

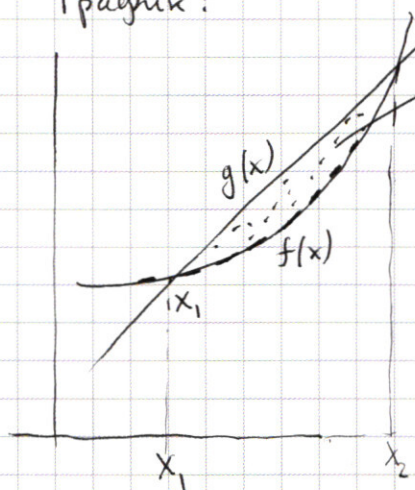
7. Кол-во пар целых (x, y)

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Пусть $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ — показательная функция

$g(x) = (2^{64} - 1)x + 70$ — линейная функ-я.

График:



Т.е. необходимо найти кол-во целых точек внутри области (нижняя часть пунктирная)

Очевидным подбором находим, что

$x_1 = 6, x_2 = 70$ — ищем сами значения $x = 6$ и 70 так как не подходит

целого
Для каждого $x \in [7; 69]$ кол-во соответствующих целых значений y равен:

$$N_x = g(x) - f(x) - 1 = 2^{64}x - x + 70 - 2^x - 3 \cdot 2^{65} - 1 =$$

т.к. нижняя часть пунктирная

$$= 2^{64}(x - 6) - x + 69 - 2^x$$

Тогда суммарное кол-во точек $N = \sum_{x=7}^{69} N_x = 2^{64} \cdot \sum_{x=7}^{69} (x-6) - \sum_{x=7}^{69} x - \sum_{x=7}^{69} 2^x + 69$

$$\sum_{x=7}^{69} (x-6) = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = \frac{1+63}{2} \cdot 63 = 32 \cdot 63 = 2016$$

$$\sum_{x=7}^{69} x = 7 + 8 + \dots + 69 = \frac{7+69}{2} \cdot 63 = 38 \cdot 63 = 2394$$

$$\sum_{x=7}^{69} 2^x = 2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69} = \frac{2^7 \cdot (2^{63} - 1)}{1} = 2^{70} - 2^7$$

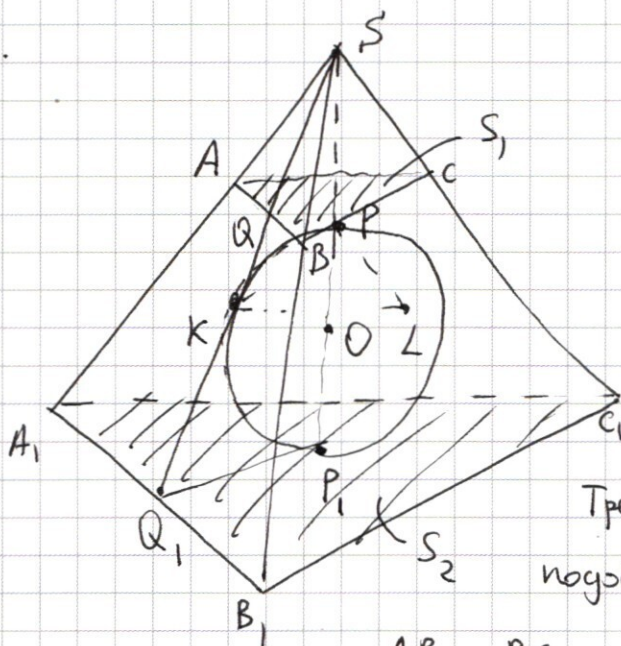
$$N = 2^{64} \cdot 2016 - 2394 - 2^{70} + 2^7 + 69 = 2^{64} \cdot 63 - 2 \cdot 2^{69} - 2394 + 128 + 69 =$$

$$= \underline{2^{69} \cdot 61 - 2197}$$

Ответ: $\underline{61 \cdot 2^{69} - 2197}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 4$$

Оребуно, 200 SK = SL = SM, T.K.

