

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\sin 9x + \sin 5x) + (\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} - 2 \sin \frac{9x-5x}{2} \sin \frac{9x+5x}{2} - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

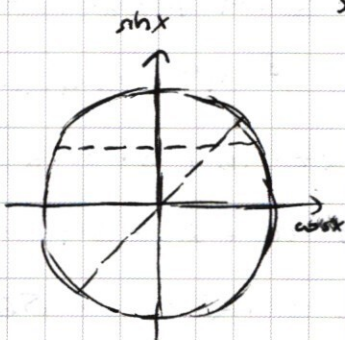
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pi - 7x$$

$$7x =$$



$$2 \sin \frac{7x-2x-\frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{7x+2x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{7x-2x-\frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7x+2x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$9x = \pi + 2\pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$$

ответ:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$$

$$N1 \quad 9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

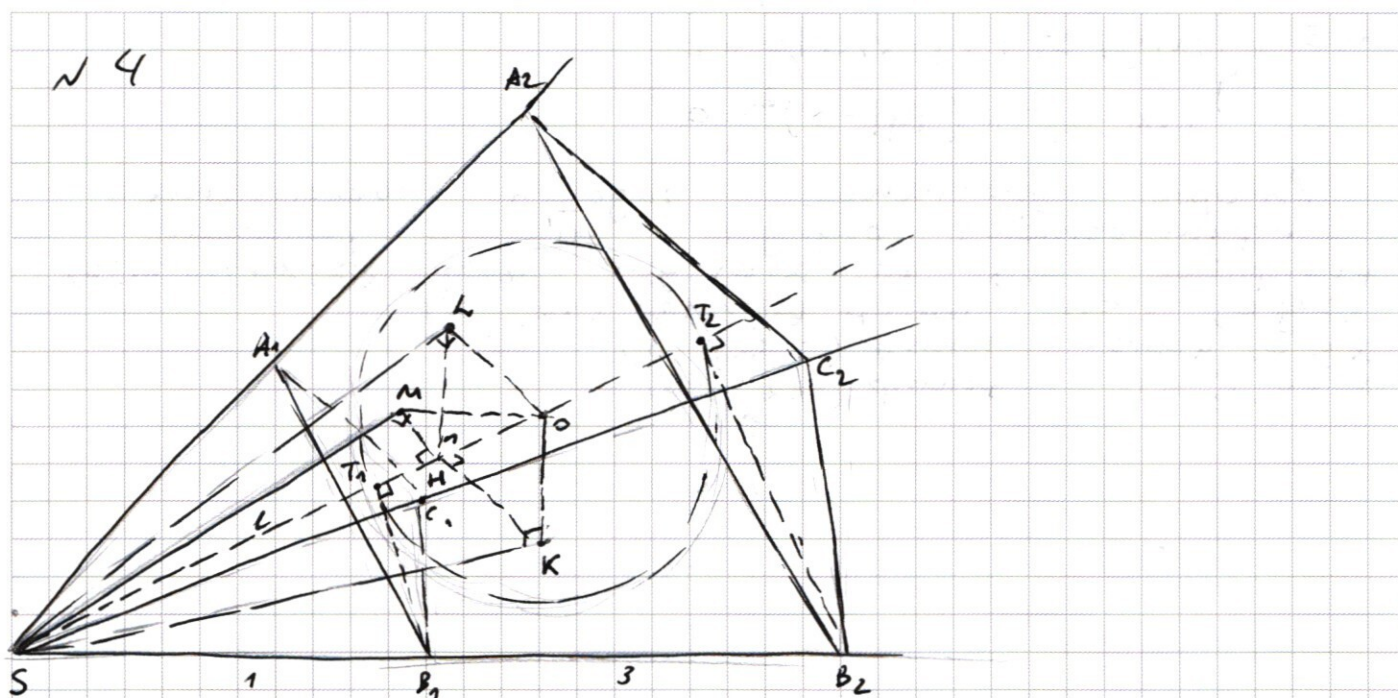
Три цифры восьмизначного числа делятся на 7, значит, в записи этого числа 3 семёрки, их место можно выбрать C_8^3 способами.

Нули в восьмизначном числе могут быть произведением оставшихся 5 цифр (не семёрок) либо одна - девятка, другая делится на 3, либо 3 цифры делятся на 3. Т.е. чисел, делящихся на 3 среди них либо 5, либо 4, либо 3, либо 2, и одна из них - девятка.

