

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13

Ограничения $x \geq 0$
 $y \geq 0$ (*)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\log x} = y^2 \log xy \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 7y + 20 = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 7y + 20 = 0$$

$$y = 0 \quad y = 2$$

$$-2x^2 - 2x^2 - 4x + 12x = 0$$

~~$x = y^2$~~

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4y^2 + 16y + 16 + 16y^2 - 48y = \\ &= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{2y+4-2y+2}{2} \quad x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{2y+4+2y-2}{2} \quad x_2 = 2y+1$$

$\left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=x \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=x \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} x=2y+1 \\ y=x \end{array} \right.$
 $\left\{ \begin{array}{l} x=2y+1 \\ y=x \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 3 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= \sqrt{3} \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} y &= -1 \text{ ne } y=3 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} x &= -1 \\ y^2 - 2y - 1 &= 0 \quad D = 12 \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} y &= x \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$y_1 = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } x = 3 + 2\sqrt{5} \\ y_1 = 1 - \sqrt{5} \\ y_2 = 1 + \sqrt{5} \end{array} \right. \quad \text{for } x = 3 - 2\sqrt{5}$$

$$y^5 \lg x - 2 \lg x \cdot y = x \lg b$$

прологорифирует ① ур.
по основанию

$$\lg y \cdot (5 \lg x - 2 \lg x - 2 \lg y) = \lg^2 x$$

$$\lg y \cdot 3 \lg x - 2 \lg^2 y = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

пусть $g \circ f = f$
тогда

$$t^2 - 3t \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$D = \text{alg}_Y - \text{alg}_Y^2 = 0$$

по теореме Вейля

$$T_1 = 2 \lg n$$

$$t_2 = 0.94 \text{ s}$$

$$l_{gx} = l_{gy}$$

1. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$\uparrow X = \omega$$

$$x = y^2$$

гипотеза

$$g = 18 - 12 - 25 + 36 = 0$$
$$-19 \neq 0$$

$$9 - 6\sqrt{3} - 12 - 8 + 12\sqrt{3}$$

$$6\sqrt{3} = 12$$

Здравствуй

Ответ:

~~(3,3)~~ ~~$(3, \sqrt{3})$~~

1. (528)

~~272~~

2, 140



N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad \cos 7x = 0 \quad -2 \sin 4x = \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x \quad | : -2$$

$$\sin 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi l \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{11} + \frac{2\pi l}{11} \quad l \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{11} + \frac{2\pi l}{11}, l \in \mathbb{Z}$$

N3

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 + 12y = 0$$

$$y = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$x = 0$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 - 2x - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 - 4x + 12x = 0$$

$$x^2 + x - 3x = 0$$

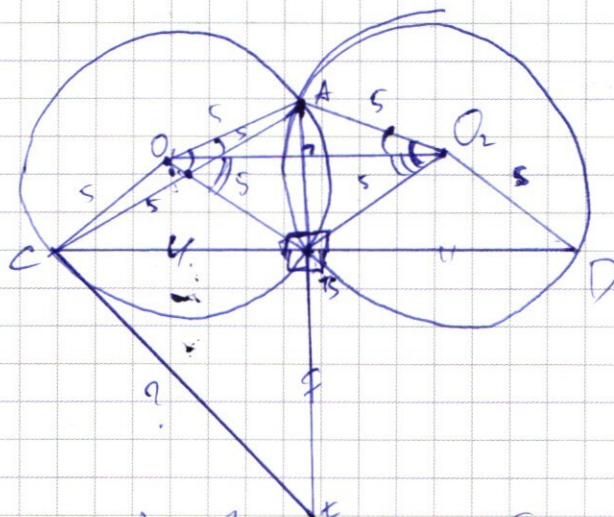
$$x = 0 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 2$$

Ответ: (2, 2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано
 $R = O_1A = O_2A = S$
 $BF = BD$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD$
 а) $CF = ?$