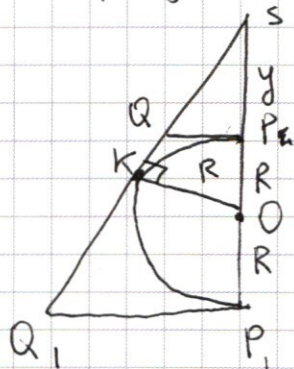
Все Δ -ки: ΔSOK , SOL , SOM
равны по гипотенузе и катету $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle G \angle KSO = \angle SO = \angle MSO.$$

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по 3-му признаку, т.к.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad (u_3 \parallel s_1 \text{ u } s_2) = k = \sqrt{\frac{s_1}{s_2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Проведем аналогично $SQ \geq K$ и рассмотрим ΔSQP :

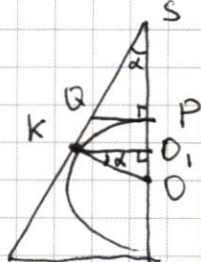


$$\text{Nugro } SP = y \quad \frac{Q_1 P}{Q_1 P_1} = \frac{1}{2} = \frac{y}{y + 2R} \rightarrow \begin{matrix} y + 2R = 2y \\ y = 2R \end{matrix}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$$\angle KSD = \arcsin \frac{1}{3}$$

S_{KLM} найдем из подобия строп. ~~Знаем~~, поскольку данное сечение $\parallel$ $\triangle ABC$ и $\triangle A_1 B_1 C_1$

