

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

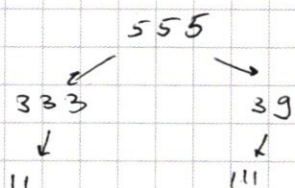
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

У нас есть базисный набор чисел $5, 3$ и цифра 5 ;
либо 3 - цифра 3 , либо 1 - цифра 3 , 1 - цифра 9 ;
и остальные цифры 1



$$A_5^8 \cdot A_3^5 \cdot A_2^2 + A_5^8 \cdot A_1^5 \cdot A_1^4 \cdot A_3^3 = A_5^8 (A_3^5 + A_1^5 \cdot A_1^4) =$$

$$= \frac{8!}{3!5!} \left(\frac{5!}{3!2!} + 5 \cdot 4 \right) = 7 \cdot 8 (2 \cdot 5 + 20) = 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680

② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\sin 7x - \cos 7x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

I) $\sin 7x = \cos 7x$

$$\tan 7x = 1$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

II) $2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)$

$$2 \sin 4x = 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-\sin 4x + \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$11x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi k}{11}$$

Ответ: $\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$; $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{44} + \frac{\pi k}{11}$; $k \in \mathbb{Z}$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 11y = 0 \end{cases} \quad \text{Обс: } \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x(x-4) + xy &= 3y(y-4) + 3xy & \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= (y^2)^{\lg x + \lg y} \quad | : (y^2)^{\lg x} \\ x(x+y-4) - 3y(y+x-4) &= 0 & \left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} &= y^{2 \lg y} \\ (y+x-4)(x-3y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{I)} \quad x = 3y$$

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg y}$$

$$(\lg 3 + \lg y)(2 \lg y - \lg 3) = 2 \lg^2 y \quad \lg y = t$$

$$(t + \lg 3)(2t - \lg 3) = 2t^2$$

$$2t^2 - t \lg 3 + 2t \lg 3 - \lg^2 3 = 2t^2$$

$$t = \frac{\lg^2 3}{\lg 3 - \lg 3} = \lg 3 \Rightarrow \lg y = \lg 3$$

$$y = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{II)} \quad x = 4-y$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg y}$$

$$\lg(4-y)(3 \lg y - \lg(4-y)) = 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg(4-y) \lg y + \lg^2(4-y) = 0 \quad | : \lg^2 y \quad \lg y = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \lg^2 3 = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lg y \neq 0$$

$$2 - 3 \frac{\lg(4-y)}{\lg y} + \left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = t$$

$$2 - 3t + t^2 = 0$$

$$\text{II.I)} \quad t = 2$$

$$\lg(4-y) = 2 \lg y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{II.II)} \quad t = 1$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$y = 2$$

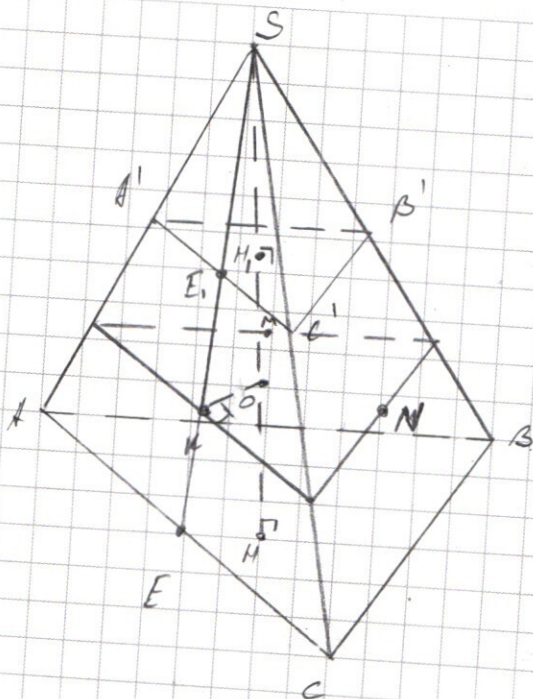
$$x = 2$$

$$\text{Обс: } y = 3, x = 9;$$

$$y = 2, x = 2;$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\text{Дано: } \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{И-ти: } \angle KSO ; S$$

$$\text{① } \text{т.к. } AA_1, BB_1, CC_1 \perp SO \\ ABC \perp SO \quad \text{т.к.}$$

$$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SE_1}{SE} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SH_1}{SM} = \frac{1}{2} = \frac{SH_1}{2R + SH_1}$$

$$SH_1 = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SO = 3R ; OK = R \Rightarrow \angle KSO = \frac{1}{3}$$

