

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

Разложим число 64827 на множители:

$$64827 = 7^4 \cdot 3^3$$

Пак как $7^2 = 49$ - не цифра, то в числе будут четыре цифры 7. Тогда возможны два состава цифр: 1) 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1.

2) 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1

~~Рассчитаем~~ Посчитаем число комбинаций в обоих случаях:

1) $\frac{8!}{4! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$ (четыре повторяющихся цифры 7 и три повторяющихся 3)

2) $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 840$ (четыре повторяющихся цифры 7 и две повторяющихся цифры 1)

Ответ: 1120 чисел.

N2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

При помощи метода вспомогательного угла имеем:

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{1+1} \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{1+1} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot (2 \cos 5x - 2 \sin(2x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos x - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ 2 \sin(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \pi n \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n \\ \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x + \frac{\pi}{28} = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi n \Rightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n$, $x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(1 - \frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} &= x^{2\ln(xy^2)} \quad N3. \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

Занедем ограничения на x и y :

$$y < 0, x > 0$$

Прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию e

$$\ln(-y) + \ln\left(1 - \frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) \cdot (\ln x^7 - \ln(-y)) = 2(\ln x + 2\ln(-y)) \cdot \ln x$$

$$\text{Пусть } a = \ln(-y), b = \ln x$$

$$a(7b - a) = 2b^2 + 4ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a - 2b)(a - b) = 0$$

$$\begin{cases} \ln(-y) = 2\ln x & \Rightarrow y = -x^2 \quad (1) \\ \ln(-y) = \ln x & \Rightarrow y = -x \quad (2) \end{cases}$$

Теперь подставим y во второе уравнение системы

$$1) y = -x^2$$

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \quad | :x, \text{ т.к. } x > 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $x=3$ - корни и вынесем $(x-3)$ за скобку.

$$(x-3)(x^2+x-4)=0$$

$$(x-3) \cdot \left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

Однако $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$, что не подходит нам

Получаем: $x_1=3, y_1=-9$
 $x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, y_2=\frac{2\sqrt{17}-18}{4}$

2) $y=-x$

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0 \quad | :x, \text{ т.к. } x > 0$$

$$-4x + 8 = 0$$

$$x=2$$

Тогда $y=-2$

Ответ: $(3, -9), \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{2\sqrt{17}-18}{4}\right), (2, -2)$.

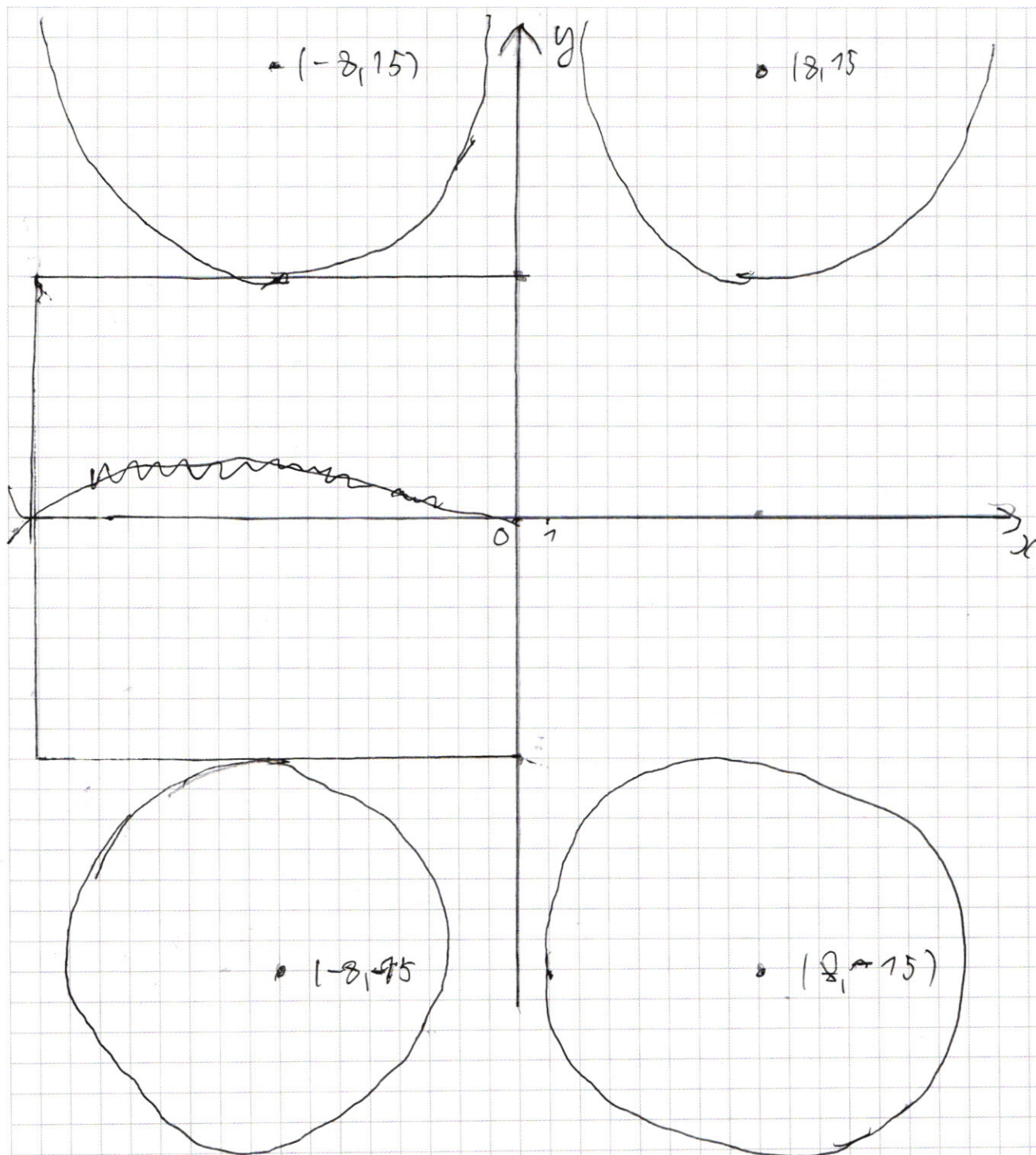
N 5.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ ((x)-8)^2 + ((y)-15)^2 = 4 \end{cases}$$

