

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

51.

Разложим 64827 на простые множители:

$$64827 = 7^4 \cdot 3^3$$

Так как 64827 - произв. цифр 8-значного числа, то в этом числе обязательно содержится 4 раза цифра 7 (7^2 - не цифра)

Оставшиеся $8 - 4 = 4$ цифры - либо: 3, 3, 3, 1;
либо: 9, 3, 1, 1
разных

Рассмотрим кол-во 8-значных чисел, которые мы сможем составить из набора:

1) 7, 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 280$$

↑ т.к. 8 позиций
↑ т.к. 3 тройки
↑ т.к. 4 семерки

2) 7, 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1:

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 840$$

↑ 8 позиций
↑ 2 единицы
↑ 4 семерки

4 семерки

Значит, всего чисел: $840 + 280 = \underline{\underline{1120}}$.

Ответ: 1120

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2\ln(xy^2)} \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 1-ое ур-ие:

$$\left(\frac{-x^7}{y}\right)^{\ln(y)} = x^{2 \cdot \ln(xy^2)} \quad \begin{cases} (-y > 0) \Rightarrow y < 0 \\ (xy^2 > 0) \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^{7\ln(-y)}}{(-y)^{\ln(y)}} = x^{2\ln x + 4\ln(-y)}$$

$$x^{(3\ln(-y) - 2\ln x)} = (-y)^{\ln(-y)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Прологарифмируем по основанию} \\ e. \end{array} \right.$$

$$\ln x^{(3\ln(-y) - 2\ln x)} = \ln(-y)^{\ln(-y)}$$

$$(3\ln(-y) - 2\ln(x)) \ln x = \ln^2(-y) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Пусть } a = \ln x \\ b = \ln(-y) \end{array} \right.$$

$$3ab - 2a^2 = b^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \quad ; \quad D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$1) b_1 = \frac{3a + a}{2} = 2a \quad 2) b_2 = \frac{3a - a}{2} = a$$

$$\ln(-y) = 2\ln x$$

$$\ln(-y) = \ln x$$

$$\ln(-y) = \ln x^2$$

$$-y = x \quad (2 \text{ случая})$$

$$-y = x^2 \quad (1 \text{ случай})$$

Теперь подставим во 2-ое ур-ие указательной ст.:

$$1 \text{ случай } (-y = x^2): x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x(x-3)(x^2+x-4) = 0$$

$$1) x=0; y=0 - \text{не подх. } (x>0; y<0)$$

$$2) x=3; y=-9 - \text{подх.}$$

$$3) D=17$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подх.}$$

$$4) x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y = -\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 случай: $-y = x$:

$$x^2 - 2x^2 - 3x^2 + 12x - 4x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

1) $x = 0$ - не подх. ($x > 0$)

2) $x = 2$; $y = -2$ - подх.

Ответ: $(2; -2)$; $(3; -9)$; $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-9}{2})$
54.

Дано:

$S_1 = 9$ - пл. α

$S_2 = 16$ - плоскость β

$\angle KSO$ - ?

S_{KLM} (сек.) - ?

Решение:

1) Плоскости α и $\beta \perp SO \Rightarrow$
они параллельны (совпадать не могут)

2) Рассмотрим пирамиду, отсекаемые плоскостями α и β и 3-гранный угол. Они подобны, т.к. трёхгранный угол совп. ~~т.к.~~ а плоскости основания (сечения α и β) параллельны

3) Известно, что в подобных фиг. ~~кажд.~~ ~~линейные~~ ~~вели.~~ ~~относятся~~ ~~с коэф. k~~ , ~~площади~~ - k^2 ; ~~объёмы~~ - k^3

Поэтому $\frac{S_2}{S_1} = k^2 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

Тогда $\frac{h_2}{h_1} = k = \frac{3}{4}$; $h_2 = SO + R$; $h_1 = SO - R$

$$\underline{(SO+R) \cdot 3 = 4(SO-R)}$$

$$SO = 7R$$

4) Теперь найдём $\angle KSO$.

