

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

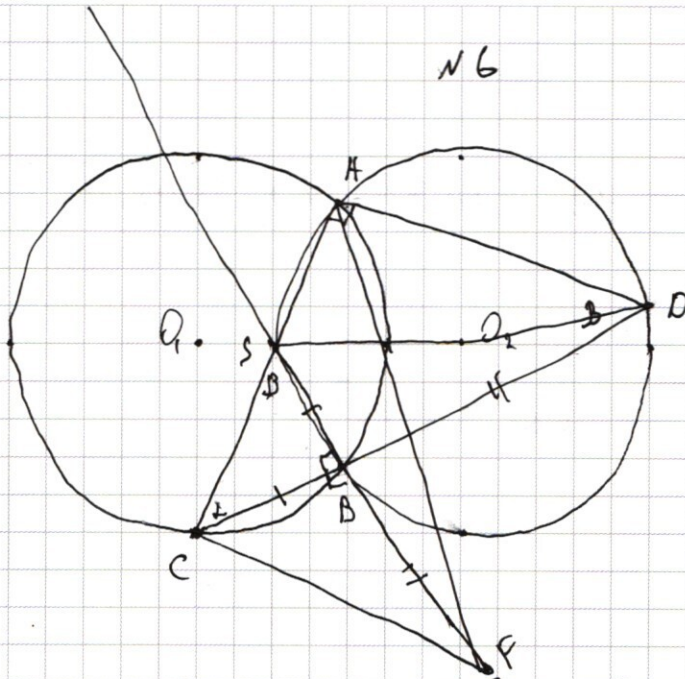
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$CA \cap O_2 = \emptyset$$

$$BF \perp O_2 = 5'$$

BF $\perp$ $O_2 = S$ м.к. SD - расстояние ($\angle 4 = 90^\circ$) и

$\angle B = 90^\circ \Rightarrow$ опирается на диаметр $\Rightarrow$ диаметрально-противоположная точка $KD - S \in \angle DBS' \Rightarrow S = S'$

$$L S C B = L \quad L C S B = B$$

$$B = 90 - \alpha \quad (\Delta CCB - \text{норм.})$$

$$\angle CAD = 90^\circ - \alpha (\triangle CAD - \text{прям.}) = \beta$$

44

$$\Delta O_1 AB = \Delta O_2 AB \text{ (по 3-м сторонам, боковая и гипотенуза R)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A Q_1 B \subset \angle A Q_2 B \Rightarrow \vee AB (\text{окр } O_1) = \vee AB (\text{окр } O_2)$$

gpc, demarene von 0,02

$$\cup AB \cap C = 2B \cap (A \cup B)$$

$$\hookrightarrow AB = 2 \wedge (ACB) \Rightarrow 2 = 3 \Rightarrow A \text{ CSB-prüf} (CB = SB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CBF = \angle SBD \text{ по 2-м условиям и } \angle 90^\circ =$$

$$CF = SD = 2R = 10 \quad \text{Anmerk.: } 10$$

№ 6 δ

$$CB = 6$$

$$(F = 10 \text{ (мг а)})$$

$$BF = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$BS = BC = 6$$

$$\Delta FCR - \text{пр.} \delta \text{ м.к } CF = CR = 2R = 10 \quad (CR = 2R \text{ м.к } \angle ABC = 90^\circ)$$

$$\Delta CBS: \text{пр.} \delta \text{ и пр.м}$$

$$\text{по м. } \text{Thm. } CS^2 = 6^2 + 6^2$$

$$CS = 6\sqrt{2}$$

$$SF = FB + BS = 6 + 8 = 14$$

$$\text{по м. } \cos \text{ для } \Delta SCF:$$

$$\angle \varphi = \angle SCF = \angle ACF$$

$$36 \cdot 2 + 100 - 120\sqrt{2} \cos \varphi = 14^2$$

$$172 - 120\sqrt{2} \cos \varphi = 196$$

$$120\sqrt{2} \cos \varphi = -24$$

$$\cos \varphi = \frac{-24}{120\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{10}}$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100}$$

$$\sin \varphi = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

DF;

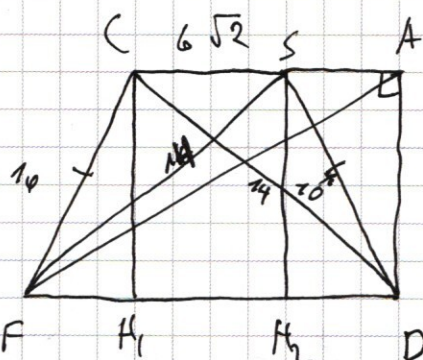
$\Delta FBD \sim \Delta CBS$ по трем углам и 1:1 отрезкам отрезка,

образующих прямой угол

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D \parallel CF$ по конкретности. $\angle CSF \text{ и } \angle SFD$
равны из $\sim \Rightarrow$

$CSFD$ - PIB трапеция $CF=SD$ и $CS \parallel FD$
ок.