- а)
- 1) допустим, что CA не диаметр; тогда по теореме $AB \perp O_1O_2$
 - 2) т.к. все еще $\triangle O_1AB = \triangle O_2AB$ по 4 сторонам AB общ. и равны. $\angle AO_1B = \angle AO_2B$
 - 3) $\triangle AO_1B$ - рав. т.к. все стороны попарно равны, но т.к. диагональ перпендикулярна

- 4) ~~т.к. $\triangle O_1AB = \triangle O_2AB$~~
 $\angle AO_1B = \angle AO_2B$
 аналогично
 $\angle AO_2O_1 = \angle O_1BC$, но
 $\angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1$, т.к. $\triangle AO_1O_2$ р/б.
 значит $\triangle CBO_1 = \triangle O_2DB$.

- 5) значит $CB = DB$, а также AB медиана $\triangle ABC$
 $\angle COB = \angle BO_2D$
 значит $\triangle CO_1A = \triangle AO_2D$
 по 2 сторонам и углу между ними
 $\angle AO_1C = \angle AO_2B + \angle BO_2C$
 $\angle AO_2D = \angle AO_1B + \angle BO_1D$

- 6) $CA = AD$ в $\triangle ACD$
 значит AB медиана
 в р/б $\triangle$ и вершины O_1 и O_2
 биссектриса и высота
 таким образом $AB \perp CD$

7) Знаем $\angle ABC = 90^\circ$ опирается на диаметр значит AC диаметр
 $AC = 2R = 10$

8) уг $\triangle ACD$ по теореме Пифагора
 $AD^2 = 10^2 + 10^2$
 $AD = \sqrt{2} \cdot 10$ значит $BC = 5\sqrt{2}$

9) в $\triangle CBF$
окружность
по теореме Пифагора
 $CF^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$
 $CF = 10$

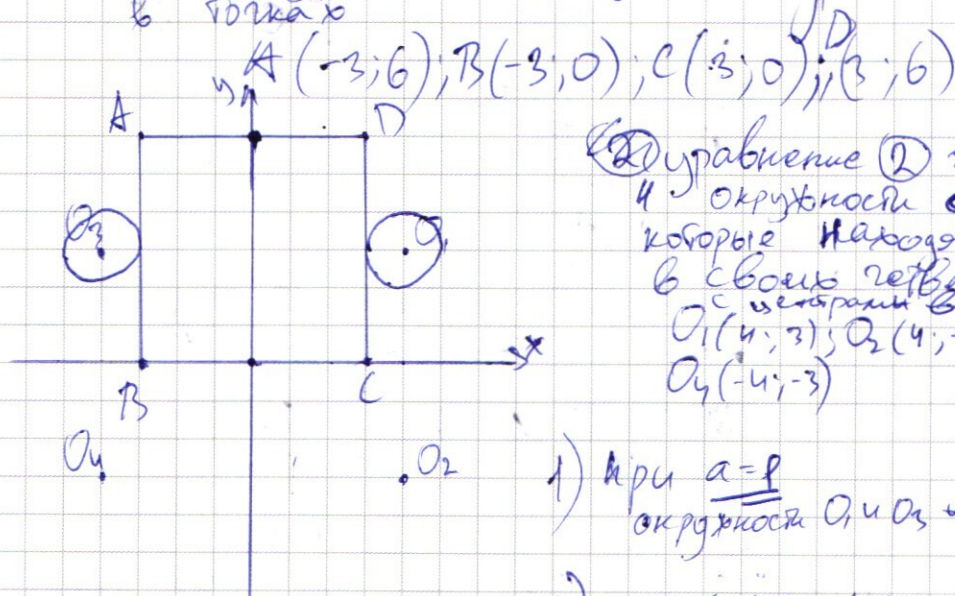
10)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

1) первое уравнение задаёт квадрат с вершинами в точках



2) уравнение (2) задаёт 4 окружности с $R = \sqrt{a}$, которые находятся только в своих четвертях с центрами $O_1(4;3); O_2(4;-3); O_3(-4;3); O_4(-4;-3)$

3) при $a=0$

Окружности O_1 и O_2 пересекают $ABCD$ в точках $A; B; C; D$, а O_1 и O_2 касаются в точках B и C .