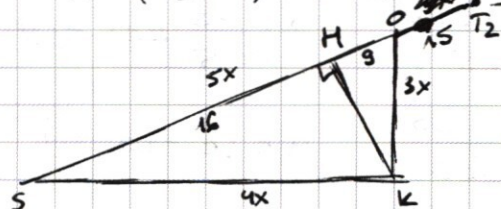
Цифры: 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 Если делится на 3: 3 цифры, не делится на 3: 6 цифр
 кол-во пятизначных чисел:
 5 цифр делится на 3: 3^5
 4 цифры делятся на 3: $C_5^4 \cdot 3^4 \cdot 4$
 3 цифры делятся на 3: $C_5^3 \cdot 3^3 \cdot 4^2$
 2 цифры делятся на 3: C_5^2 одна - девятка, её местоположение - 5 способов, остальные: одна делится на 3, это местоположение - 4 способа,
 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^3$

$$\begin{aligned} \text{Итого: } & C_8^3 \cdot (3^5 + C_5^4 \cdot 3^4 \cdot 4 + C_5^3 \cdot 3^3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^3) = \\ & = \frac{8!}{3!5!} (3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot 4 + 10 \cdot 3^3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^3) = \\ & = 56 (243 + 20 \cdot 81 + 10 \cdot 27 \cdot 16 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 64) = \\ & = 56 \cdot 3 (81 + 20 \cdot 27 + 10 \cdot 9 \cdot 16 + 20 \cdot 64) = \\ & = 56 \cdot 3 (81 + 540 + 1440 + 1280) = 561288 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — треугольники, образующие при пересечении касательных плоскостей сфер на ребрах тригранного угла, T_1 и T_2 — точки касания сфер с плоскостями. Плоскости $(A_1B_1C_1)$ и $(A_2B_2C_2)$ параллельны $\Rightarrow$ бисеканты при пересечении с ребрами тригранного угла подобны треугольникам $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. Площади относятся, как квадраты коэффициентов подобия, значит, поскольку $S_{A_2B_2C_2} : S_{A_1B_1C_1} = 16 : 1$, $A_2B_2 : A_1B_1 = 4 : 1$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \Rightarrow \triangle SA_1B_1 \sim \triangle SA_2B_2$, $SB_1 : SB_2 = A_1B_1 : A_2B_2 = 1 : 4$, $SB_1 : B_1B_2 = 1 : 3$. Поскольку $SO \perp$ плоскости, то точки касания сфер с плоскостями лежат на SO . ($(OT_1) \perp (A_1B_1C_1)$, $(OS) \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow (OT_1) \text{ совпадает с } (OS)$). $B_1T_1 \perp SO$, $B_2T_2 \perp SO$, $\triangle ST_1B_1 \sim \triangle ST_2B_2$. Пусть $ST_1 = l$, радиус сфер — R , $ST_1 : T_1T_2 = SB_1 : B_1B_2$, $l : 2R = 1 : 3$, $l = \frac{2}{3}R$. $\triangle SOK$: $\sin \angle KSO = OK : SO = R : (R + l) = R : (R + \frac{2}{3}R) = 3 : 5$, $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$.

