МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln\left(xy^2\right)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 9 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16, \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leqslant 93 + 3\left(3^{27} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Решение:

1) Заметим, что $64827 = 3^3 \cdot 7^4$. Отсюда следует, что само восьмизначное число может состоять из следующих наборов цифр: $\{1;1;9;3;7;7;7;7\}$ и $\{1;3;3;3;7;7;7;7\}$. Других наборов нет, т.к. помимо 3 и 7 у исходного числа простых делителей нет, а уже $3^3=27$ и $7^2=49$ не однозначные числа.

2) Посчитаем количество способов расставить цифры из набора $\{1;3;3;3;7;7;7;7\}$. Это количество способов поставить три „3" на какие-то три места из восьми, умноженное на кол-во способов поставить семёрки на какие-то 4 места из оставшихся 5-и. На оставшееся место ставится 1.

$$C_8^3 \cdot C_5^4 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 280$$

3) Аналогичные операции проделаем с набором $\{1;1;9;3;7;7;7;7\}$. C_8^2 – количество способов поставить единицы на какие-то 2 места, C_6^4 – количество способов поставить семёрки на какие-то 4 места из оставшихся и ещё 2-мя способами можно поставить 9 и 3 на оставшиеся 2 места.

$$C_8^2 \cdot C_6^4 \cdot 2 = \frac{8!}{2!\cdot 6!} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} \cdot 2 = \cancel{35}\,\cancel{870}\,840$$

4) Ответ – сумма чисел из пунктов 2 и 3, т.е. ~~315~~ 1120

Ответ: ~~315~~ 1120.

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x\right) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$2\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$2\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)+\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)+\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}-x}{2}\right)\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)2\sin\left(3x+\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0\\ \sin\left(3x+\frac{3\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ 3x+\frac{3\pi}{4}=\pi n\\ 4x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right., n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l}7x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi n\\ 3x=\pi n-\frac{3\pi}{4}\\ 4x=\pi+\pi n\end{array}\right., n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7}\\ x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{4}\end{array}\right., n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x\in\left\{\frac{3\pi}{28}+\frac{2\pi n}{7};\ -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z}\right\}$.

№4.

Решение:

1) Заметим, что сфера одновременно вписана в пирамиду (треугольную) $ABCS$ и в усечённую треугольную пирамиду $ABCA_1B_1C_1$, где (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ – заданные в условии плоскости сечения данного трёхгранного угла, где $S_{A_1B_1C_1}=9$; $S_{ABC}=16$.

$ABCA_1B_1C_1$ – усечённая пирамида, т.к. $(A_1B_1C_1)\perp(SO)$; $(ABC)\perp(SO)\Rightarrow$ $\Rightarrow(A_1B_1C_1)\parallel(ABC)$. В усечённой пирамиде плоскости оснований – треугольники, а т.к. $(A_1B_1C_1)\parallel(ABC)$, то $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k=\sqrt{\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$.

2) ~~По~~ Пусть $(SO)\cap(A_1B_1C_1)=\{P\}$; $(SO)\cap(ABC)=\{R\}$. $(ABC)\perp(SR)\Rightarrow$ $\Rightarrow[SR]$ – высота пирамиды $ABCS$; $(A_1B_1C_1)\perp(SP)\Rightarrow[SP]$ – высота пирамиды $A_1B_1C_1S$.

В (ABS): $(A_1B_1)\parallel(AB)$, т.к. $(ABC)\parallel(A_1B_1C_1)\Rightarrow\angle SA_1B_1=\cancel{\angle SB_1A_1}\angle SAB$, $\angle SB_1A_1=\angle SBA\Rightarrow\triangle SA_1B_1\sim\triangle SAB$ по 2-м углам $\Rightarrow\frac{|SA_1|}{|SA|}=\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=k$

Аналогично $\triangle SA_1P\sim\triangle SAR$ по 2-м углам, т.к. $(A_1P)\parallel(AR)\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{|SP|}{|SR|}=\frac{|SA_1|}{|SA|}=k$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $O \in (SR)$; $[OP] \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow P$ - точка касания $(A_1B_1C_1)$ со сферой; $[OR] \perp (ABC) \Rightarrow R$ - точка касания (ABC) со сферой.

