

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$9261 = 7^3 \cdot 3^3$ $\Rightarrow$ среди цифр обязательно будет 3 семерки и либо 3 тройки, либо 1 тройка и 1 девятка. Остальные цифры — единицы.

C_8^3 — кол-во способов поставить 3 семерки на 8 позиций.

а) C_5^3 — кол-во способов поставить 3 тройки на оставшиеся 5 позиций.

б) $5 \cdot 4$ — кол-во способов поставить девятку и тройку на оставшиеся 5 позиций

$$k = C_8^3 (C_5^3 + 5 \cdot 4) = \frac{8!}{5!3!} \left(\frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!} \right) = \frac{8!}{3!5!3!} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 40 \cdot 42 = 1680.$$

Ответ: $k = 1680$.

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x +$$

$$+ \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x - 1) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x + 1) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 5x (\cancel{\cos^2 2x} - \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x - \sin^2 2x - \cancel{\cos^2 2x}) +$$

$$+ \sin 5x (\cos^2 2x - \cancel{\sin^2 2x} - 2 \sin 2x \cos 2x + \cancel{\sin^2 2x} +$$

$$+ \cos^2 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$- \cos 5x \cdot 2 \sin 2x (\sin 2x - \cos 2x) + \sin 5x \cdot 2 \cos 2x \cdot$$

$$\cdot (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cancel{\sqrt{2} \sin 2x} \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 5x \sin 2x +$$

$$+ \sin 5x \cos 2x) = (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 4x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sqrt{2} \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x =$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

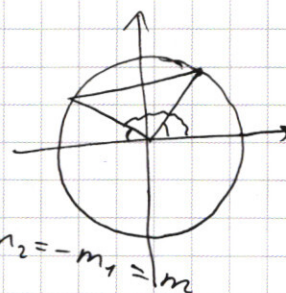
$$a) 4x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$b) 4x \neq 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi m_1 = \pi$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi m_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m_2, m_2 = -m_1 = m$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}.$$



Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9},$
 $k, n, m \in \mathbb{Z}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

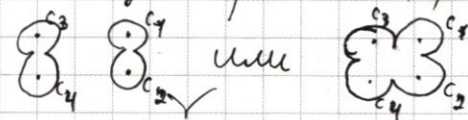
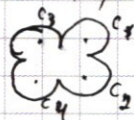
$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

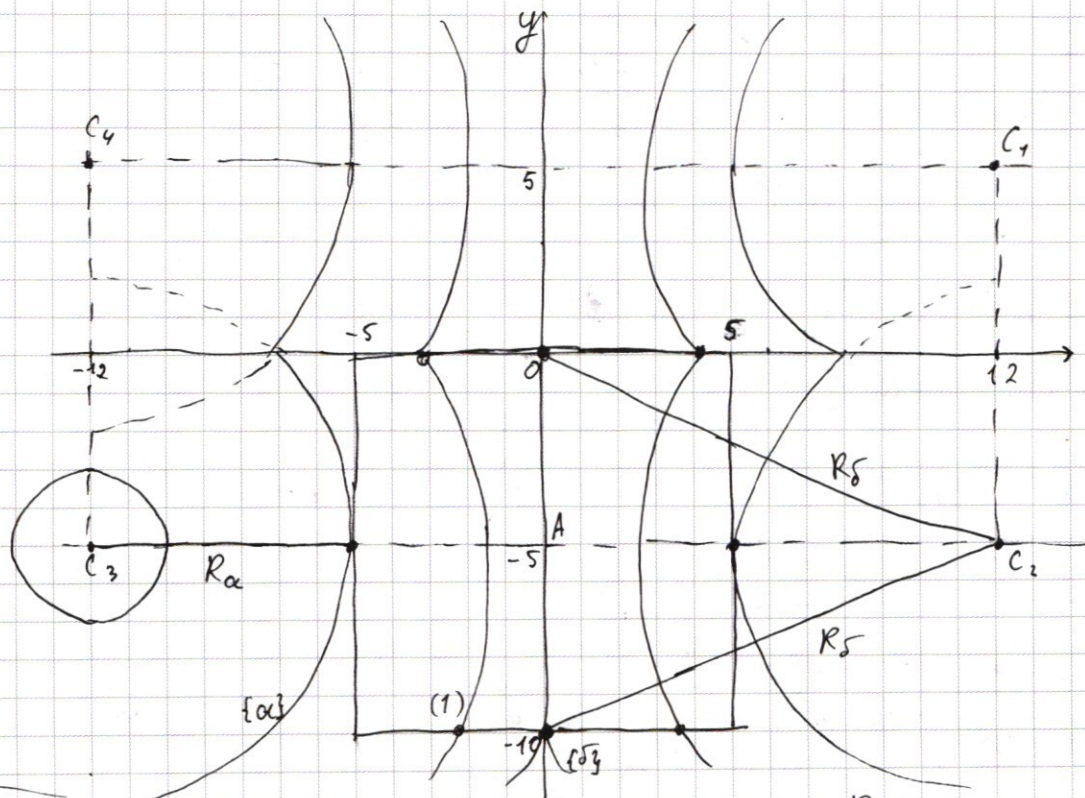
$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2)$$

(1) - квадрат с центром $A(0; -5)$ и длинной стороны 10.