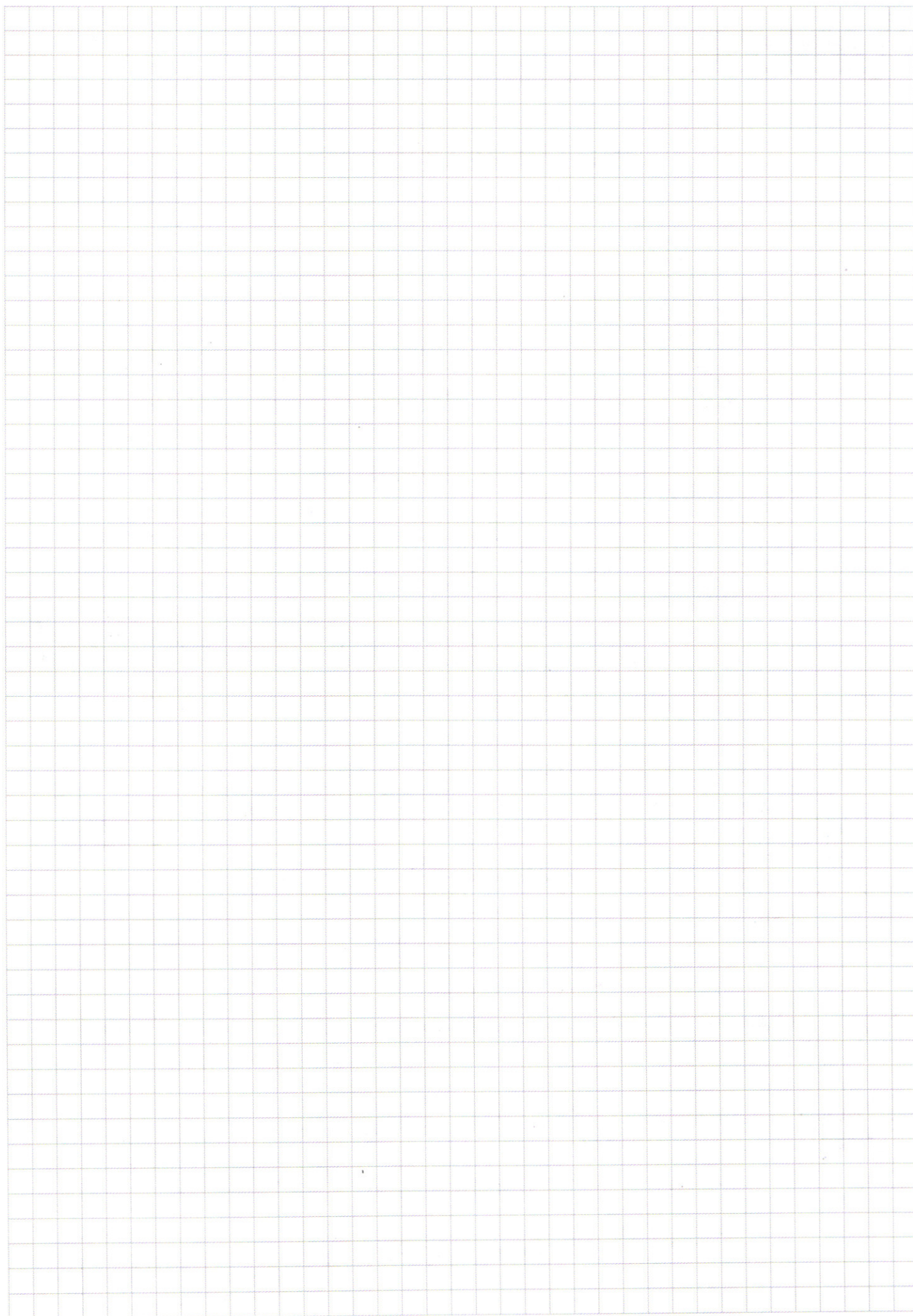


$$\sin \alpha = \frac{1}{3} = \frac{00_1}{100} = \frac{x}{R} \rightarrow x = \frac{R}{3} = 00_1$$

$$S O_1 = S O - 0,0 = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8R}{3} \rightarrow \frac{K O_1}{Q P} = \frac{S O_1}{S P} = \left(\frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \rightarrow S_{KLM} = \frac{16}{9} S_1 = \left(\frac{16}{9}\right)$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}$; $\frac{16}{9}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.
$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ \hline 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ \hline 30 & 1675 \\ -30 & 17 \\ \hline 17 & 135 \\ -15 & 175 \\ \hline 20 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ \hline 10 & 27 \\ -10 & 55 \\ \hline 55 & 27 \\ -55 & 27 \\ \hline 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$\lg(a^{\lg c}) = \lg A$$

$$\lg c \cdot \lg a = \lg A$$

$$c^{\lg a}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$100^{\lg 3} = 3^{\lg 100}$$

2.

$$\cos 2 - \cos 3$$

$$\sin 2 - \sin 3$$

$$\ln(a^{\log_b c}) = \ln A$$

$$\log_b$$

3.

003:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(x-y)^2$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} \cdot x^{-\lg x} - y^{2 \lg y}) = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4(y^2 + x - 3) = 0$$

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x + 12y = (x+y)(x-3y) - 4(x-3y) = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = -1 \quad (x+y)(x-3y)$$

$$t_2 = 3 \quad x^2 + xy - 3xy - 3y^2$$

$$(x^2 - 2)^2 - 4 - 3(y-2)^2 + 12 - 2xy = 0$$

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 + 8 - 2xy = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$x = 3y$$

$$x+y = 4$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y^3)}$$

$$\frac{y^{4 \lg(3y)}}{3^{\lg 3y}} = y^{\lg 9y^4}$$

$$\frac{y^{3 \lg(3y)}}{(3y)^{\lg 3y}}$$

$$\frac{y^{\lg 9y^4 + \lg 9}}{3^{\lg 3y}}$$

$$y^{\lg 9y^4} \left(\frac{y^{\lg 9} - 3^{\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} \right) = 0$$

$$y^{4 \lg(3y)} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg(3y^2)}$$

$$y^{\lg(81y^4)} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{\lg(9y^4)}$$

$$3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3} \cdot y^{\lg(9y^4)}$$

$$y^{\lg 81y^4} = y^{\lg(27y^4)} \cdot 3^{\lg 3}$$

$$y^{\lg 27y^4} \cdot y^{\lg 3} = y^{\lg 27y^4} \cdot 3^{\lg 3} = 0$$

$$y^{\lg 27y^4} (y^{\lg 3} - 3^{\lg 3}) = 0$$

$$\boxed{y=3} \quad \boxed{x=9}$$

$$81 - 54 - 36 - 27 + 36 = 0$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = (x^2 y^2)^{\lg y} \quad x=y-y$$