1) при $a=1$ окружности O_1 и O_2 касаются $ABCD$ в 2х точках.

2) при $1 < a < 10$

Окружности O_1 и O_2 не пересекаются $ABCD$ в ни одной точке, а O_1 и O_2 имеют общие точки.

4) при $a=10$ и $a=25$

Окружности будут пересекаться с квадратом в 4 точки.

5) при $a=25$

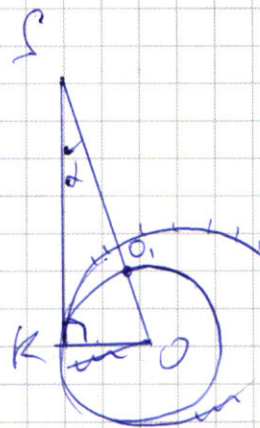
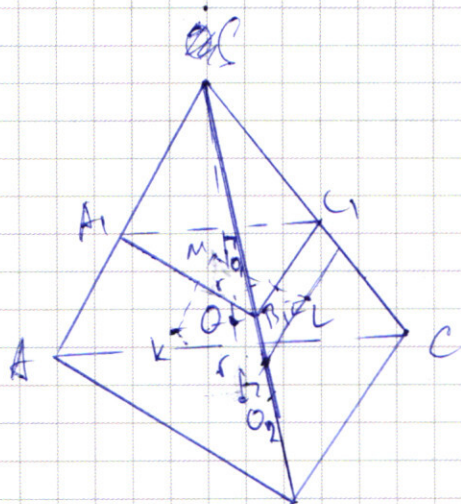
Окружности O_1 и O_2 касаются пересекать квадрат в точках $(0;6)$ и $(0;0)$, а O_1 и O_2 в точке $(0;0)$ при

Ответ: 1; 25

6) при $a > 25$

Окружности с квадратом не имеют общих точек.

2-1



Similar Δ
 $\Delta A_1 C R_1 \sim \Delta ABC$
 $k = \frac{S_{\Delta A_1 C R_1}}{S_{\Delta ABC}} =$
 $k = \frac{1}{2}$

$$k = \frac{1}{2} \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$$

Пусть $SO_1 = x$
 Тогда $CO_2 = 2x$,
 значит $2x = x$
 $x = \frac{10}{3}$

3) Farga b'n 50k

$$\sin \alpha = \frac{x \cdot x}{x \cdot 36} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{3}$$

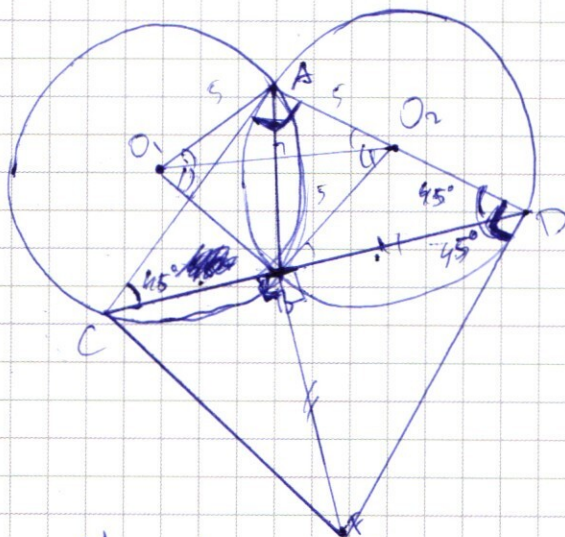
и) $S_L = S_M = S_K$ как касательные к сфере.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано

$R_1 = R_2 = 5$
 $BF = BD$
 $\angle CAD = 90^\circ$
 $BF \perp CD$

$CF = ?$



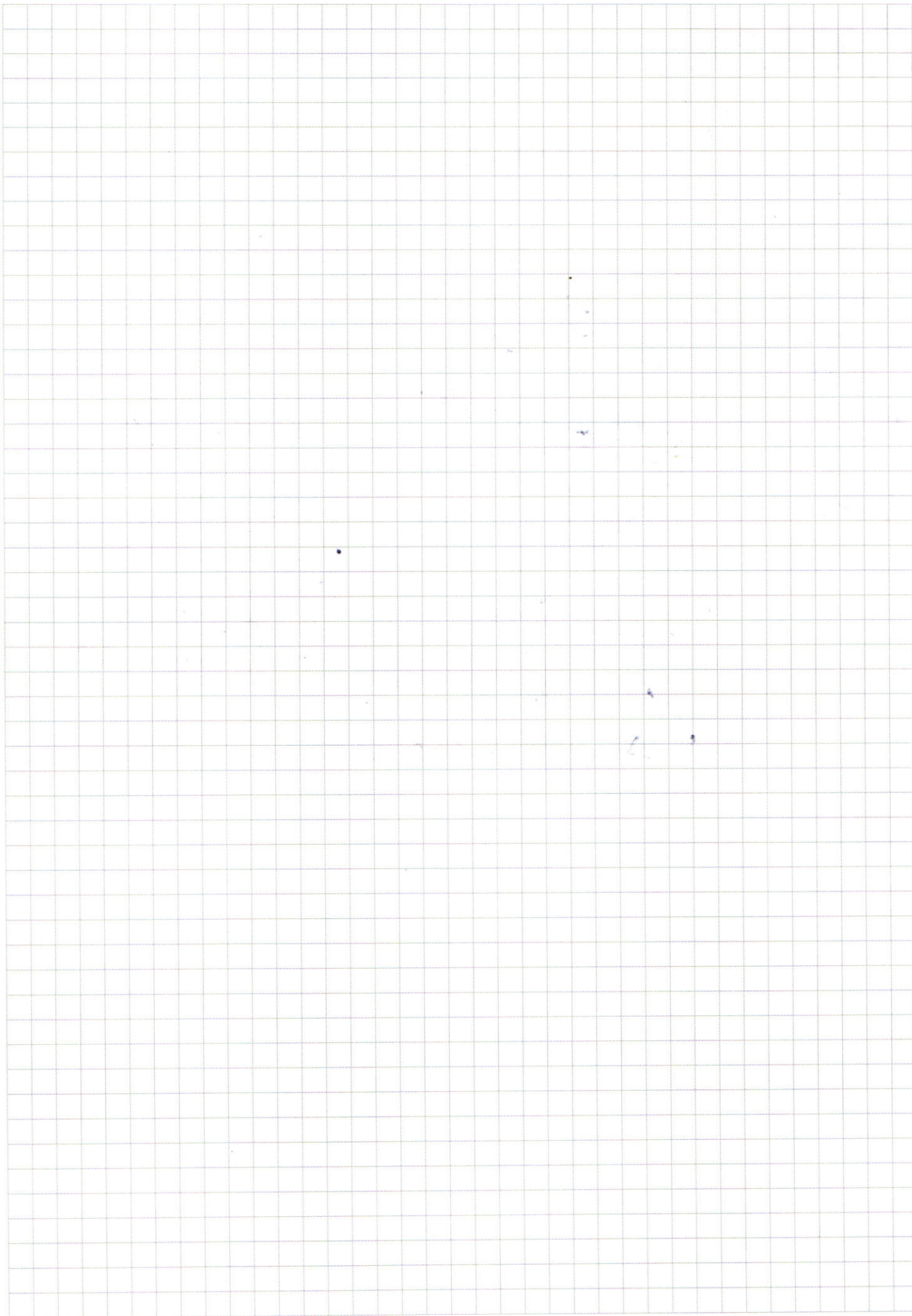
4) $\angle ACB = \angle ADB$
т.к. они опираются
на одинаковые
дуги.

