

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin\left(\frac{9+5}{2}x\right) \sin\left(\frac{9-5}{2}x\right) = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin\left(\frac{9+5}{2}x\right) \cos \frac{9-5}{2}x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x))(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$(2 \sin 7x - 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x - 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}))(\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)) = 0$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$$

$$\begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \pm(\frac{\pi}{2} - 2x) + \pi m \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ 0 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2} \end{cases} \quad n, k, m \in \mathbb{Z}$$

Задача 5

при раскрывании модуля в I ур-нии
возможно и.с.м.у.р.а

$$① \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

ур-е имеет вид

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$2y+10=10$$

$$y=0$$

$$x \geq -5-y \quad x \geq -5$$

$$x \leq y+5 \quad x \leq 5$$

$$\begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y=0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

тогда

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x=10$$

$$x=-5$$

$$y \leq 0$$

$$y \geq -10$$

$$\begin{cases} y \in [-10; 0] \\ x=-5 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq -5-x \\ y \leq x-5 \end{cases}$$

тогда

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

$$\begin{cases} y \geq -10 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in [-10; 0] \\ x=5 \end{cases}$$

$$④ \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$$

тогда

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y-10=10$$

$$y=-10$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y=-10 \end{cases}$$

других решений ур-е
не имеет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

* II упр-е

в случае ①

$$\begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y = 0 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x| \in [0; 5] \\ (|x|-12)^2 + 25 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in [49; 169] \end{cases}$$

случай дает нам 1-ое при
анал-но в случае ②

$$\begin{cases} y \in [-10; 0] \\ x = -5 \\ (y-5)^2 + (x-12)^2 = a \end{cases} \quad \# |y| \in [0; 10]$$

$$(y-5)^2 + 49 = a$$

в сл. ③

$$\begin{cases} a \in [49; 74] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in [-10; 0] \\ x = 5 \\ (y-5)^2 + (x-12)^2 = a \end{cases}$$

$$(y-5)^2 + 49 = a$$

в сл. ④

$$\begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y = -10 \\ (y-5)^2 + (x-12)^2 = a \\ (x-12)^2 + 25 = a \\ a \in [74; 169] \end{cases}$$

Т.О. при $a \in [49; 74)$ решение имеется в сл. ② и ③, т.е.
 $\exists$ 2-ое. при $a = 74$ все случаи имеют реш., 7-ое
при $a \in [74; 169]$ ① и ④ сл. дают реш.
при $a \in (-\infty; 49) \cup (169; +\infty)$ реш. нет

Ответ ~~или~~ $a \in [47, 74) \cup [74, 169]$

Задача 1 $9261 = 3^2 \cdot 1029 = 3^5 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3 = 9 \cdot 3 \cdot 7^3$

т.о. число делится на 3 тройки, 3 семёрки и 2 единицы, либо 1 тройку, 1 девятку, 3 семёрки и 3 единицы

в I случае ~~вариантов построения 7 семёрок~~

существует ~~для~~ сочетание из 3 по 3 вариантов пок. 7 семёрок, комбинация из кон. соотв. соз. из 5 по 3 комбинаций пок, сн. знаки - единицы

т.о. в I случае $\exists \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{6} = 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 560$ подх. чисел.

во II случае $\exists$ кон. из 3 по 3 пок. 7 семёрок, комб. из кон. соотв. 5 возм. комбинаций девятки, комб. из кон. соотв. 4 комбинации тройки

т.о. во II случае $\exists \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot 20 = 56 \cdot 20 = 1120$ подх. чисел