$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 28 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\cos \angle FCD = \cos \angle BCF = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$FD^2 = 10^2 + 14^2 - 280 \cdot 0,6$$

$$= 100 + 196 - 280 \cdot \frac{6}{10} =$$

$$= 296 - 168 = 128$$

$$296 - 280 \cdot \frac{6}{10} = 296 - 168 = 128$$

$$FD = \sqrt{128} = \sqrt{2 \cdot 2^3} = 8\sqrt{2}$$

$$FH_1 + H_1H_2 + H_2D = 8\sqrt{2}$$

$$H_1H_2 = 6\sqrt{2}$$

$$H_1H_2 + H_2D = 2\sqrt{2} \text{ и } FH_1 = H_2D \text{ т.к. тр. } PIB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FH_1 = H_2D = \sqrt{2} \quad H_2D = 1A$$

$$CA = CS + SA = 7\sqrt{2}$$

$$LACF = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC \cdot \sin \angle ACF =$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 560 \\ 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{49 \cdot 2}{2} = 49$$

Ответ: 49 = S ACF

№ 1

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

т.к. произведение ~~не~~ 0, значит нулей нет

возможны 2 случая

5 - количество цифр числа, $\neq 1$

$$I \ S = \{5; 5; 5; 3; 3; 3\} \quad C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 560$$

$$II \ S = \{5; 5; 5; 9; 3\} \quad C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 56 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 560$$

считаемой цифрой кроме 0, $\therefore 5$ является 5 т.к.

нужно число делится на 5^3 или делится на 5^4 , то

ровно 3 еще цифры 5

цифры, $\therefore 3 : 3; 6; 9$ - если бы в числе была цифра 6, то произведение цифр было бы нежно

значит 6 нет, если бы было хотя бы 2 числа 9, то

III цифр делится бы на 3^4 , но делится только на 3^3

значит S состоит из 3-х '5', ~~и~~ а либо 333, либо 93

$$I + II = \text{всего способов} : 3 \cdot 560 = \boxed{1680} \quad \leftarrow \text{Ответ}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

... № 1

число способов составить число из

$$\{5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1\}:$$

позиции '5' выбираются C_8^3 способами,

позиции '3' C_5^3 (5 мест) остаются, остальные места — '1'

$$\{5; 5; 5; 9; 3; 1; 1; 1\}$$

позиции '5' — C_8^3 способами,

позиции '9' C_5^1 т.к. нужно выбрать одно место из 5 ост.

Остаточные для '3'