5) $\triangle ACD$ р/б $\angle ACD = 45^\circ$
 $AC = AD$

1) $\triangle O_1AO_2$ р/б.
 $\triangle O_1AO_2$ р/б.
значит
 $\angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1$

2) $\angle O_1O_2B = \angle ACB$
т.к. они опираются на одну дугу.
 $\triangle O_1O_2B$ р/б.
 $\angle O_1O_2B = \angle O_1O_2B$

3) из пункта 1 и 2
следует, что
 $\angle AO_1B = \angle AO_2B$
отсюда следует, что

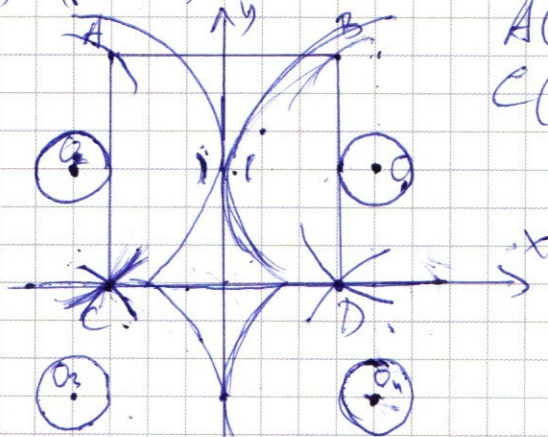


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{4x^2 + 8x + 4} + \sqrt{4y^2 + 8y + 4} = 6$$

№3

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & ① \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & ② \end{cases}$$



наметим график функции,
он будет представлять из себя
квадрат с вершинами в
точках

$$A(-3; 6); B(3; 6); C(-3; 0); D(3; 0)$$

график второй функции
это окружности

с центрами в точках

$$O_1(4; 3); O_2(-4; 3)$$

$$O_3(-4; -3); O_4(4; -3)$$

- 1) при $a < 1$ нет общ. точек с квадратом.
- 2) 2 реш. получаем, когда

$$R = 1; a = 1, \text{ тогда}$$

Окр O_2 и O_1 касаются
квадрата, а O_3 и O_4 не
будут иметь с ним общих точек

- 3) когда $1 < a < 10$
4 реш.

- и) когда $a = 10$

и реш. Окр O_2 и O_1 пересекут квадрат
в точках C и D а O_3 и O_4 пересекут
в точках A и B.