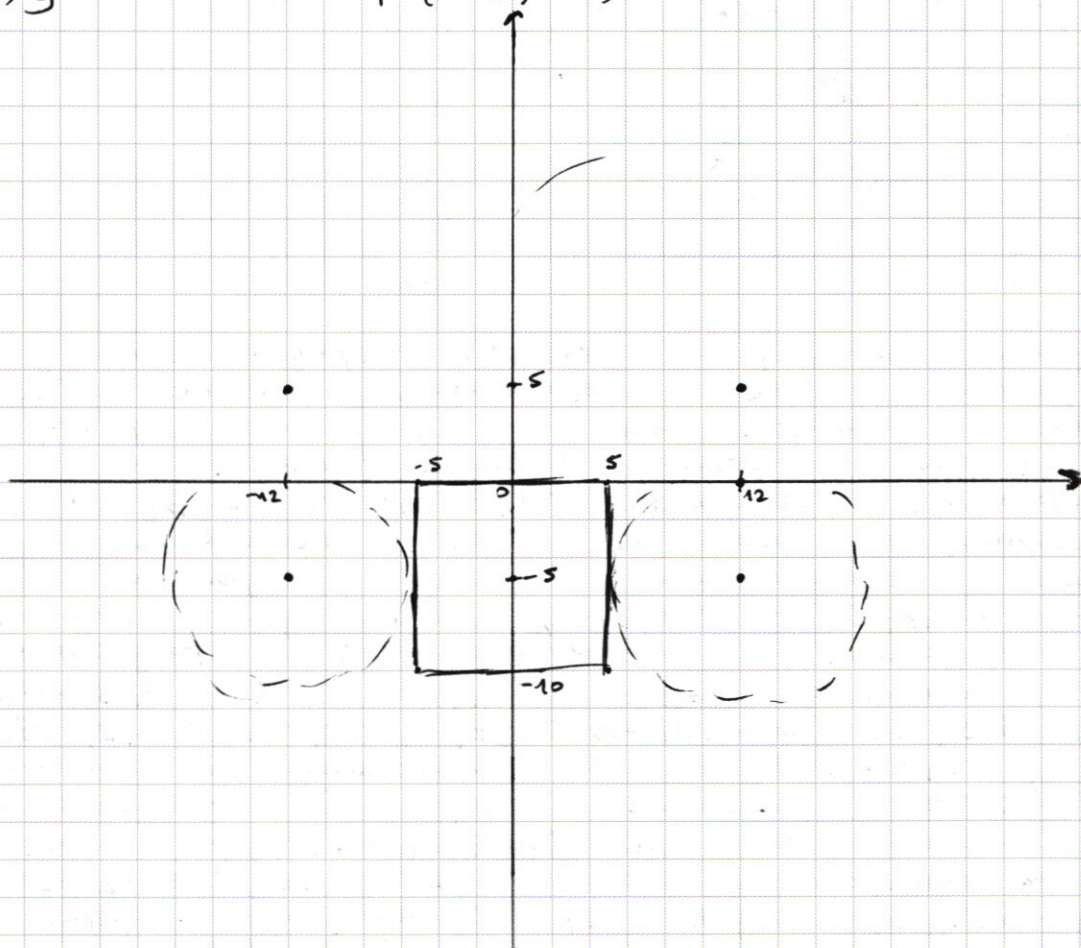


$\triangle SOK$ — прямоугольный, по высоте делим гипотенузу:
 $SH : KO = SK^2 : KO^2 = 16 : 9$
 $T_2O : OS = 1,5 : 2,5 = 3 : 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow SH : ~~HT2~~ ST_2 = 16 : 40 = 2 : 5$

Треугольники SKO , SMO и SKO равны $\Rightarrow$
 их высоты KH , HM и $HK \perp SO \Rightarrow$ прямые
 (KH) , (HM) и (HK) образуют плоскость (KMH)
 перпендикулярную SO . $(SO : SKQ)^2 = S_{KMH} : S_{AKO} =$
 $= 4/25 \quad \frac{S}{16} = \frac{4}{25} \quad S = \frac{64}{25}$

$$\sqrt{S} \cdot \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x-12|)^2 + (|y-5|)^2 = a \end{cases}$$

Второе уравнение задаёт объединение
 4 окружностей с радиусом $\sqrt{a}$ с центрами
 центрами: при $x \geq 0, y \geq 0$ центр $(12; 5)$
 $x \geq 0, y < 0$ центр $(12; -5)$
 $x < 0, y \geq 0$ центр $(-12; 5)$
 $x < 0, y < 0$ центр $(-12; -5)$



Решим первое уравнение и систему:

$$\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5+y-x+5=10 \\ 2y=0 \quad y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ -x+5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5 \\ x < 5 \end{cases} \quad x \in (-5; 5)$$

$$\begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5+y-x-5=10 \\ 2x=10 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+10 > 0 \\ y < 0 \\ y > -10 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$y \in (-10; 0)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+y+5 \leq 0$$

$$y-x+5 \geq 0$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x=10 \quad x=-5$$

$$y \leq 0$$

$$y \geq -10$$

$$x+y+5 \leq 0$$

$$y-x+5 \leq 0$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y=20 \quad y=-10$$

$$x-5 \leq 0 \quad x \leq 5$$

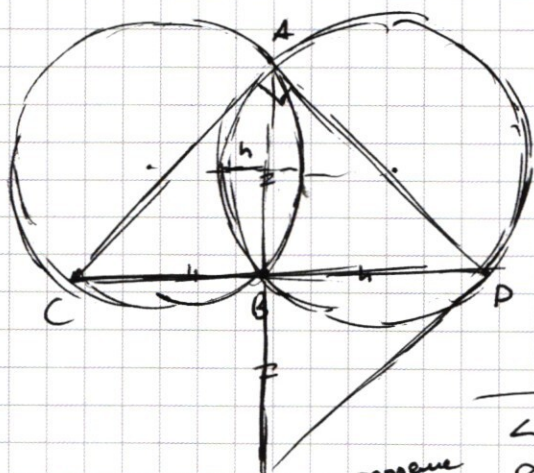
$$-x-5 \leq 0 \quad x \geq -5$$

Это прямоугольник с вершинами $(-5; 0)$, $(5; 0)$, $(5; -10)$, $(-5; -10)$ (точнее, квадрат со стороной 10)