№ 5

$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

$$y - 3 - x \geq 0$$

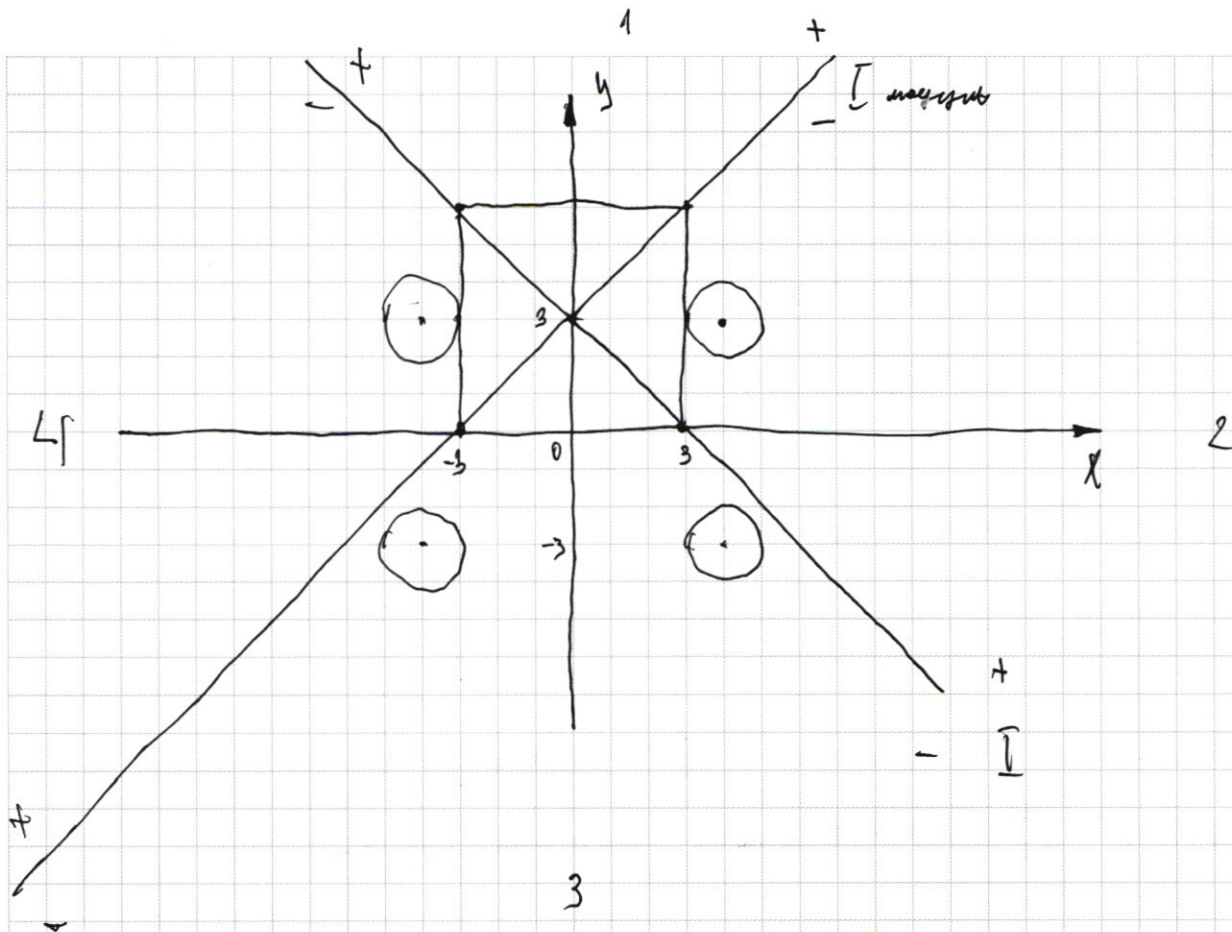
$$y - 3 + x \geq 0$$

$$y = x + 3$$

$$y = -x + 3$$

прямые и разбивают плоскость на 4 части, в каждой

из которых можно раскрыть $\pm$ каждый модуль с опр. знаком:



$$1. y-3-x+y-3+x=6$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y=6$$

$$2. -y+3+x+y-3+x=6$$

$$x=3$$

$$3. -y+3+x-y+3-x=6$$

$$-2y+6=6$$

$$y=0$$

$$4. -x+3+y-x+3-y=6$$

$$x=-3$$

$$x-3-x+y+3-y=6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ график 2 - окружность с центром $(4; 3)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т. к. $x \rightarrow |x|$ и $y \rightarrow |y|$, то график симметричен относительно

O_x и $O_y \Rightarrow$ график — ^{окружность, $R = \sqrt{a}$} и окр. симметричен центром