- 5) когда $a > 10$

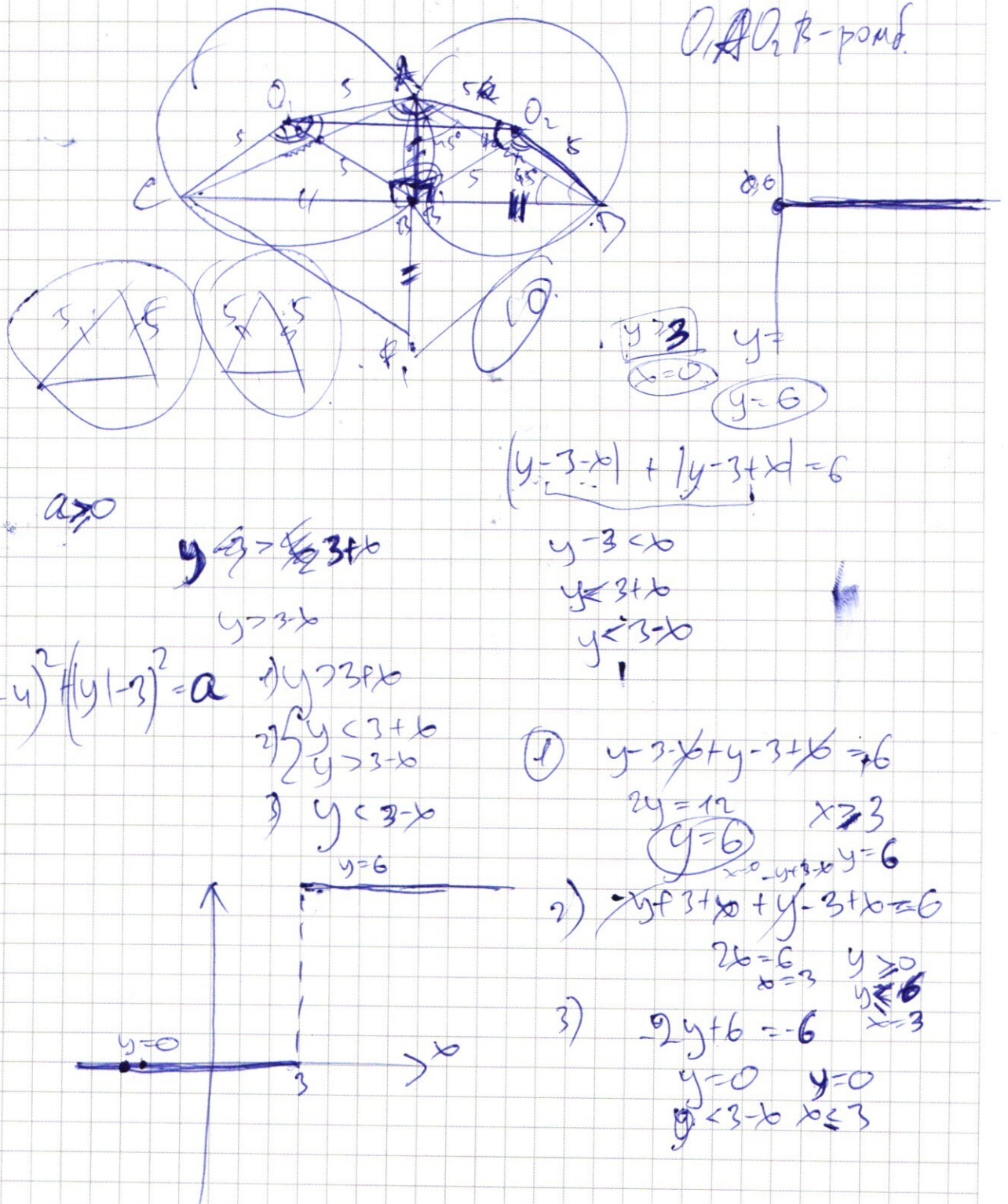
Окруж. O_1 и O_2 не будут иметь общих
точек с квадратом.

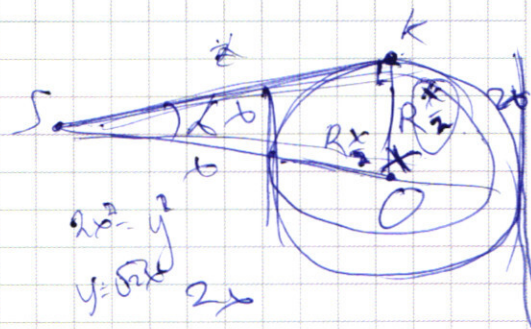
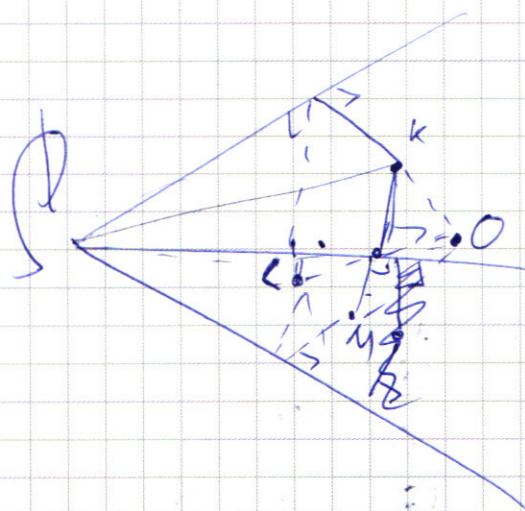
но Окруж. O_3 и O_4 будут иметь 2 общие
точки с квадратом до момента