Пусть радиус сферы - r, тогда $|PR| = 2r$.

$\frac{|SP|}{|SR|} = k = \frac{3}{4} = \frac{|SP|}{2r + |SP|} \Rightarrow |SP| = 6r \Rightarrow |SO| = 7r$

4) $[OK] \perp [SK]$ т.к. K - точка касания $\Rightarrow \triangle OKS$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{|OK|}{|OS|} = \arcsin\frac{r}{7r} = \arcsin\frac{1}{7}$.

5) $|SK| = |SL| = |SM|$ - отрезки касательных к сфере из точки $S \Rightarrow \triangle OSK = \triangle OSL = \triangle OSM$ по трём сторонам. Если в каждом из этих треугольников провести высоту из прямого угла, то эти высоты разделят $[SO]$ на равные отрезки, т.е. все высоты попадут в одну точку (пусть H).

Заметим, что $H \in (KML)$, т.к. иначе $KMLH$ - правильная треугольная пирамида ($|HK| = |HL| = |HM|$ из равенства $\triangle OHL = \triangle OHK = \triangle OHM$ по 2м сторонам и углу между ними) и если провести $HQ \perp (KML)$, $Q \in (KML)$, то Q - радиус описанной окружности $\triangle KML$ и из $\triangle$-ков QHL, QMK, QHM, где углы с вершиной в Q - прямые, то $QM < QH$, где $|MH|$ ~~$|QH|$~~ - расстояние до $[SO]$, чего быть не может.

Итак $H \in (KML)$, причём H - центр описанной окружности $\triangle KML$ с радиусом r_0, где r_0 из $\triangle OKS = \frac{|OK| \cdot |KS|}{|OS|} = \frac{r \cdot \sqrt{49r^2 - r^2}}{7r} = \frac{4\sqrt{3}r}{7}$.

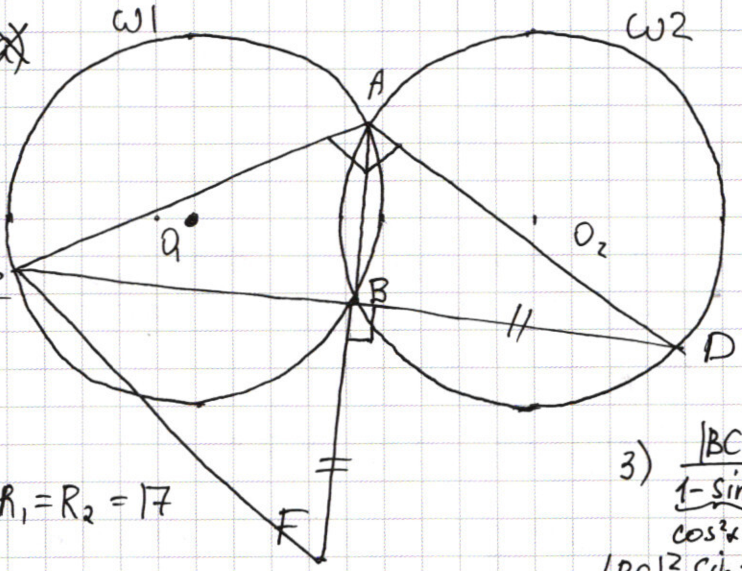
6) $|SK| = |SL| = |SM| \Rightarrow (KML) \parallel (ABC) \Rightarrow \triangle_{сеч\,KML} \sim \triangle ABC$, где коэффициент подобия $\frac{|SH|}{|SR|}$. $|SH| = \sqrt{|SK|^2 - |r_0|^2} = \sqrt{48r^2 - \frac{48}{49}r^2} = \frac{48}{7}r \Rightarrow \frac{|SH|}{|SR|} = \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{S_{сеч\,KML}}{S_{ABC}} = \frac{36}{49} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{сеч\,KML} = \frac{36}{49} S_{ABC} = \frac{36 \cdot 16}{49} = \frac{576}{49}$.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{1}{7}$; $S_{сеч\,KML} = \frac{576}{49}$.

№6.

~~а)~~



$R_1 = R_2 = 17$

а) $|CF| - ?$

б) $|BC| = 16$

$S_{\triangle ACF} - ?$

а) 1) пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$.