$(4; 3) \mid (-4; -3) \mid (4; -3) \mid (-4; 3)$

при $R < 1$ нет решений

при $R = 1$ ² ~~одно~~ решение $\Rightarrow a = 1$

при $R \in [1; 5]$ — 2 решения

при $R = 5$ — 2 решения $(0; 0)$ и $(0; 6)$

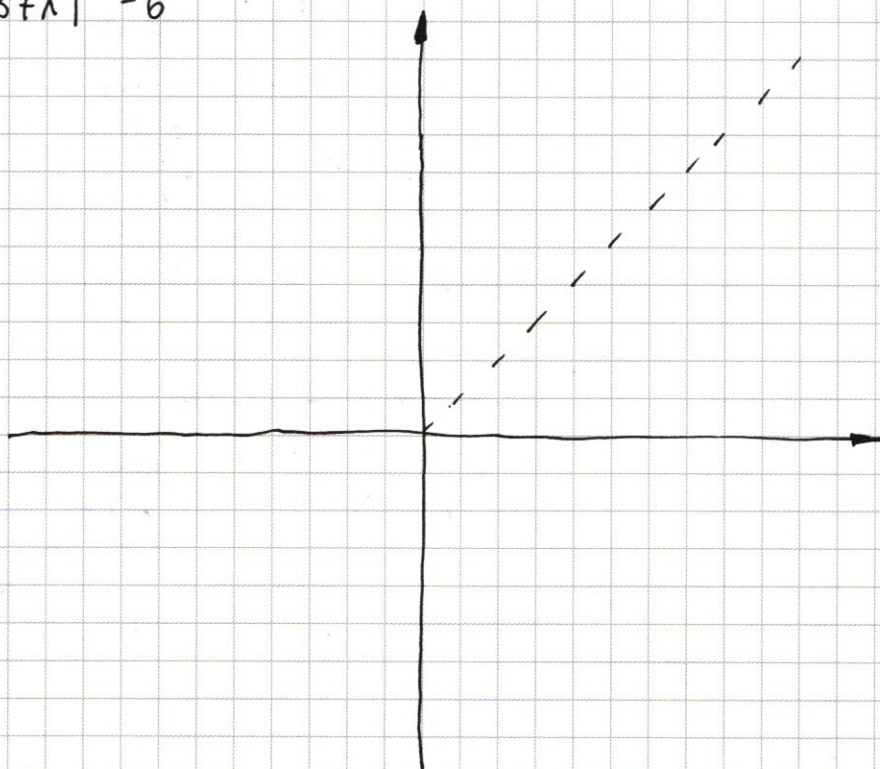
при $R > 5$ нет решений

Ответ: $a = 1$; $a = 25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$



I $x \geq 0, y \geq 0$
 $x \geq y$

$y \geq x+3$

$$(x-1)^2 + (x-2)^2 = a$$

II $(|x|-1)^2 + (|y|-3)^2 = a$

при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ - окружность с $r = \sqrt{a}$