$\triangle KSO$ - прямоугол. ($OK \perp R$, $R \perp$ плоскости 3-го угла)

$$\operatorname{tg} \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{7R} = \frac{1}{7} \Rightarrow \underline{\angle KSO = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$$

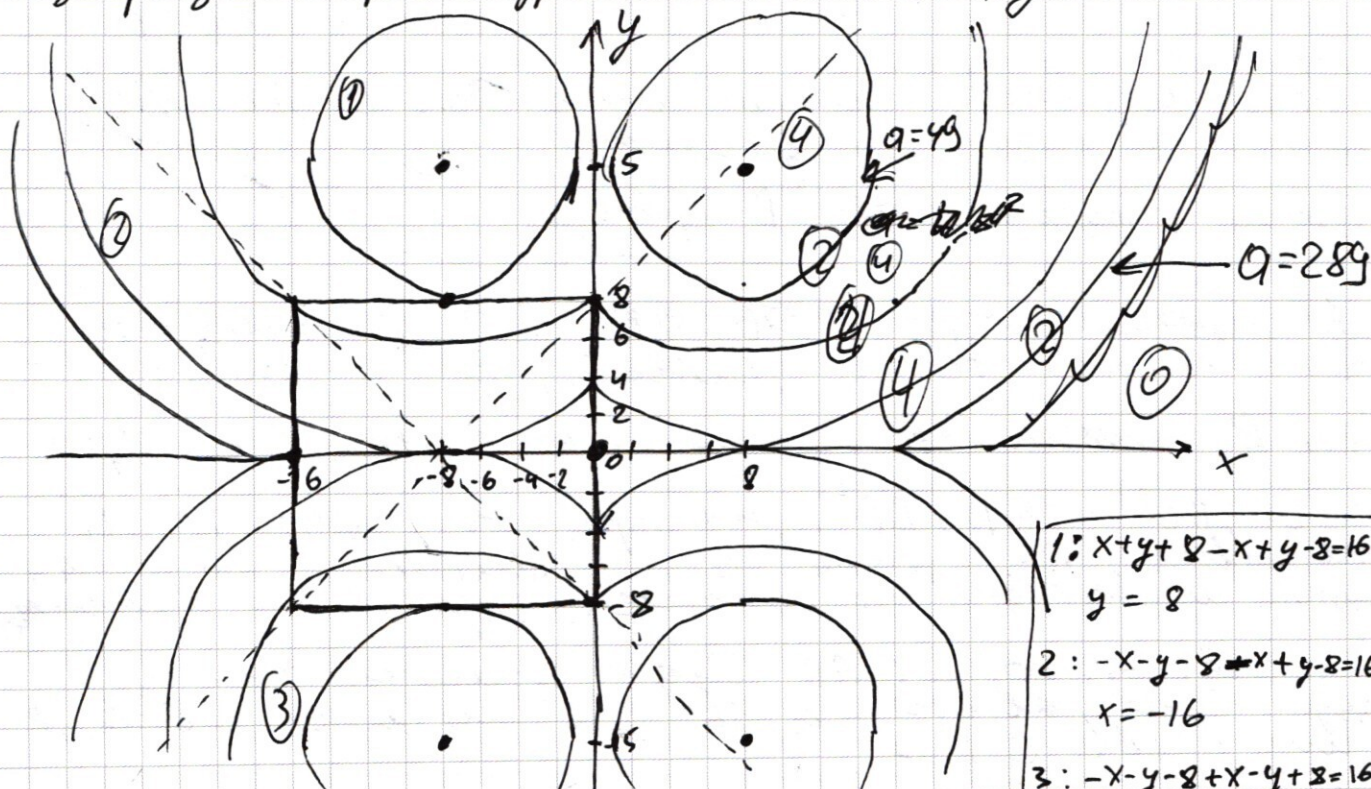
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

a - ? ровно 2 рещ.

$$\begin{cases} |x+y+8| + |x-y+8| = 16 \\ (|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a \end{cases}$$

Изобразим первое ур-ие в осях x, y :



второе ур-ие - отр. во все четверти из первого кусок окр. с радиусом $\sqrt{a}$ и центром $(8; 15)$

Изменяя a , будем следить за изм. кол-ва решений.