$$y^{\lg x^5} \cdot x^{\lg \frac{1}{x}} = x^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{\lg x^5} = x^{2 \lg y + \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{\left(\lg \frac{x^5}{y^2}\right)} = x^{\lg x y^2}$$

$$\frac{(y-y)^5}{y^2}$$

$$(y-y)y^2$$

$$x^{\lg \frac{y^5}{x}} = y^{\lg(x^2 y^2)}$$

$$y-3=x$$

$$y-3=-x$$

$$y=x+3$$

$$y=-x+3$$

$$y-3 > x$$

$$y-3 > -x$$

$$2y-6=6$$

$$-y+3+x - y+3-x=0$$

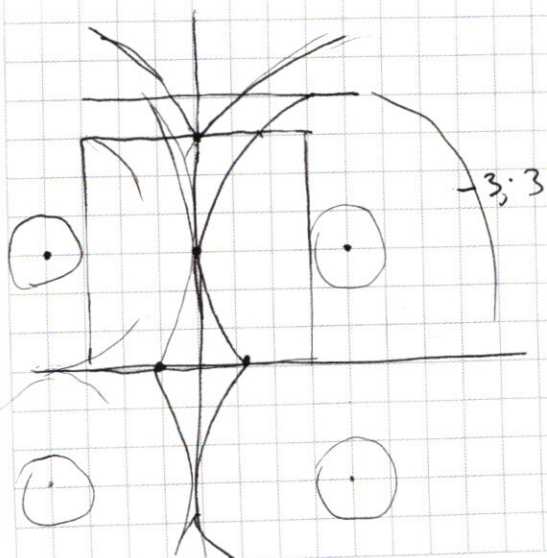
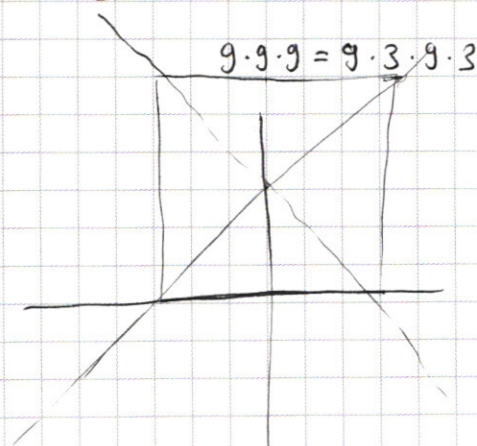
$$+ y=6$$

$$-2y+6=6$$

$$y-3-x - y+3-x=0$$

$$y=0$$

$$x=-3$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 30^\circ + \cos 90^\circ = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$CF = \sqrt{a^2 + a^2(3 - 2\sqrt{2})} =$$

$$= (4 - 2\sqrt{2}) a^2$$

$$50 = x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax$$

$$x = \sqrt{2}a - \sqrt{2}$$

$$x^2 = 2a^2 - 4a + 2$$

$$\sqrt{2}a(\sqrt{2}a - \sqrt{2}) = (2a^2 - 2a)$$

$$2a^2 - 4a + 2 - 2a^2 + 2a = 50$$

$$a^2 - 2a + 2 = 50$$

$$a^2 - 2a - 48 = 0$$

$$D = 4 + 192 = 196$$

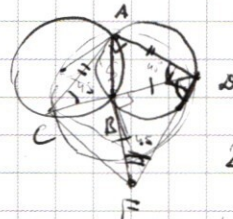
$$a_1 = \frac{2 + 14}{2} = 8$$

$$x = 8(\sqrt{2} - 1)$$

$$a^2 - 6\sqrt{2}a - 4 = 0$$

$$D = 72 + 56 = 128$$

$$a_1 = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

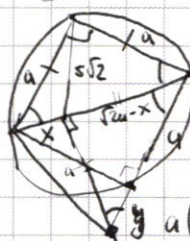


$$y_8 + 50$$

$$2R = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

$$10 = \frac{2AB}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 5\sqrt{2}$$