2) по т. синусов в ω1:

$$\frac{|BC|}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R_1 = 34 = \frac{|BC|}{\cos\alpha}$$

в ω2:

$$\frac{|BD|}{\sin\alpha} = 2R_2 = 34$$

3) $$\frac{|BC|^2}{\underbrace{1-\sin^2\alpha}_{\cos^2\alpha}} = \frac{|BD|^2}{\sin^2\alpha}$$

$$|BC|^2 \sin^2\alpha = |BD|^2 - |BD|^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$|BD|^2 = \sin^2\alpha \, \underbrace{(|BC|^2 + |BD|^2)}_{|CF|^2}$$

$|CF|^2$ из $\triangle CBF$ - прямоугольный треугольник

$$|BF| = |BD| = |CF| \sin\alpha \Rightarrow \angle BCF = \alpha$$

4) из пункта 2 $\left.\begin{array}{l} |BD| = |BF| = 34\sin\alpha \\ |BD| = |BF| = |CF|\sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |CF| = 34$

б) 1) по т. синусов в ω1: $\frac{|AB|}{\sin\angle ACB} = 2R_1$; в ω2: $\frac{|AB|}{\sin\angle ADB} = 2R_2$,

т.е. $\sin\angle ACB = \sin\angle ADB \Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 45^\circ$

2) из т. Пифагора следует, что $|BF| = \sqrt{|CF|^2 - |BC|^2} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow |CD| = |BC| + |BD| = |BC| + |BF| = 46 \Rightarrow |AC| = \frac{46}{\sqrt{2}}$.

3) $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CF| \cdot \sin\angle ACF$, $\sin\angle ACF = \sin\left(45^\circ + \arcsin\frac{|BF|}{|CF|}\right) =$

$= \sin\left(45^\circ + \arcsin\frac{15}{17}\right)$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 23\sqrt{2} \cdot 34 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{15}{17}\right) = 391\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{15}{17}\right).$$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 391\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{15}{17}\right)$.

№5.

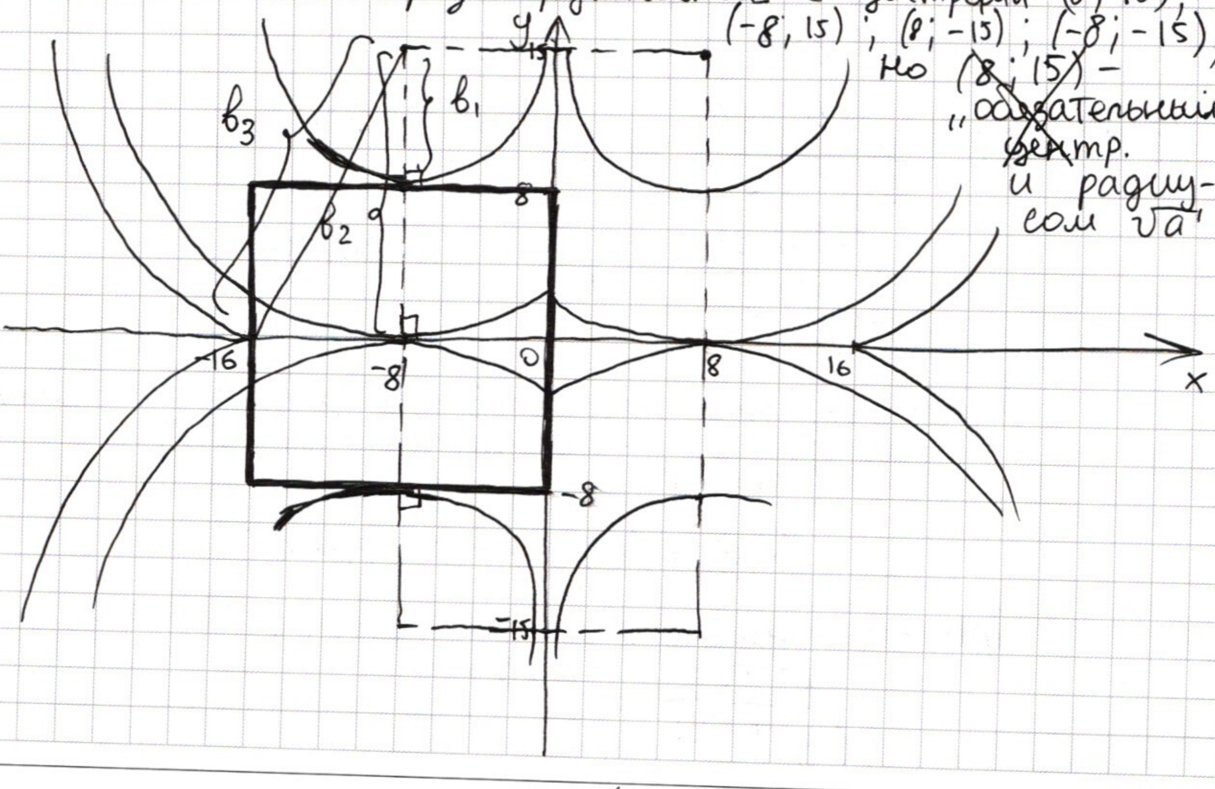
$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 & (1) \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a & (2) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Заметим, что (1) – график, т.е. уравнение квадрата 8×8, если раскрывать модуль:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 0: \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8 \geq y \\ 2x+16=16 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq (x+8) < y \\ 2y=16 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8 < -y \\ -2x-16=16 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y<0: \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8 \geq -y \\ 2x+16=16 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq (x+8) < -y \\ -2y=16 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8 < y \\ -2x=32 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 0: \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y<8 \end{cases} \\ \begin{cases} y=8 \\ x<0 \\ x \geq -16 \end{cases} \\ \begin{cases} y<8 \\ x=-16 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y<0: \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y \geq -8 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-8 \\ x<0 \\ x \geq -16 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-16 \\ y>-8 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) Поймём, что при $a \leq 0$ решений нет; (2) – уравнение отражённой несколько раз окружности с центрами $(8;15)$; $(-8;15)$; $(8;-15)$; $(-8;-15)$, но $(8;15)$ – „~~обязательный~~" ~~центр~~. и радиусом $\sqrt{a}$"