(2) - 4 точки $C_1(12; 5)$, $C_2(12; -5)$, $C_3(-12; 5)$ и $C_4(-12; -5)$;

4 окружности с центрами C_1, C_2, C_3 и C_4 и

$R = \sqrt{a}$ или  или 



Пока $R < 4$ нет касания; при $R = 4$ изучаем случай $\{a\}$ и 2 касания.

Если $R > 4$, то 4 точки пересеч., до тех пор, пока не

ситуация $\{5\}$. После этого опять нет общих точек.

а) $R = 7 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 49$.

б) $R = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 = \sqrt{a} \Rightarrow \underline{a = 169}$.

Ответ: $a = 49$; $a = 169$.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{x^4}{x^2}} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad N^3$$

$x > 0, y > 0$

(2): $y^2 - (4+x)y - 2x^2 + 8x = 0$

$\Delta = (4+x)^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{4+x \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{4+x \pm (3x-4)}{2} = 2x; -x+4$

1) $y = 2x$

(1): $(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{-\ln \frac{x^4}{2x}} = (2x)^{-\ln \frac{x^3}{2}}$

$x^{-\ln 16x^6} = 2^{-\ln \frac{x^6}{2}} \cdot x^{-\ln \frac{x^6}{2}}$

$x^{-(\ln 16x^6 - \ln \frac{x^6}{2})} = x^{-\ln \frac{16x^6}{(\frac{x^6}{2})}} = x^{-\ln 32} = 2^{-\ln \frac{x^6}{2}}$

$2^{-5\ln x} = 2^{-\ln \frac{x^6}{2}} \Rightarrow 5\ln x = \ln \frac{x^6}{2}$

$\ln x^5 = \ln \frac{x^6}{2} \Rightarrow x^5 = \frac{x^6}{2} \quad x \neq 0 \Rightarrow : x^5$

$2 = x$ $\Rightarrow$ $y = 4$

2) $y = 4-x \Rightarrow \underline{x < 4}$

$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = 2x^{-\ln \frac{x^2}{4-x}}$

$x^{-\ln(x^2(4-x)^4)} = 2^{-\ln \frac{x^2}{4-x}} \cdot x^{-\ln \frac{x^2}{4-x}}$

$x^{-(\ln(x^2(4-x)^4) - \ln \frac{x^2}{4-x})} = x^{-\ln \frac{x^2(4-x)^4}{(\frac{x^2}{4-x})}} = x^{-\ln \left(\frac{4-x}{x}\right)^5} = 2^{-\ln \frac{x^2}{4-x}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{(4-x)^5}{x^5}\right)^{-\ln x} = \left(\frac{x^7}{4-x}\right)^{-\ln 2}$$

$$(4-x)^{-5\ln x} \cdot (4-x)^{-\ln 2} = x^{-7\ln 2} \cdot x^{-5\ln x}$$

$$(4-x)^{-\ln 2 x^5} = x^{-\ln(2^7 x^5)}$$

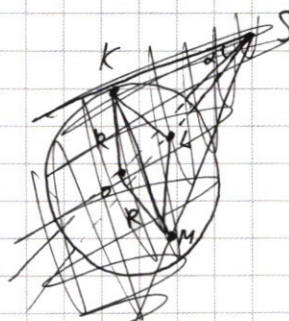
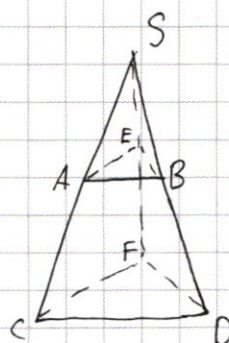
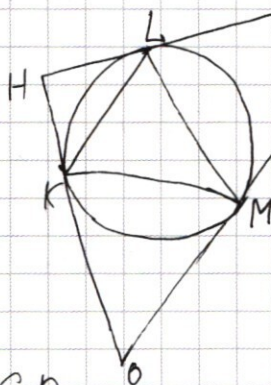
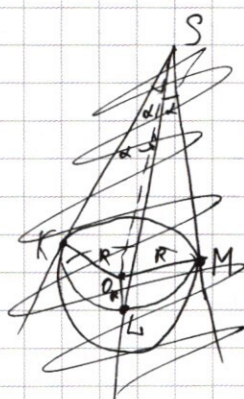
$$(2x^5)^{-\ln(4-x)} = (2^7 x^5)^{-\ln x}$$