$$2R_1 = \frac{4a}{\sqrt{2}}$$

$$R_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}a$$

$$50 = x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax$$

$$50 = a^2 + 2a^2 - \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}ax + x^2 - \sqrt{2}a(\sqrt{2}a - x)$$

$$50 = 3a^2$$

$$a(u+y) = \sqrt{2}a$$

$$u+y = \sqrt{2}$$

$$y = a(\sqrt{2} - 1) = x$$

$$\frac{CD}{FD} = \frac{CK}{BK}$$

$$\frac{\sqrt{2}a}{2a - \sqrt{2}x} = \frac{CK}{\sqrt{2}a - x}$$

$$CK = a$$

$$CF^2 = x^2 + BF^2 = x^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ax + x^2 =$$

$$= 2x^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ax = 2(x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax)$$

$$50 = x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax$$

$$50 = a^2(3 - 2\sqrt{2}) + a^2 -$$

$$- \sqrt{2}a(\sqrt{2} - 1)$$

$$- 2a^2 + \sqrt{2}a^2$$

$$S_1 = \frac{1}{2} a \cdot CF \cdot \sin \alpha$$

$$x = 6$$

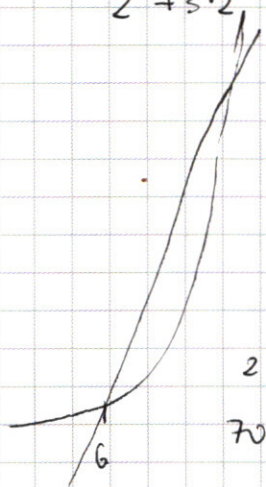
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &> 3 \cdot 2^{65} \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < \leq 70 - x + 2^{64} \cdot x$$

$x = 6$



x	5	6	7
f ₁	1	1	
f ₂	0	1	

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 7 \cdot 2^{64} - 7$$

$$\frac{7}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{64} + 61$$

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65} < 70 - 7 + 7 \cdot 2^{64}$$

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65} < 63 + \frac{7}{6} \cdot 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^7 - 63 < \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2^{65}$$

$$x = 65$$

$$4 \cdot 2^{65} \vee 5 + 2^{64} \cdot 65$$

$$4 \cdot 2^{65} \vee 5 + (2^{65} \cdot 4 \cdot \frac{65}{8})$$

$$x = 6$$

$$x = 70$$

$$35 \cdot 2^{65}$$

$$x = 70$$

$$g - f =$$

$$= 70 + 2^{64} \cdot x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64}(x - 6) - x - 2^x + 70 - 1$$

x	7	8	9	10
f-g				

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \\ 2394 \\ - 128 \\ \hline 2266 \\ - 69 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 63 \\ \hline 126 \\ \times 70 \\ \hline 4410 \end{array}$$

$$2^{70} + 3 \cdot 2^{65} \vee 70 - 2^{64} \cdot 70$$

$$35 \cdot 2^{65} \vee 35 \cdot 2^{65}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 32 \\ \hline 126 \\ 189 \\ \hline 2016 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 63 \\ \times 38 \\ \hline 504 \\ 189 \\ \hline 2394 \end{array}$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x + y = 4$$

$$5\lg y - \lg x = (xy)^{2\lg y}$$

$$X^{5\lg y - \lg x} = X^{2\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 0$$

$$X^{3\lg y - \lg x} - y^{2\lg y} = 0$$

$$X^{3\lg x - \lg x} - y^{2\lg y} = 0$$

$$\frac{y^3}{x} \vee y^2$$

$$x < 2$$

$$y > 2$$

$$\frac{18 - 2\sqrt{12}}{4}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{18 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{9 - \sqrt{12}}{2}$$

$$x, y \in (0, 4)$$

$$x < 2 < y$$

$$x^{5\lg(\frac{y^3}{x})} = y^{\lg(x^2 y^2)}$$

$$x < 2 < y$$

$$y^{3\lg x - 2\lg y} \cdot x^{-\lg x} = 1$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} \cdot x^{-\lg x} = 1$$