②

$$\textcircled{1} \begin{cases} y = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad \begin{matrix} y > 0 \\ x > 0 \end{matrix}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

~~$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + (2 + 3) \cdot 2^{65} < 70 + x$$

$$2^x + 5 \cdot 2^{65} < 70 + x$$

$$2^x - x < 70 - 5 \cdot 2^{65}$$

$$2^x - x < -k \cdot 2^{65} \quad \text{где } k = 2 + 3, k < 0 \Rightarrow$$

$$2^x - x < -k \cdot 2^{65} \Rightarrow \text{нельзя}$$~~

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} - x \cdot 2 < 70 + x$$

$$2^x + (6 - 2) \cdot 2^{64} < 70 + x$$

$$2^x - x < 70 - 4 \cdot 2^{64} \Rightarrow \text{нельзя. } 2) \quad x \leq 6 - \text{нельзя}$$

~~$$2^x < (x - 6) \cdot 2^{64} \quad | : 2^{64}$$~~

~~$$2^x < (x - 6) \cdot 2^{64} \quad | : 2^{64}$$

$$\frac{2^x}{2^{64}} < x - 6 \Rightarrow x > 64$$~~

$$2^x < (x - 6) \cdot 2^{64} \quad | : 2^{64}$$

$$\frac{2^x}{2^{64}} < x - 6$$

$$, \text{ очевидно, что при } x = 70$$

$$64 = 64 - \text{нельзя} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [7; 69] \Rightarrow 62 \text{ решения}$$

Овс: $\textcircled{62}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$y > 0$$

$$x \geq 0$$

$$2^x + 2^{66} + 2^{65} < 70 + x \cdot 2^{64} - x$$

$$2^x + 2^{66} + 2^{65} - x \cdot 2^{64} < 70 - x$$

$$x \leq 70 \Rightarrow$$

попробуем: $2^x + 2^{66} + 2^{65} < x \cdot 2^{64} \quad | : 2^{64}$

$$\frac{2^x}{2^{64}} + 2^2 + 2 < x \Rightarrow x \geq 64$$

$$x = 64$$

$$1 + 6 < 64$$

верно

$$x = 65$$

$$2 + 6 < 65$$

верно

$$x = 66$$

$$4 + 6 < 66$$

верно

$$x = 67$$

$$8 + 6 < 67$$

верно

$$x = 68$$

$$16 + 6 < 68$$

верно

$$x = 69$$

$$32 + 6 < 69$$

верно

$$x = 70$$

$$64 + 6 < 70$$

неверно $\Rightarrow$

$$x > 70$$

$$x = 64 \Rightarrow 7 \cdot 2^{64} = y \leq 70 + 2 \cdot 64 - 64$$

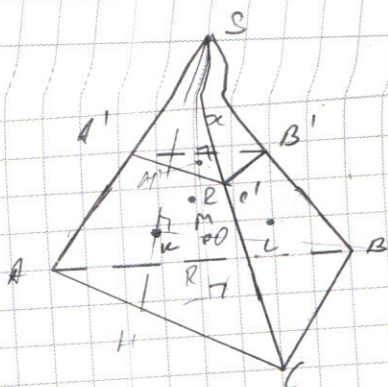
$$2^{63} + 8 \cdot 2^{63} + 4 \cdot 2^{63} - 63 \cdot 2^{64} < 7$$

$$2^{62} + 16 \cdot 2^{62} + 8 \cdot 2^{62} - 62 \cdot 2^{64} < 7$$

$$2^{70} + 2^{66} + 2^{65} < 70 + 70 \cdot 2^{64} - 70$$

$$64 \cdot 2^{64}$$

$$2^{64} + 2^{64} + 2^{64} < 70 \cdot 2^{64} - 70$$



$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{2R+x} = \frac{1}{2} = \frac{SH'}{SH}$$

$$2x = 2R+x$$

$$x = 2R$$

$$OK = \sqrt{10R^2}$$

$$SE = \frac{3}{4} R \sqrt{10},$$

$$\frac{A'C_1}{AC} = \frac{SE}{SE_1} = \frac{SH'}{SH}$$

$$\frac{SH'}{2R+SH'} = \frac{K_1N_1}{\frac{AC}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{B_1K_1 \cdot A_1C_1}{BK \cdot AC} = \frac{1}{4}$$

$$SH' = 2R$$

$$OK = R, SO = 3R$$

$$\Rightarrow \cos \angle OKS = \frac{1}{3}$$

$$\frac{SH'}{SO} = \frac{2R}{3R} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{K_1M_1N_1}} = \frac{4}{9}$$

$$S_{K_1M_1N_1} = S$$

$$\frac{SO}{SH'} = \frac{3R}{4R} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{K_1M_1N_1}}{S_{ABC}} = \frac{9}{16}$$