~~Итого~~ $x^{-5\ln(4-x)} = \frac{2^{-7\ln x}}{2^{-\ln(4-x)}} \cdot x^{-5\ln x}$

~~Итого~~ $(2x^5)^{-(\ln(4-x) - \ln x)} = 2^{-6\ln x}$

№4

Пусть $SO = a$, $KO = OL = OM = R$



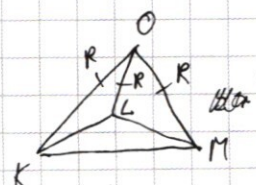
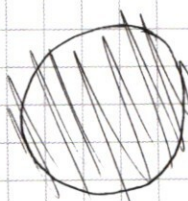
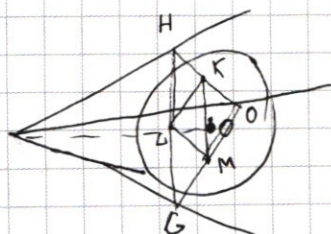
$$\triangle SAB \sim \triangle SCD$$

$$\triangle SAE \sim \triangle SCF$$

$$\triangle SBE \sim \triangle SDF$$

м.к. $\{AEB\} \parallel \{CFD\} \Rightarrow$

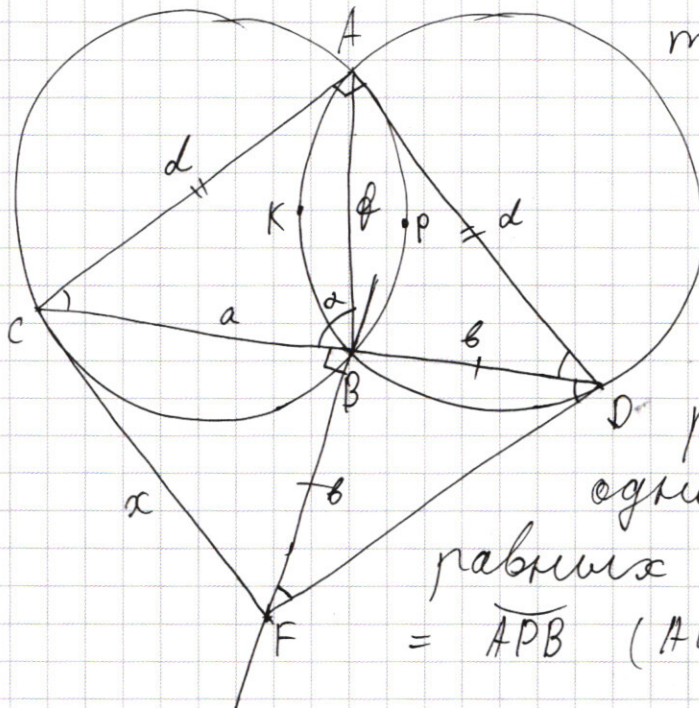
$$\Rightarrow \frac{S_{SAEB}}{S_{SCFD}} = \frac{1}{16} = \frac{S_{SAB} + S_{SAE} + S_{SBE}}{S_{SCD} + S_{SCF} + S_{SDF}}$$





"
"

№ 6



Обозначим некоторые точки K и P так, как это показано на рисунке.

П.к. одинаковые хорды стягивают равные дуги в одной окр., то и в равных точках $\Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{APB}$ (AB - общ. хорда) $\Rightarrow$

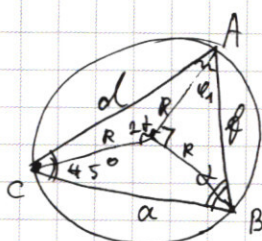
$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$ (равн. окр.) $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$
и $\triangle CAD$ - прям. и равноб. $\Rightarrow AC = AD$.