3) при $\sqrt{a} \in [0;\ b_1)$ – нет решений

$\sqrt{a} \in \{b_1\}$ – 1 решение

$\sqrt{a} \in (b_1;\ b_2]$ > 2 решений

$\sqrt{a} \in (b_2;\ b_3)$ – 2 решения

$\sqrt{a} \in \{b_3\}$ – 1 решение

$\sqrt{a} \in (b_3;\ +\infty)$ – нет решений.

4) $b_1 = 15-8=7$

$b_2 = 15$

$b_3 = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = 17$

5) ~~Ответ~~: $\left[\begin{array}{l} a = b_1^2 = 49; \\ a \in (b_2^3;\ b_3^3) \Rightarrow a \in (225;\ 289) \end{array}\right.$

Ответ: $a \in \{49\} \cup (225;\ 289)$.

№3.

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} & (1) \\ y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0 & (2) \end{cases}$$

1) по ОДЗ $\begin{cases} -y>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ x>0 \end{cases}$

2) (1): $\frac{x^{7\cdot\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}\cdot x^{2\ln y^2}$

$$\frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}\cdot x^{4\ln(-y)}$$

Заметим, что при $x=0$ оба равенства выполняются

при $\begin{cases} y=0 \\ y=-4 \end{cases}$ – невозможно по ОДЗ

$\Downarrow$

$(x;y) = (0;-4)$ – решение

При $x\neq 0$ на него можно делить. Отсюда

$$\frac{x^{3\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$64827 = 3^3 \cdot 7^4$ Все числа без нулей

$\Sigma_y = 10+10+7 = 27 \,\vdots\, 9$

$\overbrace{1\ 3\ 3\ 3\ \ 7\ 7\ 7\ 7}^{8}$

$1\ 1\ 9\ 3\ \ 7\ 7\ 7\ 7$

$64827 : 9 = 7203$

$7203 \,\vdots\, 3$

$7203 : 3 = 2401$

1 3 3 3 7 7 7 7

1 3 3 7 3 7 7 7 7

кол-во сп-ов пост три „3" на 8 мест

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$C_8^3 \cdot C_5^4 = \frac{8!}{3!\,5!} \cdot \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot2} = 4\cdot35 = 280$