$$y^{\lg x} \cdot y^{\lg(\frac{x}{y})^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg(\frac{x^3}{y^2})} = x^{\lg x}$$

$$\lg y = a$$

$$\lg x = b$$

$$\frac{x}{y} = 1$$

$$\lg \frac{y^3}{x} \cdot \lg x = \lg(x^2 y^2) \cdot \lg y$$

$$(5\lg y - \lg x) \lg x = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$5ab - b^2 = 2ab + 2b^2$$

$$3ab - b^2$$

$$3ab - 3b^2$$

$$3ab - 3b^2 \geq 0$$

$$3b(a - b) = 0$$

$$a = b$$

$$b = 0$$

$$5ab - b^2 = 2ab + 2a^2$$

$$3ab - b^2 - 2a^2 = 0$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1 \quad t = 2$$

$$(b - a)(b - 2a) = 0$$

$$x = y$$

$$x = y^2$$

$$\cos \alpha + \cos \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{270}{180} = 135$$

$$\frac{180}{180 + 90}$$

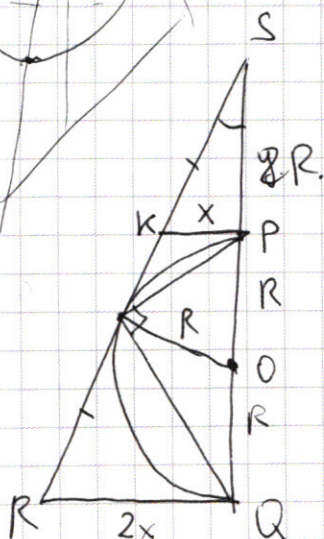
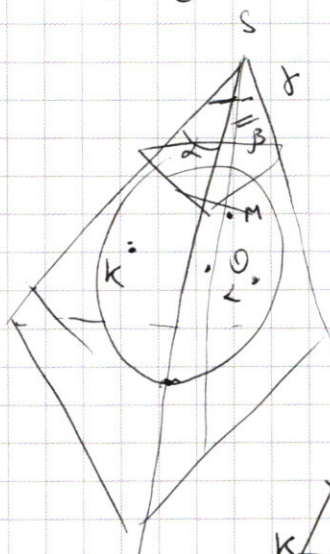
$$0 - 1 = -1$$

$$2 \cos 135^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \dots)$$



$$\sin 120^\circ - \sin 60^\circ = 2 \sin 90^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 150^\circ - \sin 90^\circ = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cos 120^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} =$$

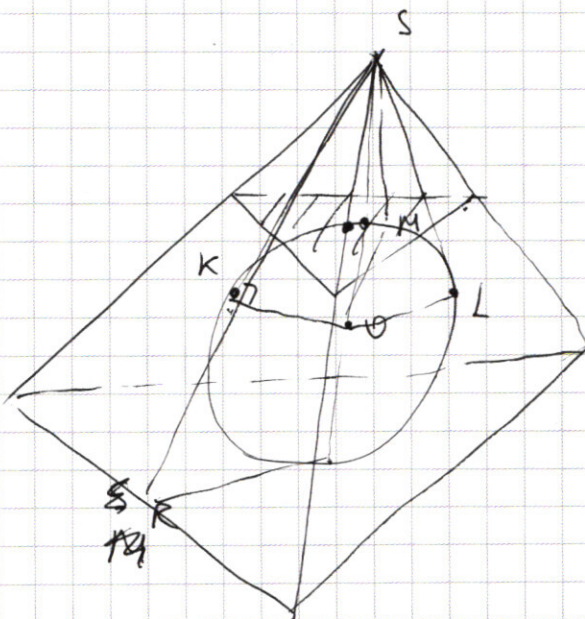
$$-1 - 0 = -1$$

$$2 \cos 45^\circ \cdot \cos 135^\circ$$

$$90 - 0$$

$$0 - 1 = -1$$

$$2 \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$$



$$\frac{y}{y + 2R} = \frac{1}{2}$$

$$2y = y + 2R$$

$$y = 2R$$