$\triangle DBF$ - прям. ($BF \perp CD$) и равноб. ($BD = BF$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

$\angle ADF = \angle ADC + \angle BDF = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow FD \perp AD \perp AC \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \parallel FD$.

$$x^2 = a^2 + b^2, \quad (a+b)^2 = 2d^2$$

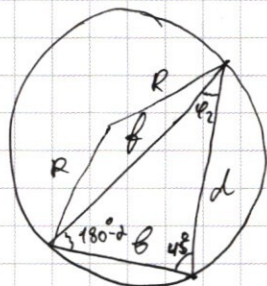


$$d^2 = 2R^2(1 - \cos 2\alpha), \quad \phi^2 = 2R^2$$

~~$$x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$~~

$$\phi^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos 45^\circ = a^2 + d^2 - \sqrt{2}ad$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$f^2 = d^2 + b^2 - 2db \cos \phi = d^2 + b^2 - \sqrt{2}db$$

$$\cancel{a^2 + d^2 - \sqrt{2}da} = \cancel{b^2 + d^2 - \sqrt{2}db}$$

$$\cancel{(a-b)(a+b)} = \cancel{\sqrt{2}d(a-b)} \Rightarrow 0$$

$$\varphi_1 = 180^\circ - \alpha - 45^\circ = 135^\circ - \alpha$$

$$\varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1 = 90^\circ - 135^\circ + \alpha = \alpha - 45^\circ$$

$$a^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos \varphi_1$$

$$b^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos \varphi_2$$

$$a^2 + b^2 = 2(d^2 + f^2) - 2df(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) =$$

$$= 2(d^2 + f^2) - 2df(\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1) =$$

$$= 2R^2 - 4R^2 \cos 2\alpha + R^2 - 2 \cdot 2R^2 \sqrt{1 - \cos 2\alpha} \cdot$$

$$\cdot (\cos(135^\circ - \alpha) + \sin(135^\circ - \alpha)) =$$

$$= 4R^2(2 - \cos 2\alpha - \sqrt{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1)) =$$

$$= 4R^2(2 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha} (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1)) =$$

$$= 4R^2(1 + 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sqrt{2} (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1)) =$$

$$= 4R^2(1 + 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(\varphi_1 + 45^\circ)) =$$

$$= 4R^2(1 + 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot 2 \sin(180^\circ - \alpha)) =$$

$$= 4R^2(1 + 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha) =$$

$$= 4R^2 = x^2 \Rightarrow \underline{x = 2R = 20}.$$

$$\boxed{CF = 20}$$

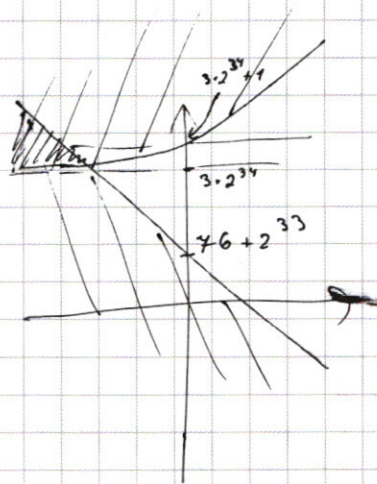
24

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 76 + 2(2^{32} - 1)x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} & \nearrow \nearrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 76 + 2^{33} - 2x & \searrow \searrow \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• $(\cos 2x - \sin 2x)(2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$

1) $\cos 2x = \sin 2x$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

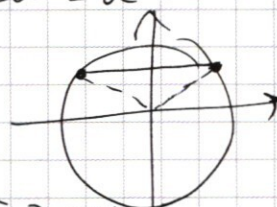
$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$

$\sqrt{2} \cos 5x \sin 2x + \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = \cos 2x + \sin 2x$

$\sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x$

$\sin 7x = \sin 45^\circ \cos 2x + \cos 45^\circ \sin 2x =$
 $= \sin(2x + 45^\circ)$



a) $7x = 2x + 45^\circ + 2\pi n \Rightarrow 5x = 45^\circ + 2\pi n$
 $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $7x + 2x + 45^\circ = 180^\circ$

$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m \Rightarrow 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}$