$+$

$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot 2$

$\frac{8!}{4!\cdot4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot2!} \cdot 2 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot4} \cdot 2 = 140$

$C_8^4 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{4!\cdot4!} \cdot \frac{4!}{3!\cdot1!}$

$\frac{8!}{4!\cdot4!} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 2 = 5\cdot6\cdot7\cdot8 = 1680$

$\frac{8!}{4!\cdot4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot2!} \cdot 2 =$

$2401 : 7 = 343$

$343 : 7 = 49$

$49 \times 49 = 2401$

$2401 \times 27 = 64827$

$280 \times 6 = 1680$

$1680 + 280 = 1960$

$\frac{8!}{4!\cdot3!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot2} = 40\cdot7 = 280$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

$= \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot2}$

$(x^2)^{(\ln x + \ln y^2)} = x^{\ln x^2} \cdot x^{2\ln y^2}$

ОДЗ: $y<0$, $x>0$

$y^2+4y+4 - 3(x^2-4x+4) + 8 + 2xy = 0$

$(y+2)^2 - 3(x-2)^2 + 2(xy+4) = 0,$

$35 \times 24 = 840$

$C_4^2 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{2\cdot2} = 6$

$\frac{8!}{2!\cdot4!\cdot2} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot4} = 35$

$\frac{8!}{2\cdot4!\cdot2} \cdot 2 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2} = \frac{8!}{4!\cdot2!}$

$\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2}$

3 3 3
3 3
3 3
3 3 3
3 3

$\frac{8!}{2!\cdot4!\cdot2!} = 2\,1\,1\,2\,0$

$840 + 280 = 1120$

$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x \cos 2x + 2\sin 2x \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cos 5x\,(\cos 2x + \sin 2x)$ $\qquad$ $\cos\frac{\pi}{4}\cos 4x$

$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right)$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\left(\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$2\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)$

$\sqrt{2}\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$

$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 5x + \cos 4x = 0$

$\cos(5x - x) = \cos 5x \cos x + \sin 5x \sin x$

$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)$

$\underbrace{2\cos\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}_{0}\left(\underbrace{\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)}_{0}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) + \cos\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{7x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\right) = 2\overbrace{\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{16}\pi\right)}^{0}\overbrace{\cos\left(2x - \frac{\pi}{16}\right)}^{0}$

$\frac{7x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}-x}{4} = \frac{6x+\frac{3\pi}{4}}{4} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{16}\pi$

$\frac{7x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+x}{4} = \frac{8x-\frac{\pi}{4}}{4} = 2x - \frac{\pi}{16}$