$O(1; 3)$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$y-3-x=0$$

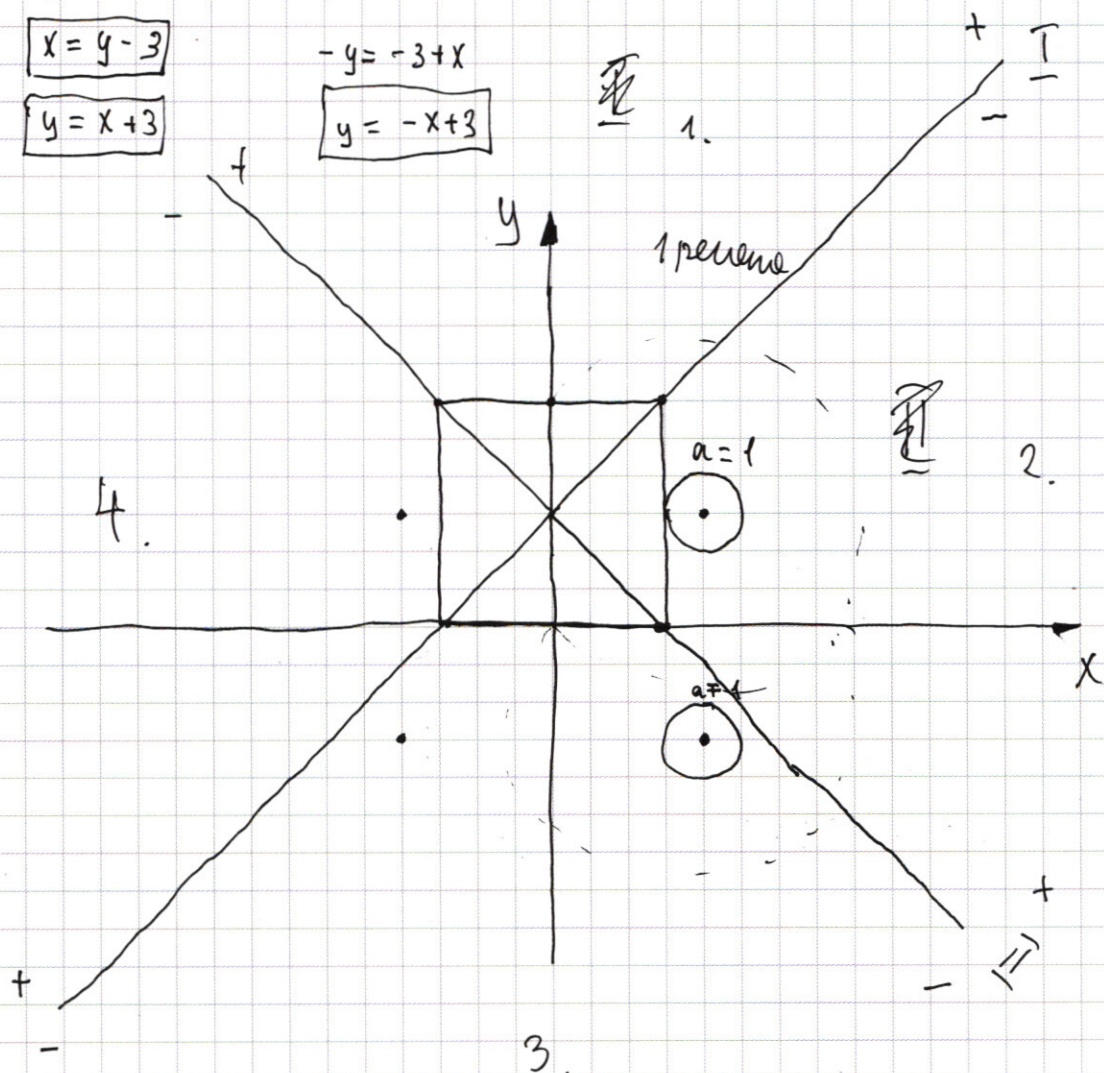
$$y-3+x=0$$

$$x=y-3$$

$$y=x+3$$

$$-y=-3+x$$

$$y=-x+3$$



$$a=1; a \neq 2.5 \quad 2.5$$

$$1. \quad y-3-x+y-3+x=6$$

$$2. \quad -y+3+x+y-3+x=6$$

$$2y = 12$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$y = 6$$

$$3. \quad -y+3+x$$

$$4.$$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$x = -3$$

$$-2y+6=6$$

$$y=0$$



черновик



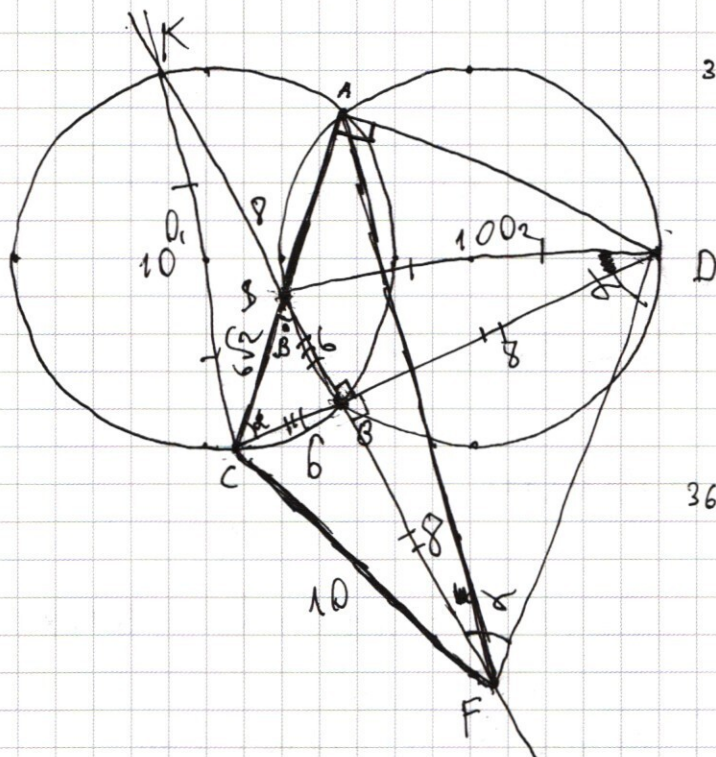
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



90-2

$$360^\circ \pm 180^\circ + (90^\circ - 2)^\circ$$

$$360 - 180 - (90 - x) = 90 + x$$

$$90 + \alpha + \beta = 180$$

$$\angle 4 + \angle 3 = 90$$

$$\angle L = \frac{1}{2} \angle AB$$

$$\angle B = 30^\circ$$

$$\triangle BSD = \triangle BCF$$

$$CF = SD = 2R = \text{---}$$

LA

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) + (\sin 3x - \sin 11x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$= \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x +$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin\left(-\frac{8x}{2}\right) \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin(4x) \sin(4x) + 2 \sin(-4x) (\cos 7x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 14x = \sin 11x - \sin 3x$$

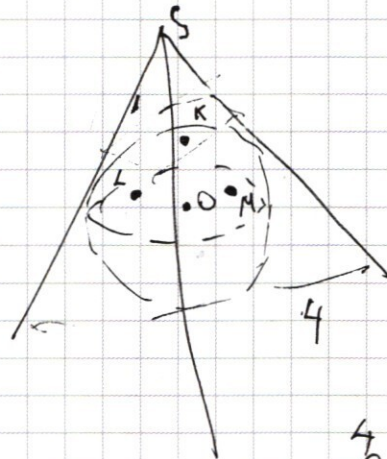
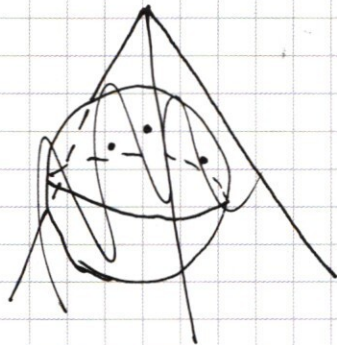
$$2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10^2 + 36 \cdot 2 = 196$$