всего чисел $1120 + 560 = 1680$

Ответ: ~~или~~ 1680

Задача 4

Дано

$W(O, R)$ - сфера вписана в 3-й угол
K, L, M - Т. касания

$S_{A_1B_1C_1} = 16$

$S_{ABC} = 1$

найти: $\angle KSG$, $S_{A_2B_2C_2}$

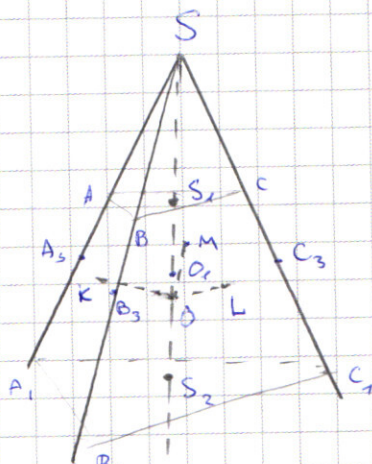
Решение

1) $SO \perp W$ в т. S_1 и S_2

S_1S_2 проходит через Т.О., т.к. S_1S_2 - диаметр $S_1S_2 = 2R$

KO, LO и $MO = R$, ~~так как~~ $KO \perp SAO$ $LO \perp SBC$ $MO \perp SAC$

$SK = SM = SL$ как кас.

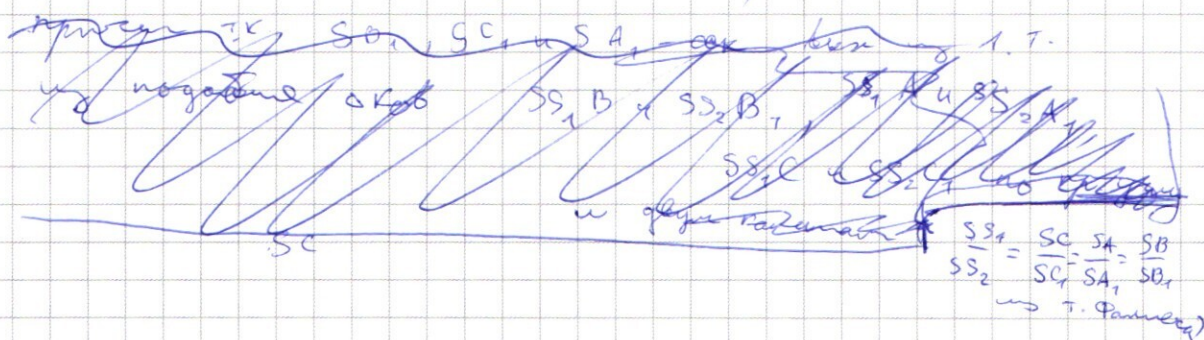


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $ABC \perp OS_1$ как кас. м-т

$A_1B_1C_1 \perp OS_2$ как кас. м-т

зп. $AC \parallel A_1C_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $AB \parallel A_1B_1$



след-но
поэтому $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подобны

A_1SC_1 и ASC

B_1SA_1 и BSA по двум углам и 2 сторон.

$$\text{зп. } \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SC}{SC_1} = \frac{SS_1}{SS_2} = k$$

зп. ABC и $A_1B_1C_1$ также подобны

$$\begin{aligned} \text{зп. } \angle ABC &= \angle A_1B_1C_1 \\ S_{ABC} &= \frac{AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC}{2} = \\ &= \frac{k^2 A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin \angle A_1B_1C_1}{2} = \\ &= k^2 S_{A_1B_1C_1} \\ k^2 &= \frac{1}{16} \quad k = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{SS_1}{SS_2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 4SS_1 &= SS_2 = SS_1 + 2R \\ 3SS_1 &= 2R \quad SS_1 = \frac{2R}{3} \end{aligned}$$

4. $\triangle SKO$ - туп. по ранее найденным

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SS_1 + R} = \frac{R}{\left(\frac{2}{3} + 1\right)R} = \frac{3}{5} = 0,6$$

