МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФГ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64}-1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

№ 7

заметим что при $x=6$ $2^6+3\cdot 2^{65}=70-6+3\cdot 2^{65}$ -

обе части равны.

при $x=70$ $32\cdot 2^{65}+3\cdot 2^{65}=70+2^{65}\cdot 35-70$ -

опять равны

Больше общих точек не будет в силу выпуклости ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~
2^x (в прямой имеет не более 2-х общих точек) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходят все $x\in[7,69]$

Для каждого из них подходящих y:

$(2^{64}-1)x+70-2^x-3\cdot 2^{65}$

Суммир. по всем x получим

$(2^{64}-1)\cdot(7+8+\ldots+69)+70\cdot 63-2^7-2^8-\ldots-2^{69}-3\cdot 2^{65}\cdot 63=$

$=(2^{64}-1)\cdot(2394+4410-\dfrac{2^7\cdot(2^{63}-1)}{2-1}-189\cdot 2^{65}=$

$=2^{65}\cdot(1197-189-32)-2144=976\cdot 2^{65}-2144$

ответ.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 3375 на простые множители. $3375=5^3\cdot 3^3$

5^3 можно получить только как произведение 3-х пятёрок, а 3^3 - либо как $3\cdot3\cdot3$, либо как $3\cdot 9$

В первой ситуации нужно выбрать 3 места для троек (это C_8^3 способа), потом для 3-х пятёрок C_5^3, на оставшиеся места пойдут единицы по умолчанию.

Итог: $C_8^3\cdot C_5^3$

Во второй ситуации выбираем 3 места для пятёрок (C_8^3 способа), потом одно место для троек (C_5^1 способа) и одно для девяток (C_4^1 способа)

Итог: $C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^1$

Итого: $C_8^3\cdot C_5^3+C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^1$

Ответ: $C_8^3\cdot C_5^3+C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^1$

№3

$$\begin{cases}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy} \quad (1)\\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \quad (2)\end{cases}$$

ОДЗ: $x,y>0$

преобразуем (2) уравнение:

$x^2-2xy-3y^2-4(x-3y)=(x-3y)(x+y)-4(x-3y)=$

$=(x-3y)(x+y-4)$

преобразуем (1) уравнение:

$\lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right)=\lg\left(y^{2\lg xy}\right) \Leftrightarrow \lg x\cdot(5\lg y-\lg x)=\lg xy\cdot \lg y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\lg^2 x + 5\lg x \cdot \lg y = 2\lg x \cdot \lg y + 2\lg^2 y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lg x - \lg y)(\lg x - 2\lg y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y^2 \end{array}\right. \\ (x+y-4)(x-3y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2y-4)(-2y)=0 \\ (y^2+y-4)(y^2-3y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;2)$; $(9;3)$; $\left(\frac{9}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}\right)$

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

1) $\cos 11x - \cos 3x = 2\sin 7x \cdot \sin(-4x)$

2) $\sin 3x - \sin 11x = 2\sin(-4x)\cos 7x$

3) $\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x +$
$+ \sin 7x)$

получим: $2\sin(-4x)(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) \cdot$
$\cdot (\cos 7x + \sin 7x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad (1) \\ 2\sin(-4x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) \quad (2) \end{array}\right.$$

продолжение на странице №3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1): $\sin 7x + \cos 7x = 0$, $\operatorname{tg} 7x = -1$, $7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\underline{x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}}$

(2): делим обе части на 2:

$\sin(-4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 7x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 7x)$, $\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi L, L \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi L, L \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi L}{11}, L \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