два решения

Первое уравнение задает квадрат со стороной 16 с центром в точке $(-8, 0)$ и сторонами параллельными осям координат.

Второе уравнение задает четыре окружности с центрами в точках $(8, 15), (-8, 15), (8, -15), (-8, -15)$. При этом ~~ни одна из~~ каждая из них существует только в одной четверти



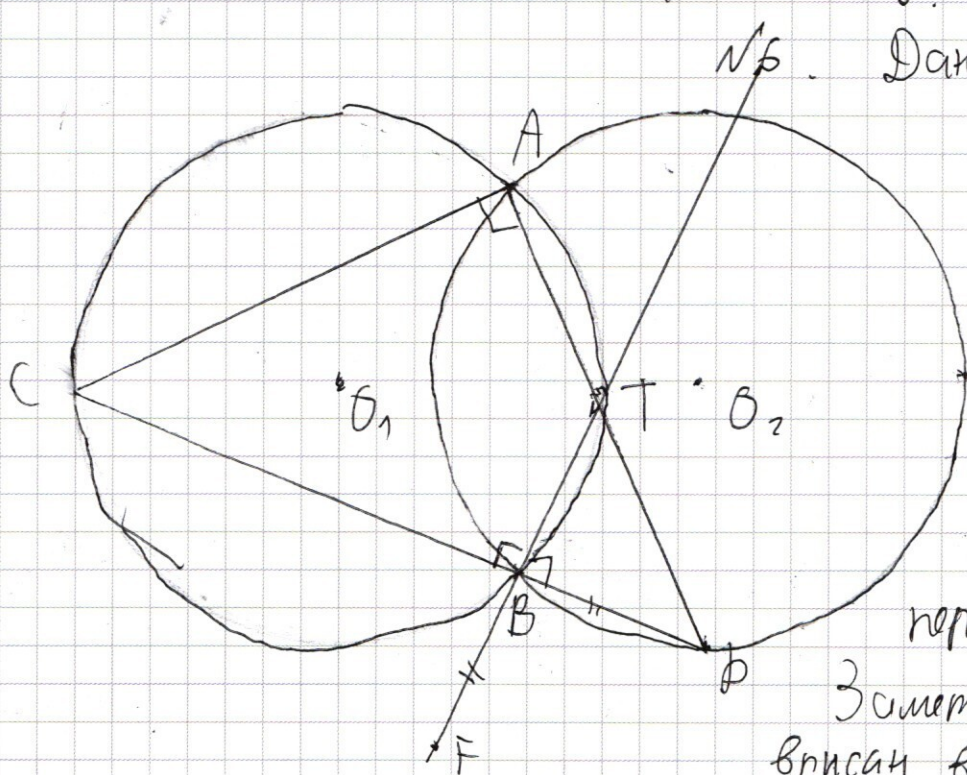
Заметим, что нижняя окр. пересекает квадрат в столько же точек, в сколько и верхняя, и если левая окр. пересекает правую сторону, то точка пересечения совпадает с точкой пересечения правой окр.