3) ABC (KLM) и $SO = O_1$ ~~похожи~~
вершины сечения $A_1B_1C_1$ аналогично п. 2

$$\frac{SO_1}{SS_2} = k_1$$

$$\triangle A_3 B_3 C_3 \sim \triangle A_1 B_1 C_1$$

$$S_{A_3 B_3 C_3} = k_1^2 S_{A_1 B_1 C_1}$$

$$\sin \angle KSO = 0,6$$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \angle KSO = \frac{3}{4}$$

$$SO_1 = SK \sin \angle KSO = \frac{KO}{\operatorname{tg} \angle KSO} \sin \angle KSO = \frac{0,6R}{0,75} = 0,8R$$

$$SO_1 = SK \cos \angle KSO = \frac{KO}{\operatorname{tg} \angle KSO} \cdot \cos \angle KSO = \frac{4R}{3} \cdot 0,8 = \frac{3,2R}{3}$$

$$k_1 = \frac{\frac{3,2}{3}R}{\frac{8}{3}R} = 0,4$$

$$S_{A_3 B_3 C_3} = 0,16 \cdot 16 = 2,56$$

$$\angle KSO = \arcsin 0,6$$

$$S_{A_3 B_3 C_3} = 2,56$$

5.7)

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 2x + 2^{34} \left(3 - \frac{x}{2}\right) < 76$$

неверно при $x \leq 6$

зн. $x > 6$

где

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8261 : 9

1029 : 3

343

49

333 777 11

$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{678}{6} \cdot \frac{5}{6} = 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 560$

$\cos 9x - \cos 5x = 10$

$\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$(1 \times 1 - 12)^2 + (y - 5)^2 = 9$

$y + 5 + x > 0 \Rightarrow y + 5 > -x$

$y + 5 - x > 0 \Rightarrow y + 5 > x$

$x > y + 5 \Rightarrow 1 +$

$x < y + 5 \Rightarrow 2 +$

$y = |x|$

$(x^2 y)^{\ln x} = y^{\ln(\frac{x}{x^2})}$

$y^2 + y - 2x^2 + 4x - 4y = 0$

$y(y - 4) + 2x(4 - x) - 4y = 0$

$\frac{1}{x} - 1 - 2x + \frac{8}{y} + \frac{4}{y} = 0$

$\frac{8x - 4y}{xy} = 0$

$$\sin 2x (\sqrt{2} \sin 5x - 1) +$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

или

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin 7x = \sin 2x \sin 5x + \cos 2x \cos 5x$$

$$\sin 2x (\sqrt{2} \sin 5x - 1) + \cos 2x (\sqrt{2} \cos 5x - 1)$$

$$(\sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin 4x \cos 2x$$

$$\cos 3x - \cos 5x = -2 \sin 4x \sin 2x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$(2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$y = x^{\frac{2\ln x}{3\ln x - \ln 2}}$$

$$y^{3\ln x - \ln 2} = x^{2\ln x} \quad \wedge \quad \frac{1}{2\ln x}$$

$$y^{1,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} = x$$

$x =$

$$y^2 - y^{2,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} - 2y^{3 - \frac{\ln 2}{\ln x}} + 8y^{1,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} - 4y = 0$$

$$\wedge \quad \frac{\ln 2}{2\ln x} > 0$$

come by you

$$y \left(y - y^{1,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} - 2y^{3 - \frac{\ln 2}{\ln x}} + 8y^{1,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} - 4 \right)$$

$$y = 0 \quad y^2 \left(1 - y^{0,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} - 2y^{1 - \frac{\ln 2}{\ln x}} + 8y^{-0,5 - \frac{\ln 2}{2\ln x}} - \frac{4}{y} \right)$$

$$\left(-2y^2 \cdot y^{-\frac{\ln 2}{\ln x}} + 8y^2 \cdot y^{\frac{\ln 2}{\ln x}} + (y - 4) \right)$$

$$D = 64y^2 -$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} - 2x(2^{32} - 1) < 76$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} - x(2^{34} - 2) < 76$$