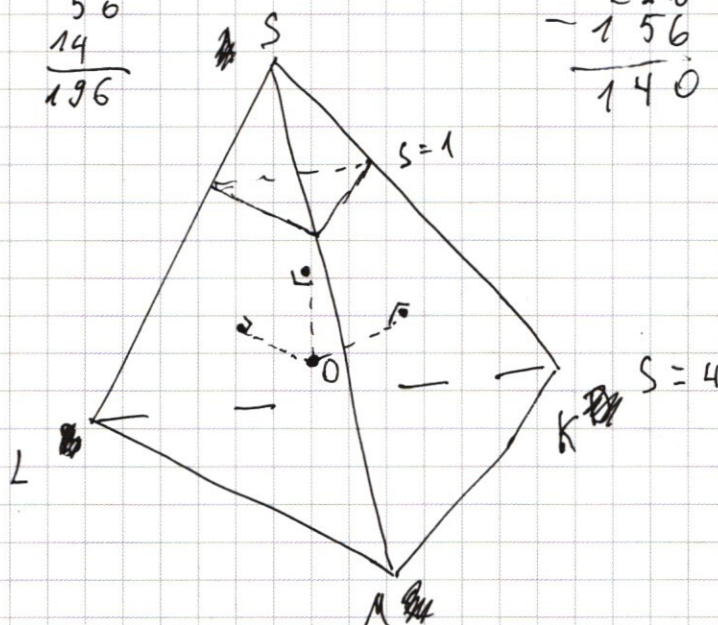
$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 14 \\ \hline 14 \\ \times 14 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 14 \\ \hline 14 \\ \times 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 296 \\ - 156 \\ \hline 140 \end{array}$$

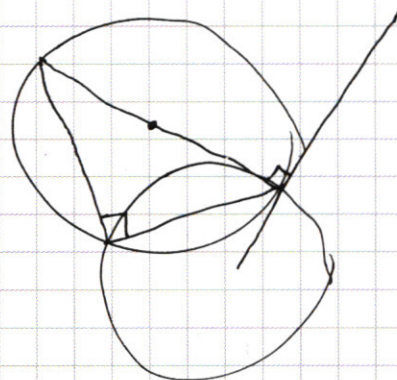
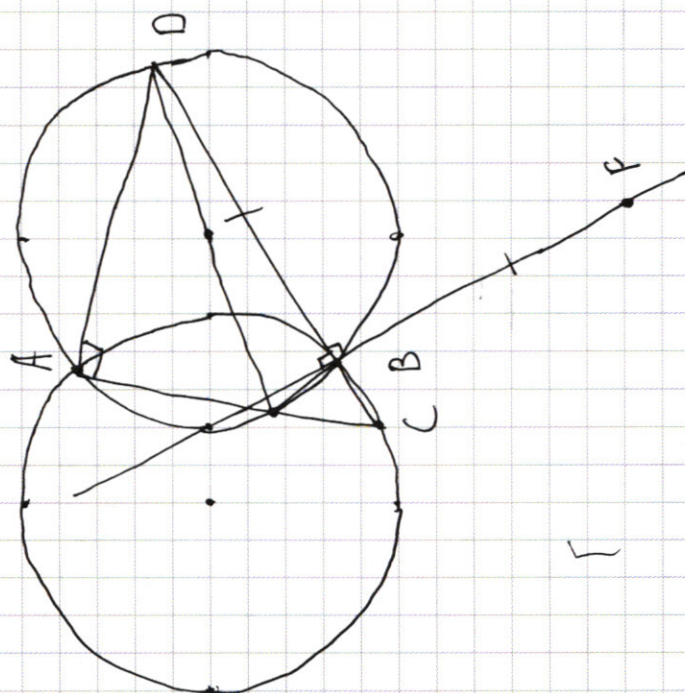
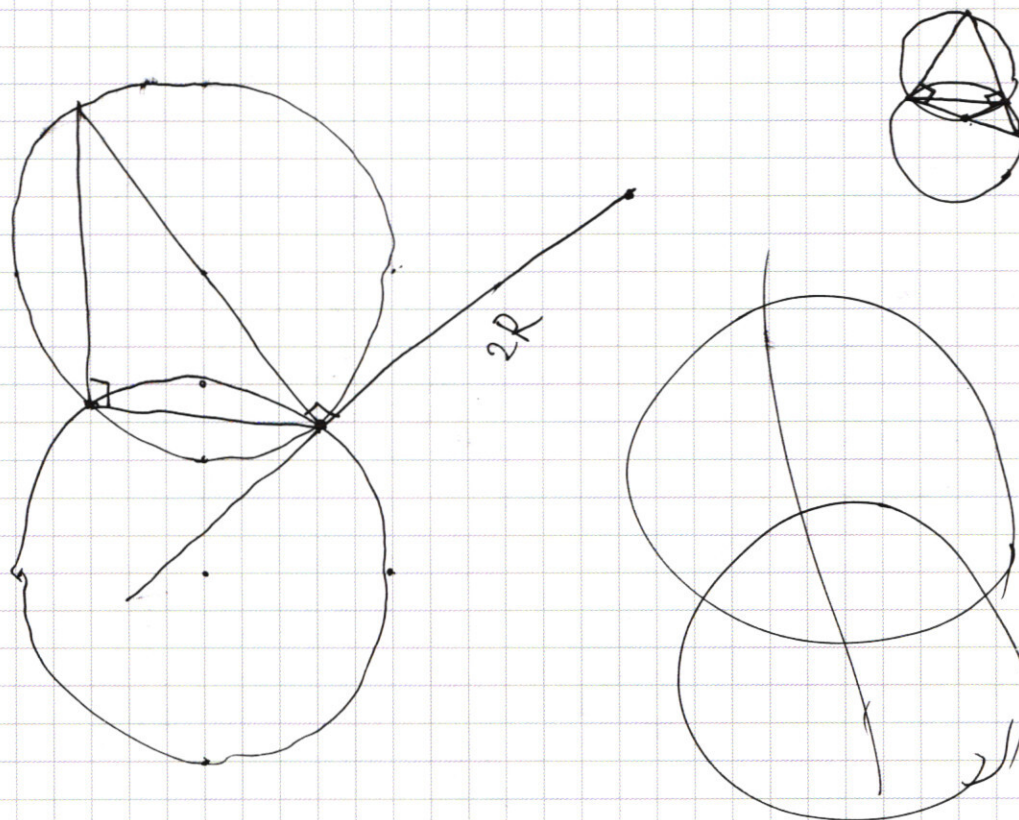
$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 28 \\ \hline 112 \\ \times 6 \\ \hline 168 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 196 \\ - 168 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 296 \\ - 168 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\sin(45^\circ + \beta) = \sin 45^\circ \cos \beta + \cos 45^\circ \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} 1675 \\ 37 \\ \underline{-35} 25 \\ \underline{-25} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} 27 \\ 35 \\ \underline{-35} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 140 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} 135 \\ 17 \\ \underline{-15} 25 \\ \underline{-25} 0 \end{array}$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 14 \\ \hline 50 \\ \hline 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