Таким образом возможны два случая

1) левая нижняя и левая верхняя касаются одной стороны квадрата

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Потому радиус равен 7, соответственно $a = 49$.
2) Верхняя и нижняя окружности
пересекаются в квадрате в точках $(-16, 0)$ и $(0, 0)$.
Потому $R^2 = 8^2 + 15^2 = 289 = a$.
Ответ: $a = 49$ и $a = 289$.



Дано: $\angle CAP = \frac{\pi}{2}$
 $R_1 = 17 = R_2$
 $BF = BD$

Найти: а) CF

б) S_{ACF} если
 $BC = 16$

а) T — точка
пересечения AD и BF .

Заметим, что $ACBT$ — ~~вписан~~
вписан в окр. и T лежит

на окр.

$\triangle ADC \sim \triangle BDT$, тогда $\triangle BDT$ и
 $\triangle ADC$ — равнобедренные.

$\triangle CTF$ — равнобедр., т.к. $CT = CF$, CT проходит
через центр окр., тогда $CF = CT = 2R = 34$

б) $BT = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30 = BD = BF$

$\sin BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$

$\sin ACF = \sin\left(\frac{\pi}{4} + BCF\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15}{17} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{17} = \frac{23\sqrt{2}}{34}$

$\cos BCF = \frac{BC}{BF} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$
 $AC = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}}$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin ACF = \frac{1}{2} \cdot \frac{46}{\sqrt{2}} \cdot 34 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{34} = \frac{23\sqrt{2}}{23^2} = 23^2$$

$$= 529$$

Ответ: а) 34 б) 529

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

два значения

$$a = r^2$$

$$1) 2x + 16 = 16$$

$$x = 0$$

$$2) -x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

$$-2x = 32$$

$$x = -16$$

$$3) -x - y - 8 + x - y + 8 = 16$$

$$-2y = 16$$

$$y = -8$$

$$4) x + y + 8 - x + y - 8 = 16$$

$$2y = 16$$

$$y = 8$$

$$1.1) x > 0, y > 0$$

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$1.2) x < 0, y > 0$$

$$(x+8)^2 + (y-15)^2 = a$$

$$1.3) x > 0, y < 0$$

$$(x-8)^2 + (y+15)^2 = a$$

$$1.4) x < 0, y < 0$$

$$(x+8)^2 + (y+15)^2 = a$$

1) случай - рас-
ши

2) совпадение
двух точек

$$1) 49$$

$$2) r^2 = 64 + 225 = 289$$

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 3(31 + 3^{27} \cdot x - x) \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3(3^{27} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} = 93 + 3^{28}x - 3x$$

$$3^{28} \cdot 4 = 3^{28}x - 3x$$

N6.

$$\angle CAP = \frac{\pi}{2}$$

$$DA \cdot DT = DB \cdot DC$$

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DB}{DT}$$

$$R_{1,2} = 17$$

$$BF = BD \quad (CF = ?)$$

$$\angle + B = \frac{\pi}{2}$$

$$\delta + \Delta = \frac{\pi}{2}$$

BT

$$\angle CDA = \angle ACD = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle DTB = \frac{\pi}{2}$$

$$DB = DT = BF$$

$\triangle CFT$ - равнобед.