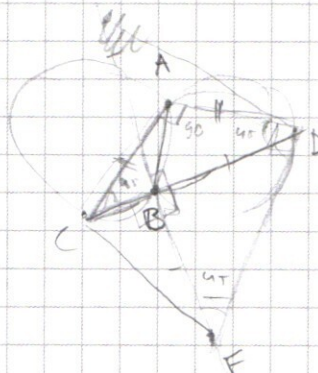
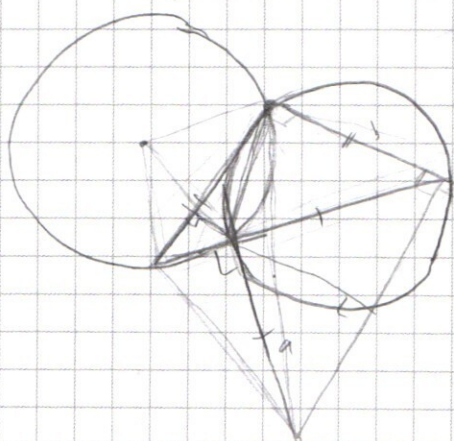
$$2^x + 2x + 2^{34} \left(3 - \frac{x}{2} \right) < 76$$

при $x < 0$ не вер.

→ ~~на~~ при $x < 6$

$$x > 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$AB = \frac{2R}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{AC^2 + 200 - 2 \cdot 200 \cdot AC \cdot \cos \angle CAB} + \\ & + \sqrt{AC^2 + 200 - 2 \cdot 200 \cdot AC \cdot \sin \angle CAB} = \sqrt{2} AC \\ & = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \sin \angle CAB = \frac{200}{\sqrt{2}} \\ & \sin \angle CAB = \frac{200}{200} = 1 \\ & \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle CAB} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab \sin \angle CAB} \\ & 2AC^2 + 400 - 400AC \cos \angle CAB + AC^2 - 400AC \sin \angle CAB + \\ & + 2 \sqrt{AC^2 + 200} \sqrt{AC^2 + 200} - 400AC \sin \angle CAB + 200AC^2 + 40000 \\ & = 80000AC \sin \angle CAB - 40000AC \cos \angle CAB \end{aligned}$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin x) y^{\ln \frac{y}{x}} = y^{\ln y - \ln x}$$

$$2 \sin 7x - \left(2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 2x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) (x^2 y^4)^{-\ln x} = x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 2 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x - \ln y} = 0$$

$$y^{3 \ln x - \ln y} = x^{2 \ln x}$$

① $x+y+5 \geq 0 \quad y \geq -x-5$
 $y-x+5 \geq 0 \quad y \geq x-5$

$$2y+10=10$$

$$y=0$$

$$\begin{cases} -x-5 \leq 0 & x \geq -5 & x \geq 5, y=0 & x \geq 0 \\ x-5 \leq 0 & x \leq 5 & x \in [-5; 5] & y > 0 \end{cases}$$

$$y=0 \quad x \in [-5; 5]$$

$$(x-12)^2 + 25 = a$$

$$a \in [49; 25; 169]$$

$$[74; 169]$$

② $x+y+5 \leq 0 \quad y \leq -x-5$
 $y-x+5 \geq 0 \quad y \geq x-5$
 $-x-y-5+y-x+5=10$

$$-2x=10$$

$$x=-5$$

$$y < -10 \quad y \in (-10; 0)$$

$$y > -10$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\left(y - \frac{x}{2} \right)^2 - 2.25x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y+2)^2 - 2(x+2)^2 - xy = 0 \quad x=-5$$

$$(y-2)^2$$

$$y = (-10; 0)$$

$$49 + (y-5)^2 = a$$

$$a \in [49; 169]$$

③ $x+y+5 \geq 0$
 $y-x+5 \leq 0$
 $y > -5-x$
 $y < x-5$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

$$y > -10$$

$$y < 0 \quad y \in (-10; 0)$$

$$x=5 \quad y \in (-10; 0)$$

$$\sin \angle SO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{\frac{5}{2}R} = \frac{2}{5}$$

④ $x+y+5 < 0 \quad y < -x-5$
 $y-x+5 < 0 \quad y < x-5$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y-10=10$$

$$y=-10$$

$$x < -y-5 \quad x < 5$$

$$x > y+5 \quad x > -45$$

$$(x+16) + (16-x)$$

$$x \in [-15; 5]$$

$$y = -10$$

$$(x-12)^2 + 25 = a$$

$$a \in [74; 169]$$

$$x \in [-15; 5]$$