I

$$\{5; 5; 5; 3; 3; 3\}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \underline{172} \\ 24 \end{array}$$

$$C_8^3 + C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 56 + 10 = 66$$

$$= 56 \cdot 10 = 560$$

II

$$\{5; 5; 5; 9; 3\}$$

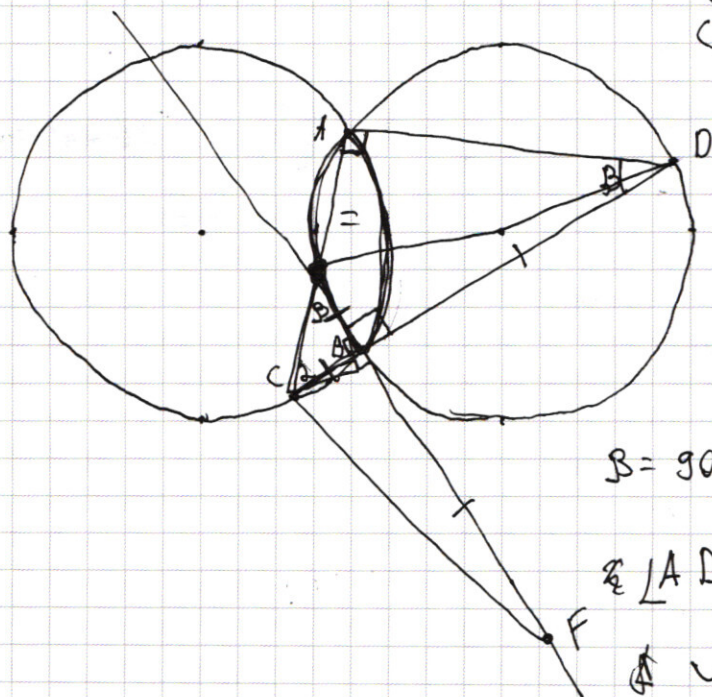
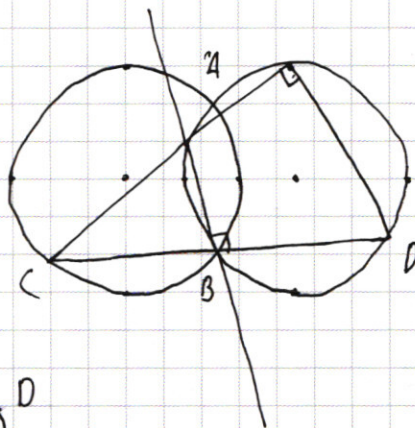
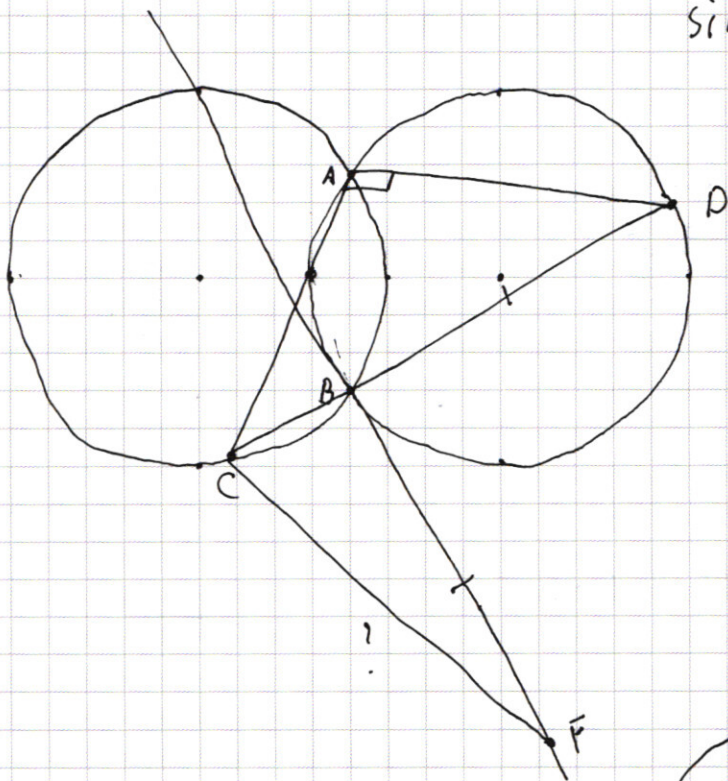
$$C_8^3 - C_5^1 \cdot C_4^1 = 56 - 20 = 36$$