$7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

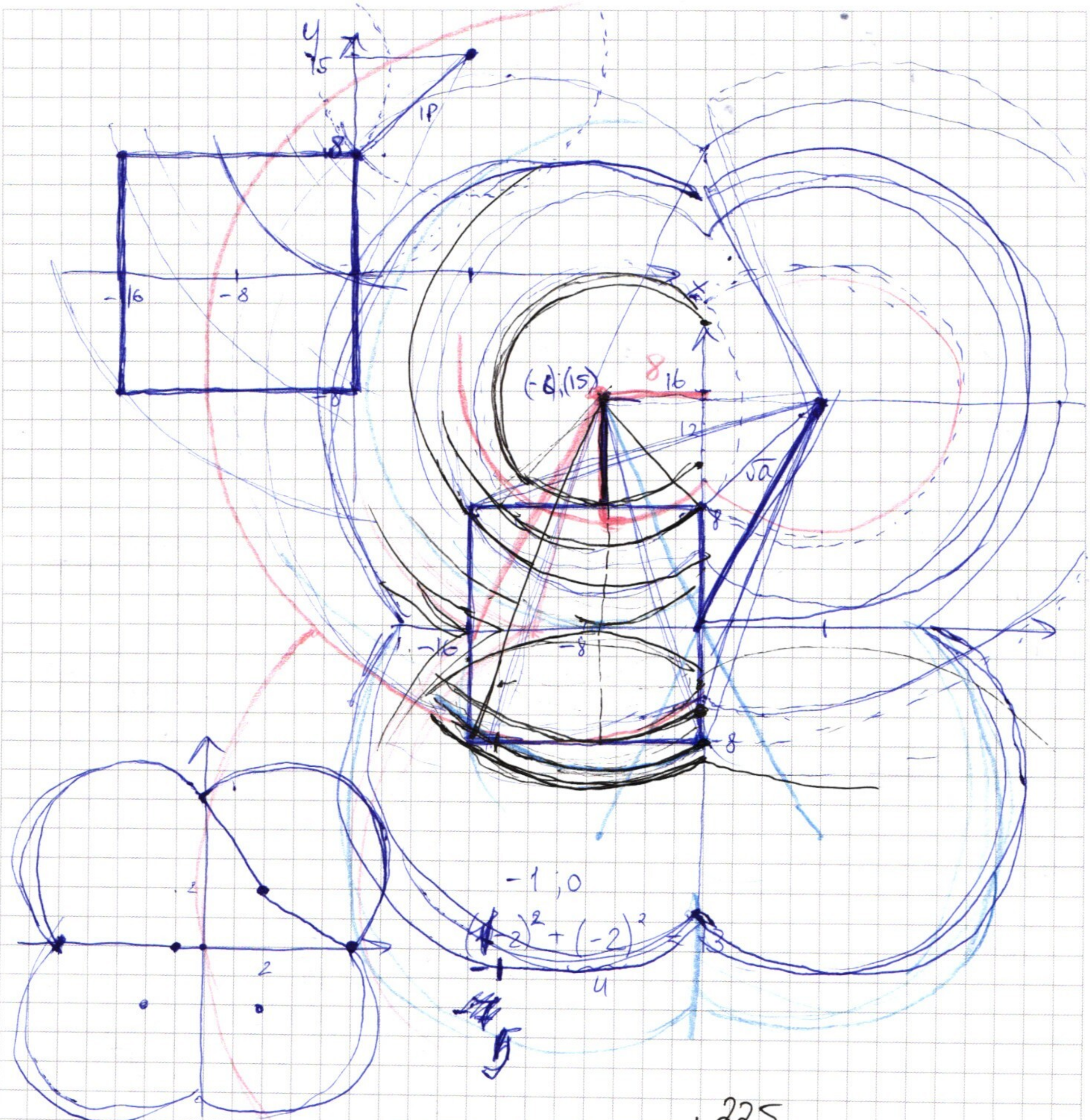
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} +225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

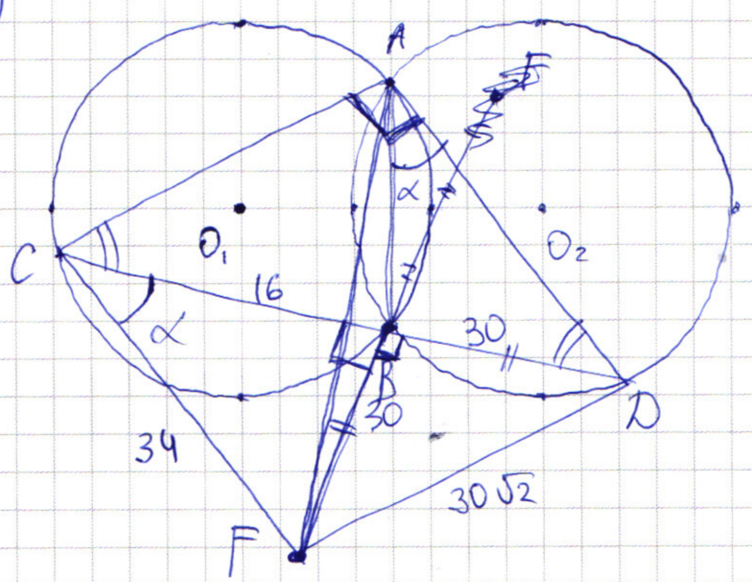
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

а)



$R_1 = R_2 = 17$

$BF = BD$

$|CF| - ?$

$$\begin{array}{r} \times\ 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102\ \ \\ \hline 1156 \\ -\ 256 \\ \hline 900 \end{array}$$