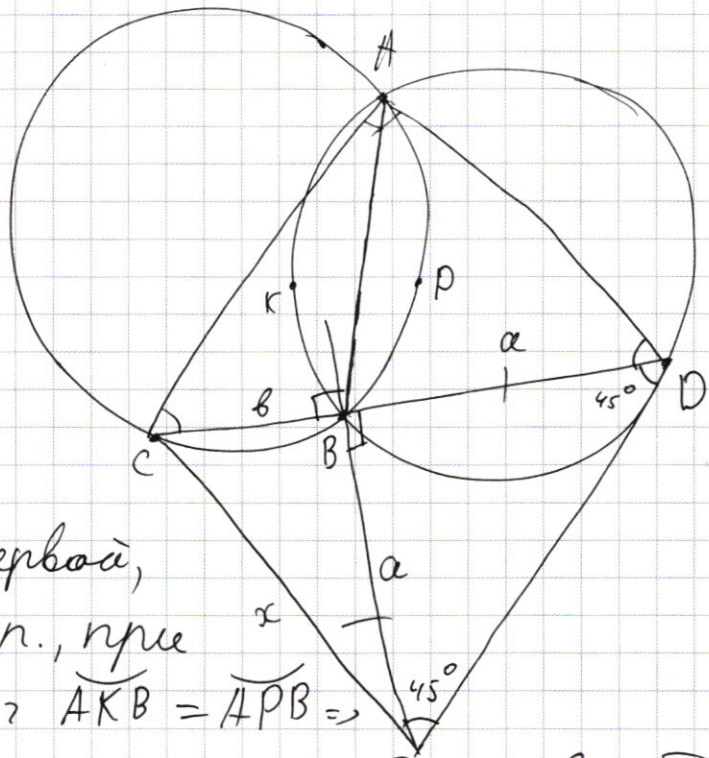
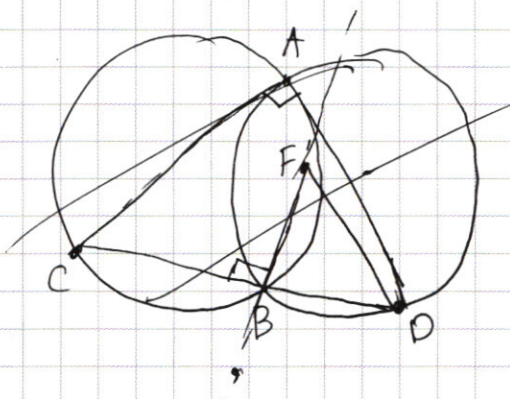
$a^2 = 2R^2(1 - \cos 2x)$

$a^2 = 2R^2(1 - \cos(360^\circ - 90^\circ - 2x)) = 2R^2(1 - \cos(90^\circ + 2x))$

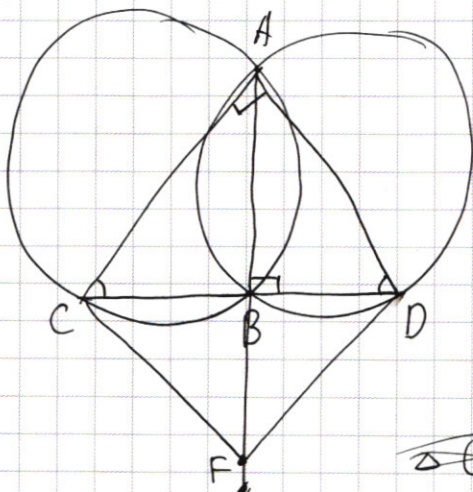
$b^2 = 2R^2(1 - \cos 2(45^\circ + 180^\circ - x)) =$

$= 2R^2(1 - \cos(90^\circ + 360^\circ - 2x)) = 2R^2(1 - \sin(90^\circ + 2x))$

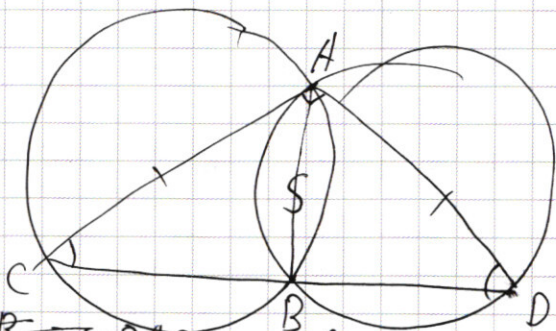
$(ab)^2 = 4R^4(1 - \cos(90^\circ + 2x))(1 - \sin(90^\circ + 2x)) = 4R^4(1 - \sin x \cos x + \sin x \cos x)$



AB - хорда и в первой,
и во второй окр., при
этом $R_1 = R_2 \Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{APB} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC \Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедренный.



~~В~~



~~$\triangle CAB = \triangle DAB$ (по двум сторонам и углу)~~

$\Rightarrow F \in AB$ и
и $CB = BD = FB$

$AC = AD \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABD}$
 $\widehat{AKB} = \widehat{APB}$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = BD \Rightarrow \angle CAB = \angle BAD \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB$ - бис. в равноб. $\triangle \Rightarrow AB$ - вис., бис. и мед. $\Rightarrow$