При $a \in (-\infty; 49)$ - 0 рещ.

$a = 49$ - 2 рещ. ($a = 49$, т.к. $R = 15 - 8 = 7 = \sqrt{a}$)

$a \in (49; 289)$ - 4 рещ. (сначала по 2 рещ. на гор. сторонах кв.; потом - на верт.)

$a = 289$ - 2 рещ. $((-16; 0)$ и $(0; 0))$; 289 , т.к.

$a > 289$ - 0 рещ.

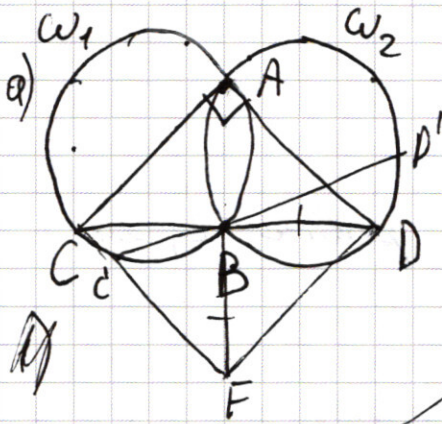
$$\begin{aligned} 1: & x+y+8 - x+y-8 = 16 \\ & y = 8 \\ 2: & -x-y-8 - x+y-8 = 16 \\ & x = -16 \\ 3: & -x-y-8 + x-y+8 = 16 \\ & y = -8 \\ 4: & x+y+8 + x-y+8 = 16 \\ & x = 0 \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{a} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

Ответ: $a \in \{49; 289\}$

56.

* - черновик



1) Проведём через B $C, D, C' \in \omega_1, D' \in \omega_2$
 так, чтобы $C, B = P, B, \angle CAD = 90^\circ$

Заметим, что в этом случае выполняется условие задачи.

Допустим, что сущ. $C' \text{ и } D' : C' \in \omega_1, D' \in \omega_2, \angle C'AD' = 90^\circ, B \in C'D'$

Тогда мы вновь можем опис. окр. около $C'AD'$, причём B лежит на диаметре.
 Таким образом, через B проходят

Допустим, что есть др. C и D, для которых выполняются те же условия, что и для C', D'

Заметим, что когда мы двигаем C вт. C' , то $\angle(BC; BC') = \angle(BD; BD')$, но при этом дуги $\widehat{CC'}$ и $\widehat{DD'}$ не равны, т.к. точки C и D движутся по разным дугам ω_1 и ω_2 (одна по большей, другая по меньшей).
 За счёт этого $\angle C'AD'$ будет изменяться и будет равен 90° в 2 случаях: C совп. с B или D совп. с B.

Будем двигать C' по окр. ω_1 и проводить через нее и т. B прямую, чтобы найти D'

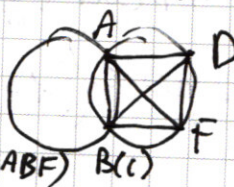
теперь рассмотрим возм. варианты: 1) как мы узнаем из предположений: B - сер. CD.

Тогда $BF = \frac{CD}{2}, BF \perp CD; AB \perp CD; AB = \frac{CD}{2}$ - т.к. мед.; $CB = BD = \frac{CD}{2}$

Значит фигура - квадрат со стороной 34 (т.к. $\angle CBA = 90^\circ = \angle ACB = \angle BCD = \angle CDB$) $\Rightarrow CF = 34$

2) C или D совп. с B:

Тогда фигура опять квадрат, причём $BF = R\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$ (из $\triangle ABF$)



Ответ: 34 или $17\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x = a$$

$$\cos 3x \cdot \cos 7x = \frac{a^2 - 1}{2}$$

$$\sin 7x + \sin 3x = b$$

$$\sin 7x \cdot \sin 3x = \frac{1 - b^2}{2}$$

$$a + b + \frac{a^2 - 1}{\sqrt{2}} + \frac{1 - b^2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$a^2 + a\sqrt{2} - b^2 + b\sqrt{2} = 0$$

$$D = 2 + 4b\sqrt{2} - 4 \quad (a - b)(a + b) + \sqrt{2}(a + b) = 0$$

$$(a - b + \sqrt{2})(a + b) = 0$$

$$1) a + b = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 7x + \frac{\pi}{4} = 3x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x + \frac{\pi}{4} = \pi - 3x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) a - b + \sqrt{2} = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sin 7x + \sin 3x + \sqrt{2} = 0$$

$$\sqrt{2} (\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) + 1) = 0$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cdot \cos(5x) + 1 = 0$$