$\Downarrow$

$BF = 30$

$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{CB}{\cos\alpha} = 34$ $BD = BF = 34\sin\alpha$

$\frac{BD^2}{\sin^2\alpha} = \frac{BC^2}{1-\sin^2\alpha}$

$BD^2 - BD^2\sin^2\alpha = BC^2\sin^2\alpha$

$BF^2 = BD^2 = \sin^2\alpha\,(CF^2)$

$BF = \sin\alpha\ CF$

$34\sin\alpha = CF\sin\alpha$

$\underline{\underline{CF = 34}}$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 23 \\ \hline 51 \\ 34\ \ \\ \hline 391 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 17 \\ 23 \\ \hline 51 \\ 34\ \ \\ \hline 391 \end{array}$$

б)

$BC = 16$

$S_{\triangle ACF} - ?$

$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

$AC = \frac{46}{\sqrt{2}}$

$\angle FCD = \arcsin\frac{15}{17}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2}\underset{\substack{\| \\ \frac{46\sqrt{2}}{2} \\ \| \\ 23\sqrt{2}}}{AC} \cdot \underset{\substack{\| \\ 34}}{CF} \cdot \underbrace{\sin\angle ACF}_{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{15}{17}\right)}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{(2\ln x + 2\ln y^2)}$

$\frac{x^{7\ln(-y)}}{-y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}\cdot x^{4\ln(-y)}$

$x \neq 0$:

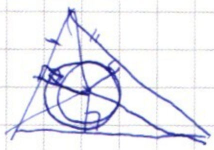
$\frac{x^{3\ln(-y)}}{-y^{\ln(-y)}} = x^{2\ln x}$

$x^{3\ln(-y)-2\ln x} = (-y)^{\ln(-y)}$

$\boxed{x=0}$?

$\Rightarrow y=0$ x по ОДЗ

$y=-4$



$2^{\log_4 2} = \sqrt{2}$

$2^{\log_8 2} = \sqrt[3]{2}$

$x(y+12) + y(x+4)$

$y^2+2xy-3x^2+12x+4y=0$

$y(y+4)-3x(x-4)+2xy=0$

(по усл) $AB \neq BC \neq AC$

$(A_1B_1C_1)$ и $(ABC) \perp (SO) \Rightarrow$ пл-ти $\parallel$

$\Downarrow$

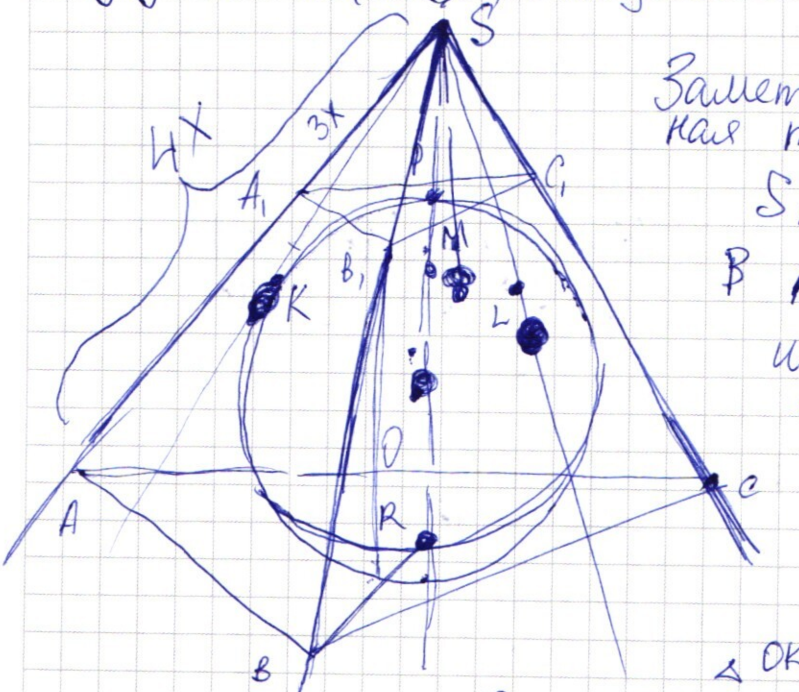
$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, $k=\frac{3}{4}$

Заметим, что $ABCA_1B_1C_1$ — усечённая треугольная пирамида

$S_{A_1B_1C_1}=9$; $S_{ABC}=16$

В $ABCA_1B_1C_1$; в $ABCS$ вписан шар $\Rightarrow$ K, L, M — центры граней ASB; BSC; ASC соотв.