- 6) при $a = 100$

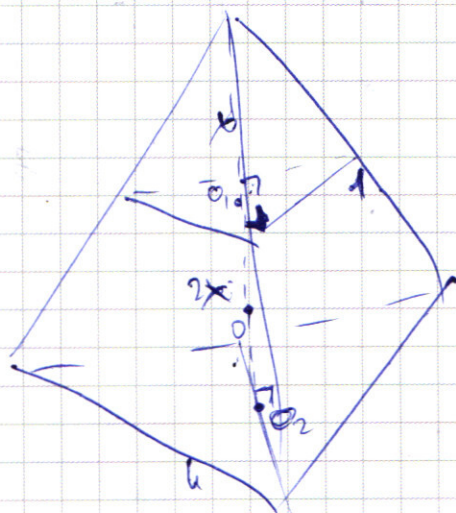
окружности O_3 и O_4 пересекут
график в точку A и B
 $f(x) = 4; 149$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





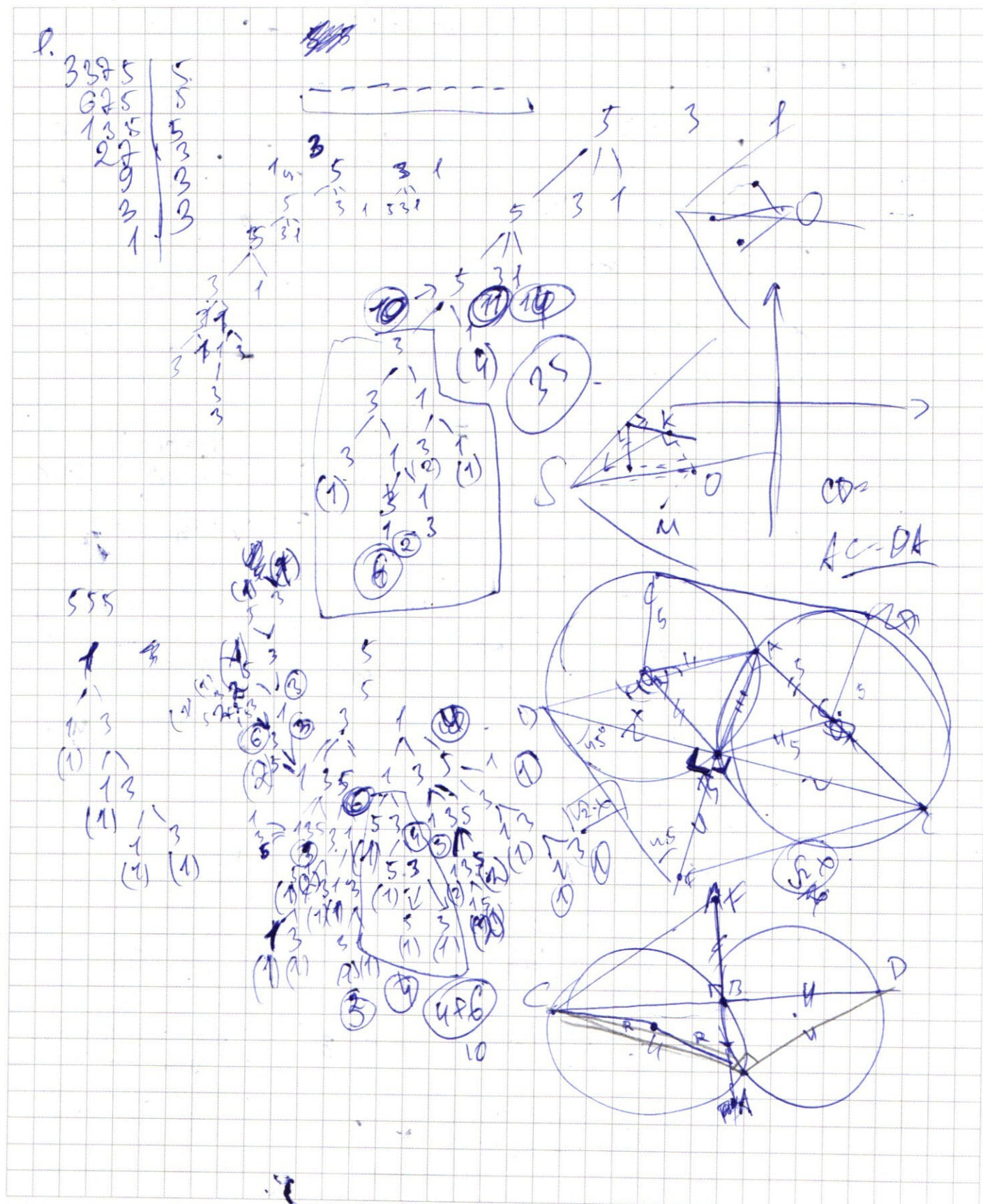
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x \cdot \pi}{R_{3x} \cdot 3}$$