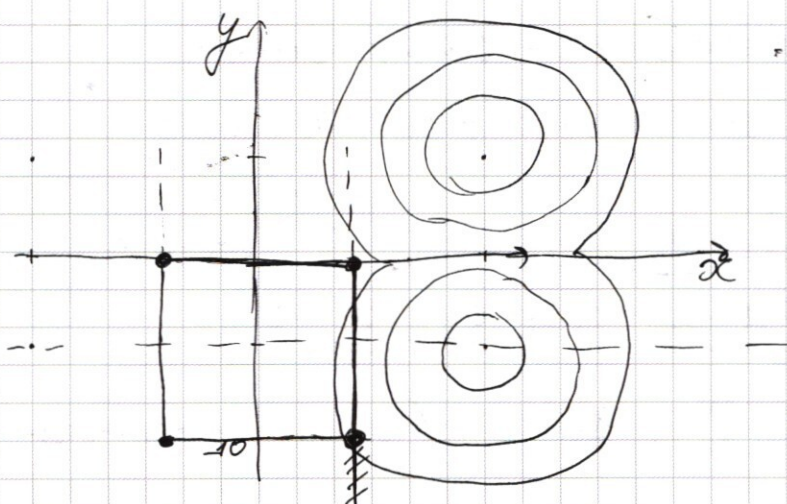
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5) |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$[(x|-12)^2 + (y|-5)^2 = a \quad (2)$$

(2) → „клевёр“, составленный из ^{четырёх} двух окр. или
4 окр. с $C_1(12; 5)$, $C_2(-12; 5)$, $C_3(12; -5)$, $C_4(-12; -5)$.
или 4 т. C_1, C_2, C_3 и C_4

$$R = \sqrt{a}$$



$$|(y+5)+x| + |(y+5)-x| = 10$$

$$|y+x| + |y-x| = 10$$

$$1) x > -y$$

$$2) x < -y$$

$$2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

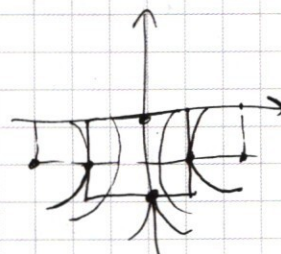
$$1) x > -(y+5) \Rightarrow y > -(x+5)$$

$$a) x < (y+5)$$

$$2(y+5) - x - x = 10 \Rightarrow (y+5) = 5 \Rightarrow y = 0$$

$$b) x \geq (y+5) \Rightarrow y \leq x-5$$

$$(y+5) + x + x - (y+5) = 10 \Rightarrow x = 5$$

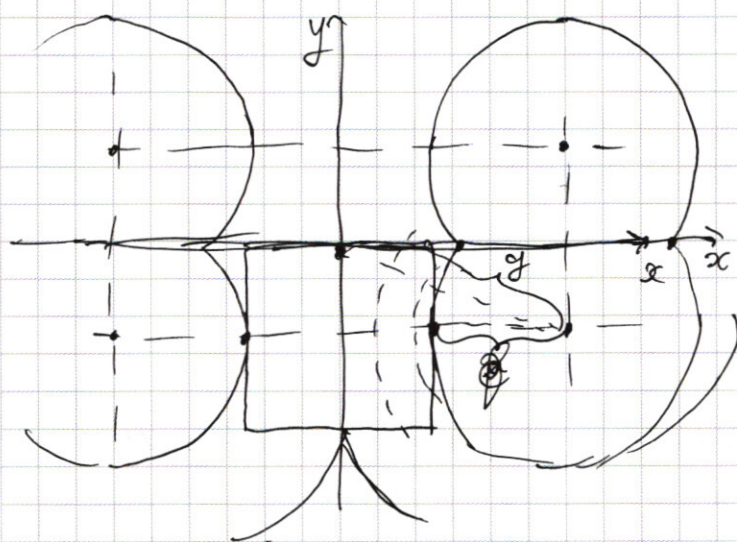


$$2) x \leq -(y+5) \Rightarrow y \leq -(x+5)$$

$$a) x < (y+5) \Rightarrow y > x-5$$

$$-x - (y+5) + (y+5) + x = 10 \Rightarrow x = -5$$

$$b) x \geq (y+5) \Rightarrow -x - (y+5) + x - (y+5) = 10 \Rightarrow (y+5) = -5 \Rightarrow y = -10$$



$$d = 12 - 5 = 7 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 49$$

$$g = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 169$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x = \cos(5x + 4x) = \cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x$$

$$\sin 9x = \sin(5x + 4x) = \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1 + \sin 4x) + \sin 5x (\cos 4x + 1 - \sin 4x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 5x (\sin 4x - 1) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) - \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 5x (\sin 4x - 1) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) - (\sin 4x - 1)(\sin 5x - \cos 5x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos \frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos \frac{(x+y)}{2} - \cos \frac{(x-y)}{2} = \cos x \cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y = -2 \sin x \sin y$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2 \sin 2x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cos 2x = 0$$

$$\sin(\overset{a}{x+y}) + \sin(\overset{b}{x-y}) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y$$