Чтобы было ровно 2 решения, окружность с центром в начале координат должна касаться квадрата. Их радиус должен быть равен 7, $a=49$

$$\sim 3 \quad \begin{cases} (x^2+y^2) - \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

~ 6



Рассм. угловый случай, когда $AB \perp CD$ и F лежит на AB.
 $\angle CAD = 45^\circ$

$$AB / \sin 45^\circ = 2R$$

$$AB \sqrt{2} = 2R$$

$$AB = \sqrt{2} R = 10\sqrt{2} = BF$$

($AB=OB=CB$ как медиана прямоу. треуго.)

$$\angle CAB = \beta, \angle DAB = \alpha$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \cos \beta = \sin \alpha, \sin \beta = \cos \alpha$$

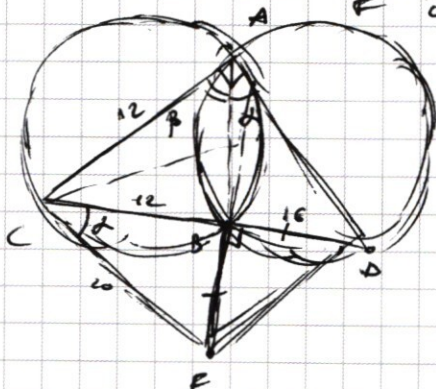
$$\frac{BC}{\sin \beta} = 2R = \frac{BD}{\sin \alpha} \quad \frac{BC}{\cos \alpha} = \frac{BD}{\sin \alpha}$$

$$\frac{BC}{BD} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad \frac{BD}{BC} = \tan \alpha$$

$$\frac{BF}{BC} = \tan \alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha \quad \angle CBF = 90^\circ$$

$$CF = BF / \sin \alpha = \frac{BD}{\sin \alpha} = 2R = 20$$

$$CF = 20$$



$$CF = 20 \quad BC = 12 \quad \cos \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \frac{AC}{\cos \alpha} = 2R$$

$$\frac{AC}{\frac{3}{5}} = 20$$

$$AC = 2R \cos \alpha = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$$

$$AC = BC = 12$$

$$\frac{BD}{BC} = \tan \alpha = \frac{4}{3} \quad \frac{BD}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow BD = 16$$

$\triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle ABC = \beta$

Все углы и некоторые стороны известны, поэтому всю конструкцию можно рассчитать

$$\angle ACD = 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot CF \sin \angle ACF}{2}$$

$$= \frac{12 \cdot 20 \cdot \sin 3\alpha}{2} = \frac{12 \cdot 20 \cdot \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha)}{2}$$

$$= \frac{12 \cdot 20 \cdot \frac{4}{5} (3 - 4 \cdot \frac{16}{25})}{2} = \frac{10 \cdot 12 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{11}{25}}{2}$$

$$= \frac{1056}{25}$$

$$v3 \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} y^{4\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{3\ln x}}$$

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^3}}$$

$$x^{\ln x^{-2}} = y^{\ln \frac{y}{x^3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второе уравнение нужно разложить на множители

$$(x-a)(y-b) = y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$c_1 \text{ или } c_2 = 0$$

$$a_1a_2 = -2$$

$$\text{Пусть } c_1 = 0$$

$$b_1b_2 = -1$$

$$a_2b_1 + b_2a_1 = -1$$

$$c_2b_1 = -4$$

$$c_2a_1 = 8$$

$$c_2b_1 + b_2c_1 = -4$$

$$c_1a_2 + a_1c_2 = 8$$

$$c_2b_1 + b_2c_1 = -4$$

$$\frac{a_1}{b_1} = -2$$

$$\frac{a_1a_2}{b_1b_2} = -2 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} a_2 = b_2$$