Ответ: $560 \cdot 3$

N 6

$$\cos A - \cos B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta =$$



$$\beta = 90^\circ - \angle$$

$$Z \setminus A D C = 90 - \alpha = \beta$$

$$\textcircled{4} \cup AB = \frac{1}{2}B$$

$$\cup AB = \frac{1}{2} \angle$$

$$2 = B$$

$\Delta p/\Delta$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$① \left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\log_{10} x} = y^{2 \log_{10} xy} \right.$$

$$② \left\{ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \right.$$

$$1) \left(y^5 x^{-1} \right)^{\log_{10} x} = y^{2 \log_{10} (xy)}.$$

$$y^{5 \log_{10} x} \cdot x^{-\log_{10} x} = y^{2 \log_{10} xy}$$

$$\log_{10} x \quad x > 0$$

$$\frac{y^5}{x} = y^{2 \frac{\log_{10} xy}{\log_{10} x}}$$

$$x^2 = 10^2 + 196 - 2 \cdot 140 \cdot 10$$

$$= 296 - 280 = 16$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$(y^5 x^{-1})^{\log x} = y^{210910(x y)}$$

$$(y^5 x^{-1})^{\log x} = y^{210910 x} \cdot y^{210910 y}$$

$$y^{310910 x} \cdot x^{-\log x} = y^{210910 x} \cdot y^{210910 y}$$

$$y^{310910 x} \cdot y^{210910 y}$$

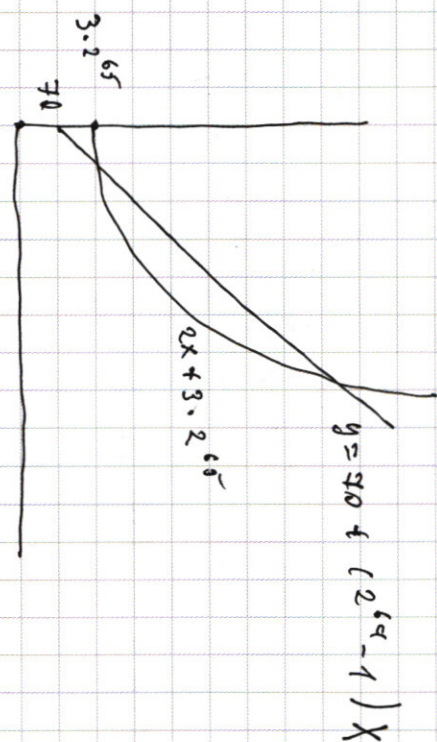
$$\frac{y^{310910 x}}{y^{210910 y}} \cdot x^{-\log x} = 1$$

$$y^{40910 x} = y^{40910 x}$$

$$y^{310910 x - 210910 y} = x^{-\log x}$$

$\frac{1}{2}$

2



$$y < 70 + \dots$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$(\cos 4x - \sin 11x) + (\sin 3x - \cos 3x) - x \sin 50$$

$$(\cos 4x - \sin 11x) + (\sin 3x - \cos 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \sin 50 - x \sin 50 = \sqrt{2} \cos 14x$$

$\sin 15$

2