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad y = \frac{a-b}{2}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 4x \cos 2x$$

$$\therefore -\sqrt{2} \cos 4x = -\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sqrt{2} \sin 4x \cos 2x - \cos^2 2x + \sin^2 2x - \sqrt{2} \sin 2x \sin 4x = 0$$

$$= \cos 2x (\sqrt{2} \sin 4x - \cos 2x) - \sin 2x (\sqrt{2} \sin 4x - \sin 2x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{r|l} 9 & 261 \\ 3 & 087 \\ 10 & 29 \\ 3 & 437 \\ 4 & 97 \\ 4 & 47 \\ 1 & \end{array} \right\} \begin{array}{l} 9261 = 21^3 \\ 3^3 \cdot 7^3 \end{array}$$

$\Rightarrow$ в числе есть 3
семерки и либо 3
тройки, либо 1 тройка
и 1 девятка, а ост-
единицы

C_8^3 - кол-во способов поставить семерки

C_5^3 - кол-во способов поставить 3 тройки

$5 \cdot 4$ - кол-во способов поставить тройку и девятку

$$k = C_8^3 (C_5^3 + 5 \cdot 4) = \frac{8!}{3!5!} \left(\frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!} \right) =$$

$$= \frac{8! \cdot 8!}{3!5!3!} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{8! \cdot 3}{2 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 4} = 40 \cdot 42 = 1680$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 9x = \frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 9x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 5x = \cos\left(-\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 4x = \cos \pi = -1$$

$$\sin 9x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{x}{x^2}} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(2) y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y = \frac{x+4 \pm \sqrt{x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x}}{2} = \frac{x+4 \pm \sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{2}$$

$$= \frac{x+4 \pm \sqrt{(3x-4)^2}}{2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$1) x > \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$= 2x; -x+4$$

$$1) y = 2x \Rightarrow (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{x}{x^2}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{x}{x^2}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{-\ln \frac{x^6}{2}}$$

$$2x = a$$

$$(a)^{-\ln x} = a^{-\ln \frac{x^6}{2}}$$

$$x^{-\ln 16x^6} = 2x^{-\ln \frac{x^6}{2}}$$

$$x^{-\ln(16x^6)} = (2x)^{-\ln \frac{x^6}{2}}$$

$$= x^{-(\ln 16 + 6\ln x)} = x^{-\ln 32 - 6\ln x} = x^{-\ln 32} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{-5} \cdot x^{-6\ln x}$$

$$x^5 \ln x = x \ln \frac{x^6}{2}$$

$$x^5 = \frac{x^6}{2}$$

$$(x=2) \quad y=4$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$= c^{\log \frac{a}{c^6} \cdot \log c} =$$

$$= a^{\log c}$$

$$x^{-\ln(16x^6)} = 2^{-\ln \frac{x^6}{2}}$$

$$x^{-\ln(\frac{x^6}{2})} = 2^{-5\ln x} = 2^{-\ln x^5} = x^{-5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $y = -x + 4$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{x^2}{2}}$$

$$x^{-\ln x^2(4-x)^4} = (4-x)^{-\ln \frac{x^6}{2}}$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = \left(\frac{x^6}{2}\right)^{-\ln(4-x)}$$

$$\cancel{(4-x)^4 \ln x} = \frac{\left(\frac{x^6}{2}\right)^{-\ln(4-x)}}{x^{-2 \ln x}} =$$

$$= \frac{x^{-6 \ln(4-x)}}{2^{-\ln(4-x)} x^{-2 \ln x}} = \frac{x^{2 \ln x - 6 \ln(4-x)}}{2^{-\ln(4-x)}}$$

$$= \frac{x^{-2(\ln \frac{(4-x)^3}{x})}}{2^{-\ln(4-x)}} = \frac{(4-x)^6 \ln x}{x^{-2 \ln x} \cdot 2^{-\ln(4-x)}} =$$

$$= \frac{(4-x)^6 \ln x}{x^{-2 \ln x} \cdot (4-x)^{-\ln 2}} = \frac{(4-x)^{-\ln \frac{x^6}{2}}}{x^{-2 \ln x}} = (4-x)^{-4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = (4-x)^{-\left(\ln \frac{x^6}{2} - 4 \ln x\right)} =$$

$$= (4-x)^{-\ln \frac{x^2}{2}} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-\ln(4-x)} = \frac{x^{-2 \ln(4-x)}}{2^{-\ln(4-x)}}$$

$$2^{-\ln(4-x)} = x^{-2(\ln(4-x) - \ln)}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\frac{\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x + \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x}{\div \cos 4x}$$