ММА

$$4 S_{A'B'C'} = S_{ABC}$$

$$\frac{SO}{SH} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{SH'}{SO} = \frac{2}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x = 0$$

$$1 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70$$

$$x = 1$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 69 + 2^{64}$$

$$x = 2$$

$$2^2 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 68 + 2^{65}$$

$$x = 4$$

$$2^4 + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 66 + 2^{64}$$

$$2^4 + 2^{65} < 66 + 2^{64} + 2^{65}$$

$$2^4 < 66 + 2^{65}$$

$$x = 64$$

$$2^{64} + 2^{64} + 2^{65} < 70 + 2^{64}$$

$$x = 66$$

$$2^{66} + 2^{64} + 2^{65} < 70 - 66 + 2^{65} + 2^{65}$$

$$x = 70$$

$$2^{70} + 2^{66} + 2^{65} < 70 - 70 + 2^{70} + 2^{64} + 2^{65}$$

$$\frac{70 - 70}{0} + 2^{70} + \frac{6 \cdot 2^{64}}{3 \cdot 2^{64} + 2^{65}}$$

$$2^{\frac{x}{64}} + 3 \cdot 2^{\frac{65}{64}} - 2^{\frac{64}{64}} x < 70 - x$$

$$2^{\frac{x}{64}} + 2^{\frac{66}{64}} + 2^{\frac{65}{64}} - 2^{\frac{64}{64}} x < 70 - x$$

$$2^{\frac{x}{64}} + 2^{\frac{66}{64}} + 2^{\frac{65}{64}} < 2^{\frac{64}{64}} x$$

$$2^{\frac{x}{64}} + 2^{\frac{66}{64}} + 2^{\frac{65}{64}} < x \rightarrow x \geq 64$$

$$2^{\frac{x}{64}} \leq x - 6$$

$$x = 64 \quad 2 < 58$$

$$x = 65 \quad 2 < 59$$

$$x = 70 \quad 2 < 64$$

$$64 < 64 \text{ - не в.}$$

$$2^{\frac{70}{64}} + 3 \cdot 2^{\frac{65}{64}} < 70 + \left(2^{\frac{64}{64}} - 1\right) 70$$

$$2^{\frac{70}{64}} + 3 \cdot 2^{\frac{65}{64}} < 70 \cdot 2^{\frac{64}{64}}$$

$$2^6 + 8 < 70$$

$$70 < 70$$

64 65 66 67 68 69

~~64~~

~~65~~

$$2^{\frac{63}{64}} + 2^{\frac{66}{64}} + 2^{\frac{65}{64}} < 2^{\frac{64}{64}} \cdot 2^{\frac{64}{64}}$$

$$2^{\frac{63}{64}} + 2^{\frac{66}{64}} + 2^{\frac{65}{64}} < 2^{\frac{70}{64}} - 2^{\frac{64}{64}} + 70 - 63$$

$$2^{\frac{63}{64}} + 3 \cdot 2^{\frac{65}{64}} < 63 \cdot 2^{\frac{64}{64}} + 70 - 63$$

$$2^{\frac{63}{64}} + 6 \cdot 2^{\frac{64}{64}} < 63 \cdot 2^{\frac{64}{64}} - 7$$

$$x \geq 70$$

$$2^{\frac{x}{64}} + 2^{\frac{66}{64}} + 2^{\frac{65}{64}} < 2^{\frac{64}{64}} x$$

⑤

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 6|y| + 9 = a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

1) $x \geq 0$

1.1) $y-3 \geq x$

$$\begin{cases} y-3-x + y-3+x = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 12 & y = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

$$x^2 - 8x + 16 + 9 = a$$

$$b > 0$$

$$64 - 64 - 36 + 4a > 0$$

$$4a > 36$$

$$a > 9$$

1.2) $y-3+x \leq 0$

$$y-3 < -x$$

$$-y+3+x + y+3-x = 6$$

$$\begin{cases} (-x-4)^2 + (-y-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 + 12y - 4x = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg y$$

$$y^3 \lg x = y^2 \lg y \cdot x \lg x$$

$$y^3 \lg x - 2 \lg y = x \lg x$$

$$y \lg \frac{x^3}{y^2} = x \lg x$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = x \lg x$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2 \lg y$$