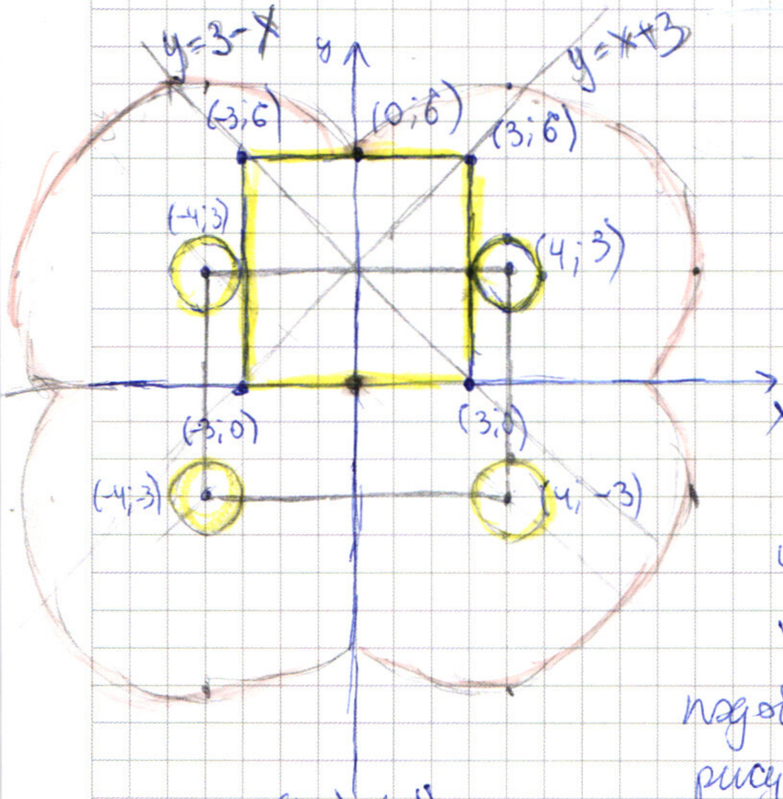
Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$;

$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi L}{11}, L \in \mathbb{Z}$

№5

Изобразим (1) и (2) в осях x, y: $\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 & (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a & (2) \end{cases}$



(1) усл. равнос. системе:

$$\begin{cases} x=3, \text{ при } 3-x \le y \le x+3 \\ x=-3, \text{ при } x+3 \le y \le 3-x \\ y=0, \text{ при } x+3 \ge y,\ 3-x \ge y \\ y=6, \text{ при } x+3 \le y,\ 3-x \le y \end{cases}$$

(2) задает 4 окружн. с центрами в точках $(\pm 4; \pm 3)$ и радиусом $\sqrt{a}$ $\Rightarrow$ нам подойдет положения на рисунке и $a=1$, но при $a=25$ ($\text{т.к. } 3^2+4^2=5^2$) мы получим

2-е точки $((0;6)$ и $(0;0))$ и 4 куска окружностей

отмеченные желтым цветом

с 2-мя общими точками $(0;0)$ и $(0;6)$.

т.е. при увел. a больше пересечений не будет, при $a<1$ - 2O пересечений тоже нет.

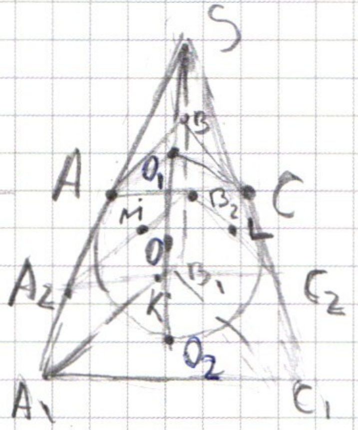
При $1<a<25$ пересечений слишком много

Ответ: 1; 25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Из условия следует, что нам достаточно изобразить пирамиду (ABC и $A_1B_1C_1$ – сечения, площадью 1 и 4)



(·) O_1, O, O_2 лежат на высоте

Из соотношения площадей $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $K = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \Rightarrow$ (коэфф. подоб.)

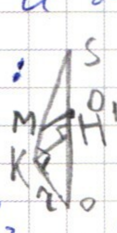
$\Rightarrow O_1O_2 = 2r$, а $SO_2 = 2O_1O_2 = 4r \Rightarrow SO = 3r$, $OK = r$,

ΔKOS – прямоугольный, т.к. K – точка касания, тогда

$\sin\angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{1}{3}$

при этом, $A_2B_2C_2$ – сечение, проходящее через M, L, K ∥ основаниям и все треугольники подобны. Рассмотрим ΔSOK:



HK – радиус $\Delta A_2B_2C_2$, O_1M – радиус ΔABC, $SK = \sqrt{8r}$ (Пифагор), $HK = \frac{\sqrt{8r}}{3}$,