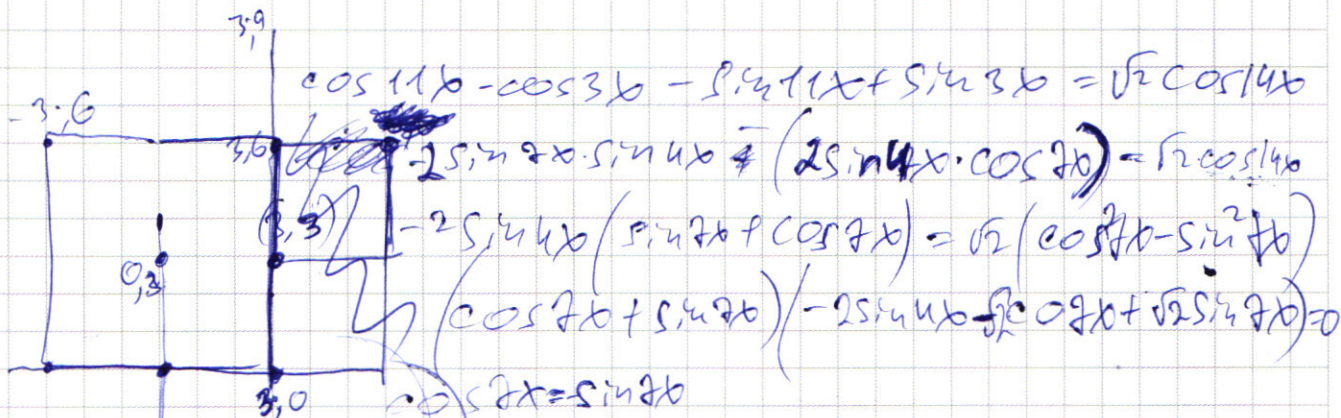


$$\frac{S_{\Delta 1}}{S_{\Delta 2}} = k^2$$

$$k = \frac{1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\begin{aligned} \cos 2x &= \sin 2x \\ \tan 2x &= 1 \\ \tan 2x &= -1 \\ 2x &= \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x &= \frac{3\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg x - t_1 &= 2 \lg y & \lg x &= 2 \lg y & x &= y^2 \\ t_2 &= \lg y & \lg x &= \lg y & x &= y \\ 3 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y &= \lg^2 x & 3x &= \frac{y}{4} & x &= \frac{y}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \lg x - 2 \lg x \lg y &= x \lg x & x &= \frac{5y}{4} \\ \lg y (3 \lg x - 2 \lg y) &= \lg^2 x & x &= \frac{5y}{44} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x(y+2) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 = 4y^2 + 16y + 16 - 2xy + 12y$$

$$16y^2 - 32y + 16$$

$$x_1 = \frac{2y+4-2y+2}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = \frac{2y+4+2y-2}{2}$$

$$x_2 = 2y+1$$

$$\frac{+2 \sin 4x}{2} = \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x \cdot 1/2$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin 4x$$



$$\begin{aligned} 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k &= \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x - 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k &= \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \lg x \cdot 10 \lg x &= y^2 \lg x + 2 \lg y \\ y^2 \lg y &= \end{aligned}$$

$$y^2 \lg x \cdot 10 \lg x = y^2 \lg y$$

$$\begin{aligned} x &\neq 0 \\ x &> 0 \\ xy &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 3 &= 2 \lg 3 \\ \frac{1}{3} \lg 3 &= y \\ y \lg 3 &= y^2 \lg y \cdot \lg 3 \\ y^2 \lg 3 - 2 \lg y &= 3 \end{aligned}$$