$$\lg x \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \lg y$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$5 \lg x \lg y - 2 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$\lg x (3 \lg y - \lg x) = 2 \lg^2 y$$

$$\lg x \cdot \lg \frac{x^3}{y^2} = \lg y^2 \cdot \lg y$$

$$\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{\lg y} = y^2 \lg y$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x(x-4) - 3y(y-4) + 2xy = 0$$

$$x(x-4) + xy = 3y(y-4) + 3xy$$

$$x(x+y-4) = 3y(y+x-4)$$

$$(x+y-4)(x-3y) = 0$$

$$I \quad x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\lg \left(\frac{y^4}{3}\right) \cdot \lg 3y = \lg 3y^2 \cdot \lg y^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & x > 0 \\ & y > 0 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(x-4) + xy &= 3y(y-4) + 3xy \\ x(x+y-4) &= 3y(y+x-4) \\ (x+y-4)(x-3y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = (y^2)^{\lg x + \lg y} \quad \bigg| : (y^2)^{\lg x}$$

$$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y}$$

I ~~$x = 3y$~~ ~~$x = 3y$~~

I $x = 3y$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} &= y^{2\lg 3y^2} \\ \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} &= (y^2)^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg y} \quad \bigg| : (y^2)^{\lg 3y} \\ \left(\frac{y^2}{3}\right)^{\lg 3y} &= y^{2\lg y} \end{aligned}$$

$$\lg 3y (\lg y^2 - \lg 3) = 2\lg y \cdot \lg y$$

$$(\lg 3 + \lg y)(2\lg y - \lg 3) = 2\lg^2 y$$

$$\lg y = t$$

$$(t + \lg 3)(2t - \lg 3) = 2t^2$$

$$2t^2 - 2t\lg 3 + 2t\lg 3 - \lg^2 3 = 2t^2$$

$$t = \frac{\lg^2 3}{2\lg 3 - \lg 3} = \frac{\lg 3 \cdot \lg 3}{\lg 3} = \lg 3 \Rightarrow \lg y = \lg 3$$

$$y = 3$$

$$x = 9$$

$$\text{II} \quad x = 4 - y$$

$$\left(\frac{y^3}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg y}$$

$$\lg(4-y) (3 \lg y^3 - \lg(4-y)) = 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg(4-y) \lg y + \lg^2(4-y) = 0$$

$$\lg y = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \lg^2 3 = 0 - \text{нет} \Rightarrow \lg y \neq 0$$

$$2 - 3 \frac{\lg(4-y)}{\lg y} + \left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y}\right)^2 = 0 \quad \frac{\lg(4-y)}{\lg y} = t$$

$$2 - 3t + t^2 = 0$$

$$(t-2)(t-1) = 0$$

$$\text{I) } t = 2$$

$$\lg(4-y) = 2 \lg y$$

$$\lg^2(4-y) = 0$$

$$4-y = 1$$

$$y^3 - 4y^2 + 1 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + 1 = 0$$

$$4-y = y^2$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{II) } t = 1$$

$$\lg(4-y) = \lg y$$

$$4-y = y$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

$$x = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

~~3375~~ 5 5 5 A_3^9

3 3 3 A_3^5

3 3 A_1^5 A_1^4

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

11 A_2^2

111 A_3^3

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

$A_3^2 (A_2^5 + A_1^5 \cdot A_1^4) = \frac{8!}{3!5!} \left(\frac{5!}{3!2!} + 5 + 4 \right) =$

② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x = 2 \cdot 8(2.5 + 9) =$

$\cos 11x - \cos 3x = \sin 11x - \sin 3x$

$= 7 \cdot 8 \cdot 13 = 1064$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 56 \\ + 19 \\ \hline 504 \\ 56 \\ \hline 1064 \end{array}$$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$2 \sin 14x \cdot \sin 8x - 2 \sin 8x \cos 14x = \sqrt{2} \cos 14x$

$2 \sin 8x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$

$2 \sin 4x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 8x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$

$2 \sin 4x \cdot \sin \left(\frac{7x - \pi}{4} \right) = \cos 14x$

$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(11x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$

$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos 14x + \cos \left(11x - \frac{\pi}{4} \right)$

$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \left(\frac{26x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \left(\cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right)$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\sin 7x - \cos 7x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$\text{I} \quad \sin 7x = \cos 7x$$

$$\sin 7x = 0$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$\text{II} \quad 2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$2 \sin 4x = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-\sin 4x + \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$11x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi k}{11}$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$