$HS = \frac{8r}{3}$, $SO_1 = 2r \Rightarrow \frac{O_1M}{HK} = \frac{SO_1}{HS} =$

$= \frac{2r}{\frac{8r}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow K$ (коэфф. подоб.) $\Delta A_2B_2C_2$ и $\Delta ABC = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta A_2B_2C_2} = 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{9}$

Ответ: $\arcsin\frac{1}{3}$; $\frac{16}{9}$

№7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$$

заметим, что при $x=6$ $2^6 + 3\cdot 2^{65} = 70 - 6 + 3\cdot 2^{65}$ – обе части равны,

при $x = 70$ $32\cdot 2^{65} + 3\cdot 2^{65} = 70 + 2^{65}\cdot 35 - 70$ – опять равны.

Больше общих точек не будет в силу выпуклости 2^x (в прямой имеет не более 2-х общих точек) $\Rightarrow$ подходят все $x \in [7; 69]$

Для каждого из них подходящий y:

$(2^{64}-1)x + 70 - 2^x - 3\cdot 2^{65}$

суммир. по всем x получим:

$(2^{64}-1)\cdot(7+8+\ldots+69) + 70\cdot 63 - 2^7 - 2^8 - \ldots - 2^{69} - 3\cdot 2^{65}\cdot 63 = (2^{64}-1)\cdot 2394 + 4410 - \frac{2^7(2^{63}-1)}{2-1} - 189\cdot 2^{65} =$

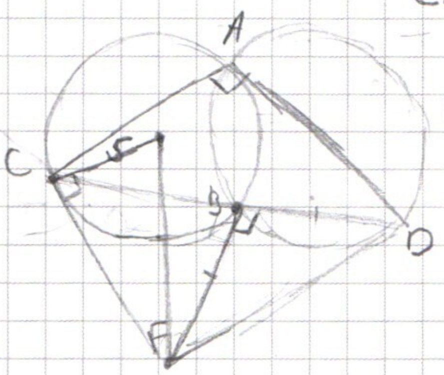
$= 2^{65}(1197 - 189 - 32) - 2144 = 976\cdot 2^{65} - 2144$

Ответ: $976\cdot 2^{65} - 2144$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CB^2 + BF^2$



№1

Разложим число 3375 на простые множители

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$

5^3 можно получ. только как произв. 3-х пятёрок, а 3^3 – либо как $3 \cdot 3 \cdot 3$, либо как $3 \cdot 9$

В первой ситуации нужно выбрать 3 места для троек (это C_8^3 способа), потом для трёх пятёрок C_5^3, на оставшиеся места пойдут единицы по умолчанию.

Итог: $C_8^3 \cdot C_5^3$

Во второй ситуации выбираем 3 места для пятёрок (C_8^3 – способа), потом одно место для 3-ек (C_5^1 способа) и одно для 9-ок (C_4^1 – способа)

Итог: $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$

Итого: $C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$

Ответ: $C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$

№3

ОДЗ: $x, y > 0$

преобразуем 2-е уравнение:

$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4(x-3y) = (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) =$
$= (x-3y)(x+y-4)$

преобразуем 1-е:

$\lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right) = \lg\left(y^{2\lg xy}\right) \Leftrightarrow \lg x \cdot (5\lg y - \lg x) =$
$\lg xy \cdot \lg y^2 \Leftrightarrow -\lg^2 x + 5\lg x \cdot \lg y = 2\lg x \cdot \lg y +$
$+ 2\lg^2 y \Leftrightarrow (\lg x - \lg y)(\lg x - 2\lg y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = y^2 \end{array}\right. \\ (x+y-4)(x-3y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2y-4)(-2y) = 0 \\ (y^2+y-4)(y^2-3y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(2;2)$; $(9;3)$; $\left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

№2

1) $\cos 11x - \cos 3x = 2\sin 7x \cdot \sin(-4x)$

2) $\sin 3x - \sin 11x = 2\sin(-4x)\cos 7x$

3) $\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

получим $2\sin(-4x)(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) \cdot$
$\cdot (\cos 7x + \sin 7x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad (1) \\ 2\sin(-4x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) \quad (2) \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)