? центры впис. окр-ей



SK — бисс $\angle ASB$ и т.д.

$\triangle OKS = \triangle OLS = \triangle OMS$ по катету и гипотенузе $\Rightarrow SK=SL=SM$

$\Downarrow$

$\angle KSO = \angle MSO = \angle LSO$

$RB = LB$

$\triangle KML$ — р/ст

S_{KML} — ?

$\frac{SP}{SR} = \frac{3}{4}$

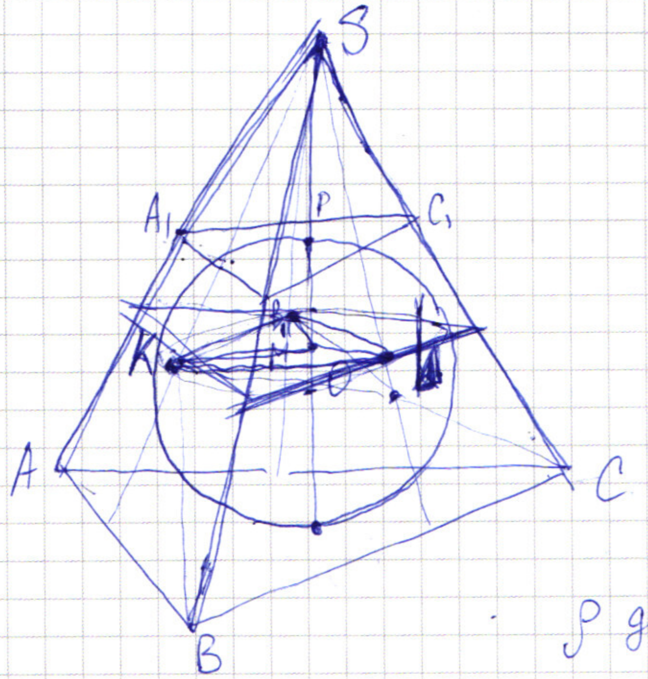
$\frac{SP}{SP+2R} = \frac{3}{4}$

$4SP = 3SP + 6R$

$SP = 6R$ $\Rightarrow SO = 7R$ $\sin\angle KSO = \frac{1}{7}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$SH = S\cancel{K}$ $\frac{4\sqrt{3}}{7}$

ρ до SO одинак.

$SO = 7R$
$OK = R$
$SK = \sqrt{48}R = 4\sqrt{3}R$

$R' = \frac{7R}{4\sqrt{3}}$

$SK = 4\sqrt{3}R$

$\Downarrow$

KMLS – прав. тр. пирамида
$\Downarrow$
SQ попад. в ц. опис. окр. (сечение данного шара)

пусть Q ≠ т. пер. выс.
тогда KMLO – пр. Δ пир.
если оп.

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 16 \\ \hline 216 \\ 36\ \ \\ \hline 576 \end{array}$$

~~2~~ решения

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x+8)+y| + |(x+8)-y| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

$a>0$:

окр. радиусом $\sqrt{a}$ и ц. $(8;15)$

~~x+8≥y~~ $y>0$:

$8 \geq y$
$x=0$

$(x<0)$ $x+8<8$
$-8<x+8$
$x\geq -16$
$y=8$

$(y<8)$ $-8<-y$
$x=-16$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8 \geq y \\ 2x+16 = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} -y \leq x+8 < y \\ 2y = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8 < -y \\ -2x-16 = 16 \end{cases} \end{array}\right.$$

$y<0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8 \geq -y \\ 2x+16 = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} y < x+8 < -y \\ -2y = 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8 < y \\ -2x = 32 \end{cases} \end{array}\right.$$

$y \geq -8$
$x=0$

$y = -8$

$-8<y$ $\quad -y<8$
$x=-16$

$$\frac{48 \cdot 49 - 48}{49} = \frac{48^2}{49}$$

$r^2 =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)