$$CF = CT = 2R = 34$$

$$\delta) BC = 16 \quad (T = 34)$$

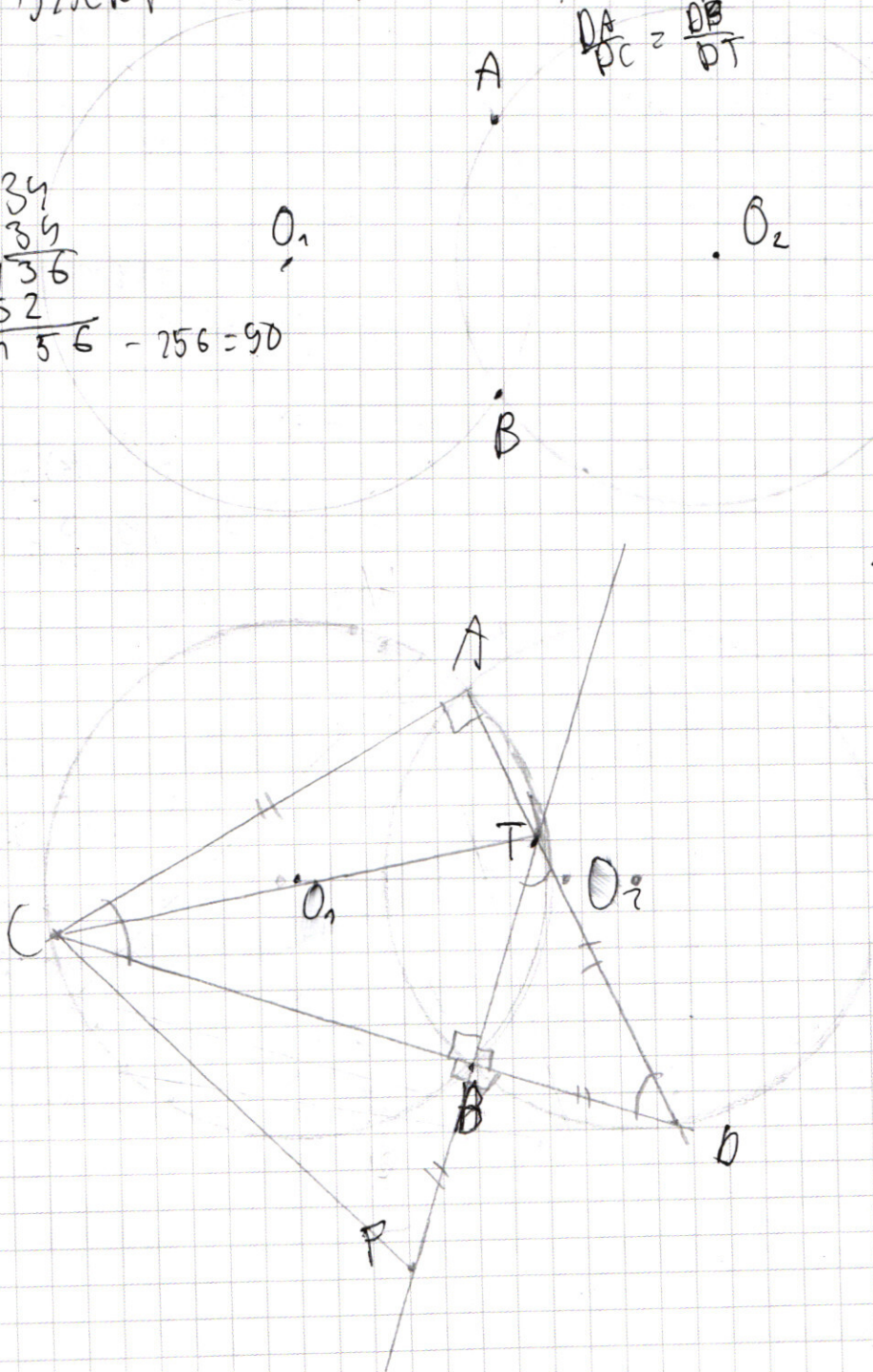
$$S_{\triangle ACF} = ?$$

$$BT = 34^2 - 256$$

$$= 30 = BP = BF$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ 1020 \\ \hline 1156 \end{array} \quad - 256 = 90$$

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ 460 \\ \hline 529 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1.

$$64827 = 7^4 \cdot 3^3$$

$$1) 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$2) 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$1) 4 - (7)$$

$$3 - (3)$$

$$2) 4 - (7)$$

$$2 - (7)$$

$$1) \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

$$2) \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 840$$

Ответ: 1120 чисел.

N 2.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos 5x + \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0 \quad \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 5x - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{2}) - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2 \sin(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \pi n & \Rightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{8} = \pi n & \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{7x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n & \Rightarrow x + \frac{\pi}{28} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{7}\pi n \Rightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)} \quad \text{№3.} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0 \\ 0 < y < 0 \end{cases}$$

$$(x+y)^2 - 4x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$(x+y)^2 + 4(x+y) + 8x - 4x^2 = 0$$

$$\ln\left(\left(1 - \frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}\right) = \ln(x^{2\ln(xy^2)})$$

$$\ln(-y) \cdot \ln\left(1 - \frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\ln(-y) \cdot (7\ln x - \ln(-y)) = 2(\ln x + 2\ln y) \cdot \ln x$$

$$(a-2b)(a-b)=0$$

$$\begin{cases} a=2b \\ a=b \end{cases}$$

$$a(7b-a) = 2(b+2a) \cdot b$$

$$7ab - a^2 = 2b^2 + 4ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a(a-b) + 2b(b-a) = 0$$

$$a(a-b) - 2b(a-b) = 0$$

$$1) \quad x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 12x - 4x^2 = 0 \quad | : x > 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x=3 - \text{корень}$$

$$3^3 - 2 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 12 \neq 0$$

$$27 - 18 - 21 + 12 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 7x + 12 \\ - x^3 - 3x^2 \\ \hline x^2 - 7x + 12 \\ - x^2 - 3x \\ \hline -10x + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 7x + 12 \\ - 4x + 12 \\ \hline 18 - 2\sqrt{14} \\ \hline 9 \end{array}$$

$$y = -9$$

$$y = \frac{18 - 2\sqrt{14}}{9}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$2) \quad y = -x$$

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad x = 2 \quad y = -2$$