~~$$\cos 5x - \sin 5x \tan 4x - \frac{\cos 5x}{\cos 4x} - \sqrt{2} + \frac{\sin 5x}{\cos 4x}$$~~

$$\begin{aligned} & (\cos^2 2x - \sin^2 2x)(\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x) - \\ & - 2 \sin 2x \cos 2x (\sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x) - \\ & - \cos 3x \cos 2x + \sin 3x \sin 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x + \\ & + \sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x \end{aligned}$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x - 1) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x + 1) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned} & \cos 5x (\cos^2 2x - \sin^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x - \\ & - \sin^2 2x) + \sin 5x (\cos^2 2x - \sin^2 2x - \\ & - 2 \sin^2 2x \cos 2x + \sin^2 2x + \cos^2 2x) - \\ & - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2 \cos 5x \sin 2x (\sin 2x - \cos 2x) + \\ & + 2 \sin 5x \cos 2x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \end{aligned}$$

$$2(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 5x \sin 2x + \sin 5x \cos 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

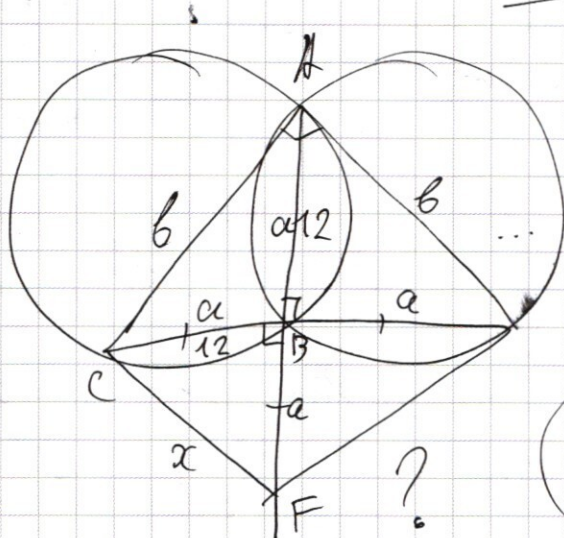
$$2(\cos 2x - \sin 2x) \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned} & 2 \cos 2x \sin 7x - 2 \sin 2x \sin 7x - \\ & - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(\cos 2x - \sin 2x) \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \\ & (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b = x = \sqrt{2}a$$



△ ABC - впис в окр. и
прям, b - гип. ⇒
⇒ b = 2R = 20

$$x = b = 20$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} - 2x$$

одн. т. перес.

$$2^x + 2x = 76 - 2^{33} (6-1) = 76 - 5 \cdot 2^{33} < 0$$

$$3 \cdot 2^{34} > 2^{33} + 76$$

$$3 \cdot 2^{34}$$

$$22/22$$

$$D = 1 - \sin y - \cos y + \sin y \cos y$$

$$\sin y + \cos y = \sqrt{2} \sin(y + 45^\circ)$$

$$a^2 - \sqrt{2} ad - b^2 + \sqrt{2} bd = 0$$

$$(a+b)^2 = 2d^2$$

$$x^2 = a^2 + b^2 = 2d^2 - 2ab$$

$$(a-b)(a+b) - \int_1^2 d(a-b) = 0$$

$$(a - \cancel{a}) (a + b - \sqrt{2}d) = 0 \Rightarrow$$

$$(a+b)^2 = 2d^2$$

~~$a = b$
 $a + b = \sqrt{2}d$~~

$$2y = 180^\circ + 42$$

$$\sin y + \cos y = \sqrt{2} \cos(y - 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(y - \frac{\pi}{4})$$

$$I = 2P^2 (1 - \cos 2(\alpha + \beta)) =$$

$$\varphi' = 180^\circ - 2(\beta + \frac{180^\circ - \rho}{2}) =$$

$$= 2R \sqrt{1 - \cos 2(135^\circ)} =$$

$$= 2R^2 (1 - \cos 270^\circ) = 180 - 2\beta - 180 + 4 =$$

$$\beta + \frac{180 - \alpha}{2} =$$

$$r = 2R(1 - \cos 90^\circ) = 4 - 2R$$

$$d^2 = 2R^2(1 - \cos(\varphi - 2\beta))$$

$$2a^2 + a^2 - 2ad \cos 45^\circ = a^2 + a^2 - \sqrt{2}ad = 2R^2 = d^2 + b^2 - \sqrt{2}bd$$

$$a^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos \beta = 2R^2(1 - \cos 2\alpha) + 2R^2(1 - \cos(\alpha - 2\beta)) - 2 \cdot 2R^2 \sqrt{(1 - \cos 2\alpha)(1 - \cos(2(\alpha + \beta)))}$$

$$P^2 = 2R^2$$