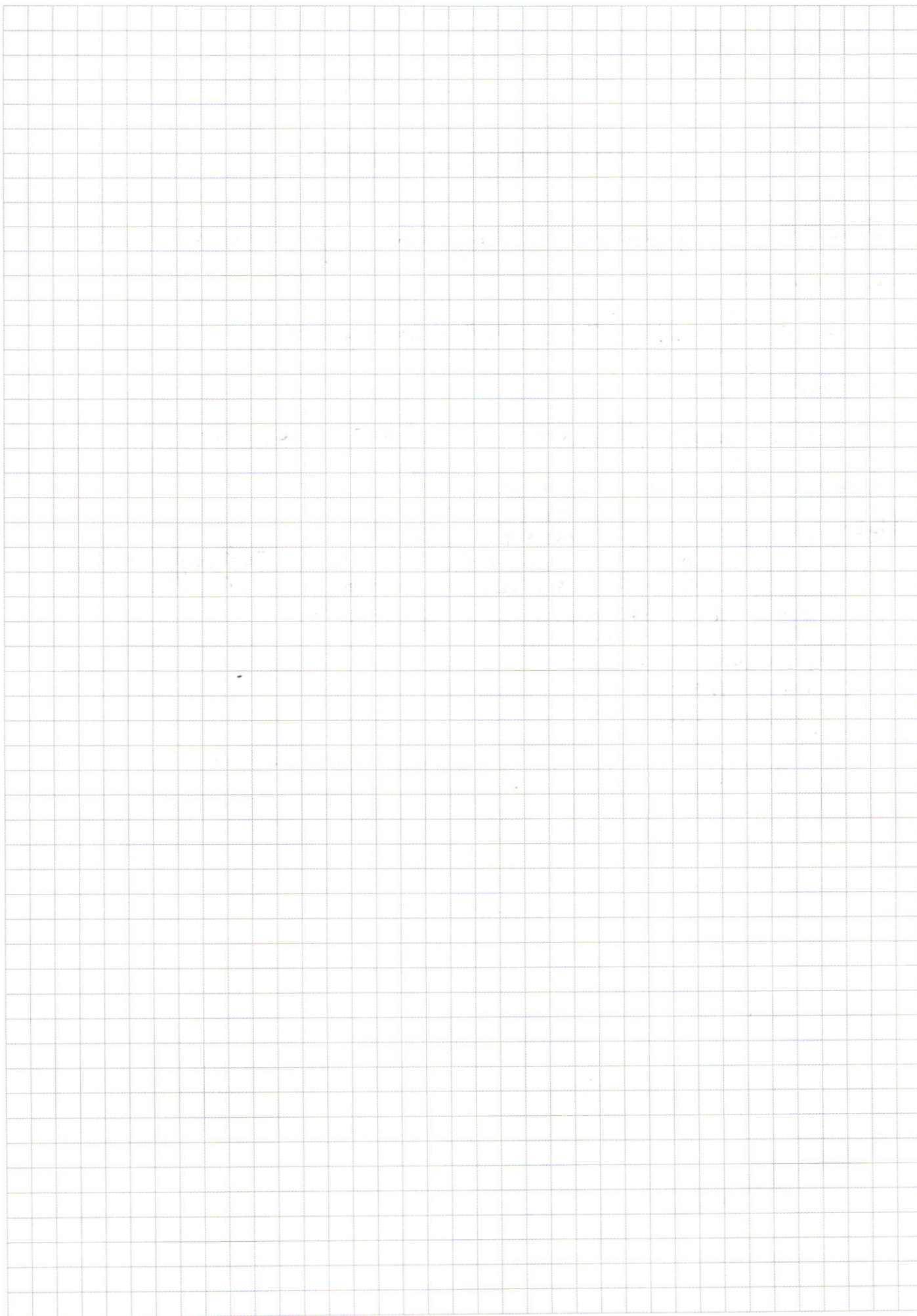
$$a_2b_1 + a_2a_1 = -1$$

$$a_2(a_1 + b_1) = -1$$

$$c_2(a_1 + b_1) = 4$$

$$\frac{a_2}{c_2} = -\frac{1}{4}$$

$$c_2 = -\frac{1}{4}a_2 \text{ или } a_1 + b_1 = 0$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} x+y+5 &> 0 \\ y-x+5 &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+5+y-x+5 &= 10 \\ 2y+10 &= 10 \\ 2y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+5 &> 0 \\ y-x+5 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+5 &> 0 \\ -x+5 &> 0 \\ x &> -5 \\ x &< 5 \end{aligned}$$

$$x \in (-5; 5)$$

$$\begin{aligned} x+y+5 - y+x-5 &= 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y+10 &> 0 \\ y &< 0 \\ y &> -10 \\ y &\in (-10; 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+5 &< 0 \\ y-x+5 &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x-y-5 + y-x+5 &= 10 \\ -2x &= 10 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &< 0 \\ y+10 &> 0 \\ y &< 0 \\ y &> -10 \\ y &\in (-10; 0) \end{aligned}$$

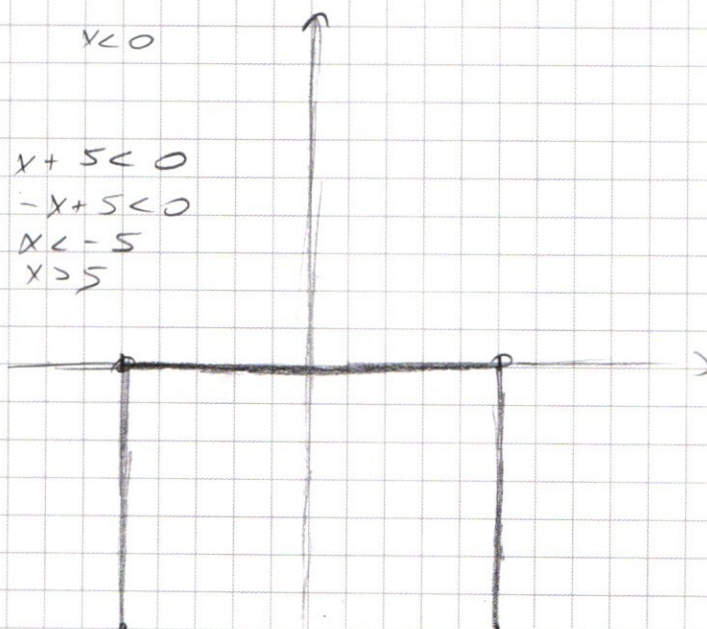
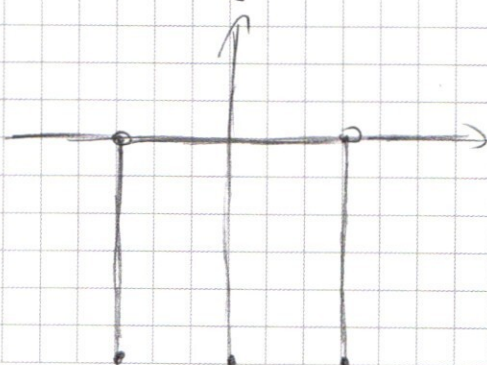
$$\begin{aligned} x+y &< 0 \\ x+y+5 &< 0 \\ y-x+5 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x-y-5 - y+x-5 &= 10 \\ -2y &= 10 \end{aligned}$$

$$y = -5$$

$$x < 0$$

$$\begin{aligned} x+5 &< 0 \\ -x+5 &< 0 \\ x &< -5 \\ x &> 5 \end{aligned}$$



21

$$y^2 - 2y + 1$$

$$2x^2 -$$

$$-2y - 1$$

$$y(y - x - 4)$$

$$2x(-x + 4)$$

$$y$$

$$xy^2$$

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$x^{-2\log_{10} x}$$

$$x^2 - \log_{10} x$$

$$\frac{1}{x^{2\log_{10} x}}$$

$$= \frac{1}{x^{2 \cdot \frac{1}{\log_{10} 10}}}$$

$$26 \mid \frac{2}{33}$$

$$x^{\frac{2}{\log_{10} 10}}$$

$$25 - 64$$

$$\log_{10} y$$

$$\log_{10} 10$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 26 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 26 + 2^{33}x - 2x$$

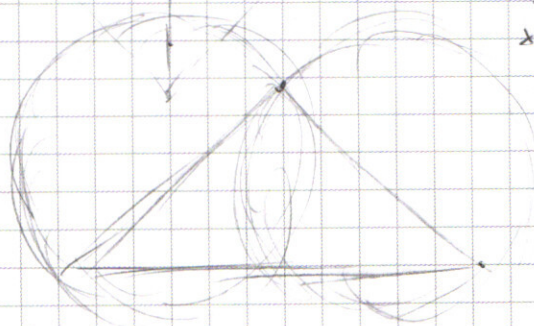
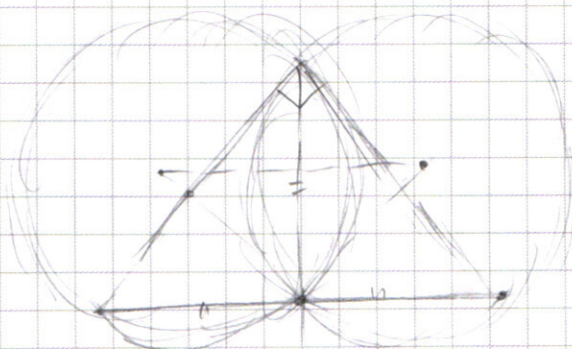
$$26 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$26 + 2^{33}(x - 2) > 2^x - 2x$$

$$38 + 2^{32}x - x > 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{32}$$

$$38 + 2^{32} \cdot x - x > 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{32}$$

$$(32 + 6) + 2^{32}(x - 6) > 2^{x-1} + x$$



$$\begin{array}{r} 272 \\ 44 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \\ 272 \\ \hline 544 \end{array}$$

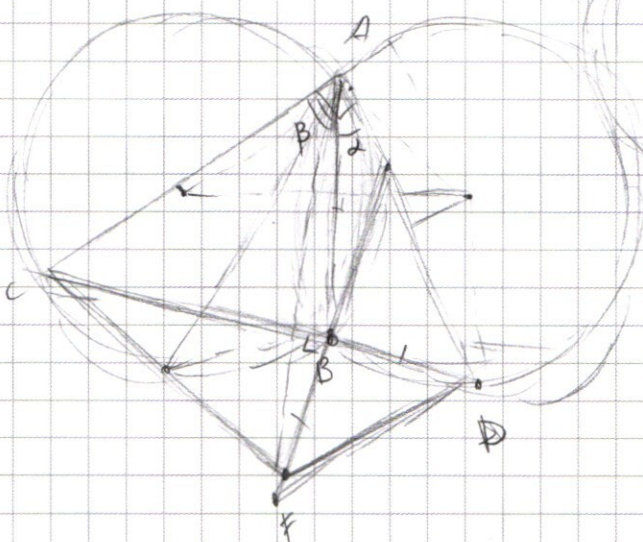
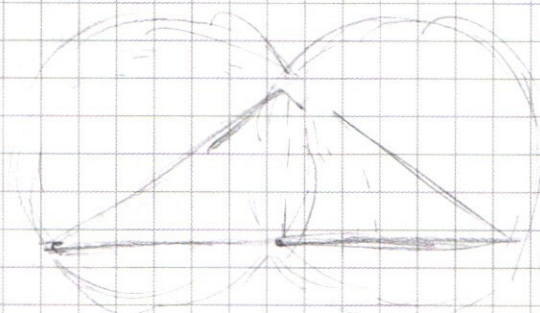
$$\begin{array}{r} 132 \\ 44 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 272 \\ 272 \\ \hline 544 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$|x+y+S| + |y-x+S| = 10$
 $|f+S| + |f-x+S| = 10$
 Можно отбросить $S \neq f$
 Можно отбросить $S = f$
 $|x+y+S| = S+f$
 $|y-x+S| = S-f$



$$\sin \alpha + \sin(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$$

$x > 0, y < 0$
 $x < 0, y > 0$

$x > 0, y > 0$
 $x < 0, y < 0$

$x > 0, y > 0$ окр. радиусом $(\sqrt{5}, \sqrt{2})$
 $x < 0, y < 0$

$x > 0, y > 0$
 $x < 0, y < 0$

$x+y$

$x, y \approx 0, 0$

$$\begin{aligned}
 x+y+S &> 0 \\
 x+y+S &< 0 \\
 y-x+S &> 0
 \end{aligned}$$

NS

$$\sqrt{(|x+y+S| + |y-x+S|)^2} = \sqrt{((|x|-1)^2 + (|y|-5)^2)} = \sqrt{10}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin \frac{9x - 5x}{2} \sin \frac{9x + 5x}{2} = -2 \sin 2x \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sinh 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sinh 2x (\cos 2x - \sinh 2x) - (\cos 2x - \sinh 2x) (\cos 2x + \sinh 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sinh 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{21} \sin 7x = \sqrt{21} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 7x = \sin\left(2x + \frac{5}{4}\right)$$

$$2 \cdot \frac{7x - 2x \cdot \frac{1}{5}}{2}$$

$$\frac{16}{40}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 1219} \\ \underline{27} \\ 38 \\ \underline{36} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ - 28 \\ \hline 63 \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \hline 49 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 649 \\ \times 2 \\ \hline 1298 \\ \times 9 \\ \hline 5841 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \hline 3121 \end{array}$$

$$\frac{4.5}{2} = 10$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 15 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8.7.6 \\ \hline 3.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 9 \times 81 \\ \underline{243} \end{array}$$

1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

$$x \ln x - \ln x$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 16 \\ \hline 9 \\ \hline 11440 \\ + 1280 \\ \hline 2220 \\ + 540 \\ \hline 3260 \\ + 21 \\ \hline 3341 \\ + 3 \\ \hline 10023 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10023 \\ \times 56 \\ \hline 60138 \\ + 50115 \\ \hline 561288 \end{array}$$

$$\ln(x^2 y) - \ln x = \ln y - \ln x = y$$

[illegible]

Handwritten notes on graph paper, including the number 5 and some scribbles.

$$\frac{x^2 \ln x}{x^3 \ln x}$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
 $\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
 $\frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$
 $\frac{1}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$
 $\frac{1}{128} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{256}$
 $\frac{1}{256} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{512}$
 $\frac{1}{512} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$
 $\frac{1}{1024} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2048}$
 $\frac{1}{2048} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4096}$
 $\frac{1}{4096} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8192}$
 $\frac{1}{8192} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16384}$
 $\frac{1}{16384} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32768}$
 $\frac{1}{32768} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{65536}$
 $\frac{1}{65536} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{131072}$
 $\frac{1}{131072} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{262144}$
 $\frac{1}{262144} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{524288}$
 $\frac{1}{524288} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1048576}$
 $\frac{1}{1048576} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2097152}$
 $\frac{1}{2097152} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4194304}$
 $\frac{1}{4194304} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8388608}$
 $\frac{1}{8388608} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16777216}$
 $\frac{1}{16777216} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{33554432}$
 $\frac{1}{33554432} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{67108864}$
 $\frac{1}{67108864} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{134217728}$
 $\frac{1}{134217728} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{268435456}$
 $\frac{1}{268435456} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{536870912}$
 $\frac{1}{536870912} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1073741824}$
 $\frac{1}{1073741824} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2147483648}$
 $\frac{1}{2147483648} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4294967296}$
 $\frac{1}{4294967296} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8589934592}$
 $\frac{1}{8589934592} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{17179869184}$
 $\frac{1}{17179869184} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{34359738368}$
 $\frac{1}{34359738368} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{68719476736}$
 $\frac{1}{68719476736} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{137438953472}$
 $\frac{1}{137438953472} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{274877906944}$
 $\frac{1}{274877906944} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{549755813888}$
 $\frac{1}{549755813888} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1099511627776}$
 $\frac{1}{1099511627776} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2199023255552}$
 $\frac{1}{2199023255552} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4398046511104}$
 $\frac{1}{4398046511104} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8796093022208}$
 $\frac{1}{8796093022208} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{17592186044416}$
 $\frac{1}{17592186044416} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{35184372088832}$
 $\frac{1}{35184372088832} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{70368744177664}$
 $\frac{1}{70368744177664} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{140737488355328}$
 $\frac{1}{140737488355328} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{281474976710656}$
 $\frac{1}{281474976710656} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{562949953421312}$
 $\frac{1}{562949953421312} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1125899906842624}$
 $\frac{1}{1125899906842624} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2251799813685248}$
 $\frac{1}{2251799813685248} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4503599627370496}$
 $\frac{1}{4503599627370496} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9007199254740992}$
 $\frac{1}{9007199254740992} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18014398509481984}$
 $\frac{1}{18014398509481984} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36028797018963968}$
 $\frac{1}{36028797018963968} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72057594037927936}$
 $\frac{1}{72057594037927936} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{144115188075855872}$
 $\frac{1}{144115188075855872} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{288230376151711744}$
 $\frac{1}{288230376151711744} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{576460752303423488}$
 $\frac{1}{576460752303423488} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1152921504606846976}$
 $\frac{1}{1152921504606846976} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2305843009213693952}$
 $\frac{1}{2305843009213693952} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4611686018427387904}$
 $\frac{1}{4611686018427387904} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9223372036854775808}$
 $\frac{1}{9223372036854775808} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18446744073709551616}$
 $\frac{1}{18446744073709551616} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36893488147419103232}$
 $\frac{1}{36893488147419103232} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{73786976294838206464}$
 $\frac{1}{73786976294838206464} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{147573952589676412928}$
 $\frac{1}{147573952589676412928} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{295147905179352825856}$
 $\frac{1}{295147905179352825856} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{590295810358705651712}$
 $\frac{1}{590295810358705651712} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1180591620717411303424}$
 $\frac{1}{1180591620717411303424} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2361183241434822606848}$
 $\frac{1}{2361183241434822606848} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4722366482869645213696}$
 $\frac{1}{4722366482869645213696} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9444732965739290427392}$
 $\frac{1}{9444732965739290427392} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18889465931478580854784}$
 $\frac{1}{18889465931478580854784} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{37778931862957161709568}$
 $\frac{1}{37778931862957161709568} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{75557863725914323419136}$
 $\frac{1}{75557863725914323419136} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{151115727451828646838272}$
 $\frac{1}{151115727451828646838$

$$x^2 - 2 \ln x$$

for boy

52-2500