57.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3 \cdot 3^{27} - 3x$$

$$3^x + 3^{29} - 93 < -3x$$

Заметим, что лев. часть всегда $> 0 \Rightarrow x < 0$

Когда $x < 0$, тогда $3^x < 1$ и при очень больших x не подходит, но $x > 0$, $3^x \rightarrow 0$.

$$3^x + 3^{29} - 93 < -3x$$

$$x < (-3^{x-1} + 3^{28} + 31) \in (30 - 3^{28}; 31 + 3^{28})$$

Значит, нам подходят лишь $x \leq 30 - 3^{28}$

~~$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$~~

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} > 4 \cdot 3^{28}$$

$$y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x = 93 + 3^{28} - 3x$$

~~$$93 + 3^{28} - 3x$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 5x + 1 = 0 \quad \text{Пусть } \cos x = t$$

$$\sin x = p$$

$$2 \cdot \left(\cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x\right) (\cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x) + 1 = 0$$

$$2 \cdot \left(\frac{2t^2 - 1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}pt\right) (2t^2 - 1)$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}; n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \text{корни ур-ня } 2 \cdot \left(\cos 2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos 5x + 1 = 0$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sqrt{2} (\cos^2 2x - 1)$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = 1 - 2 \cos^2 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x =$$

$$\sqrt{2} (\cos (7x - \frac{\pi}{4}) + \cos (3x + \frac{\pi}{4})) + \cos 4x = 0$$

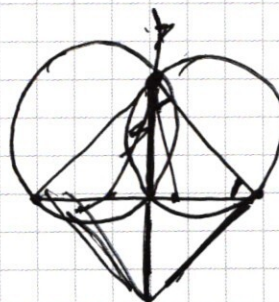
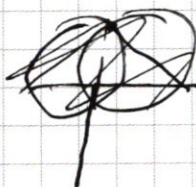
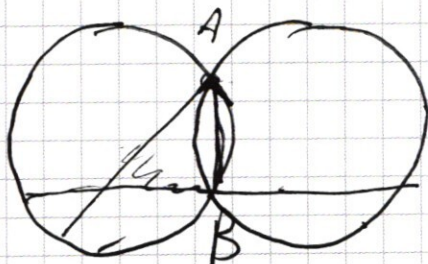
$$2 \cos 5x \cdot \cos (2x - \frac{\pi}{4}) + \cos 4x = 0$$

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \alpha - \cos \beta =$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \alpha - \sin \beta =$$

56.



57.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{28} < 93 + 3^{28} - 3^x$$

$$3^x + 3^{29} < 93 - 3^x \quad x = 0 \text{ р.}$$

$$3^x + 3^{29} - 93$$

$$-3^x$$

$$(3^{28} - 31) \sqrt{3^x - 1}$$

$$x > -3^{28} + 31$$

$$y \leq 3^x$$

$$3^x + 3^x < 3^{29}$$

$$3^x + 3^{29} < 29(-x + 3) + 6$$

$$-3^x = 3^{29}$$

$$x = -3^{28}$$

$$a + b + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2} + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \beta$$

$\alpha = \frac{3}{4}x$
 $\beta = \frac{1}{4}x$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha + \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \beta = 0$$

$$\cos \alpha (\sin \beta + \cos \beta + 1) + \sin \alpha (\cos \beta - \sin \beta - 1) + \sqrt{2} \cos \beta = 0$$

$$\cos 3x \cdot \sin 4x + \cos 4x \cdot \sin 3x + \cos 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x \cdot \sin 4x + \cos 3x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x$$

$$\cos \alpha - \beta = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \sqrt{2} \sin 3x \cdot \sin 7x$$

q²

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик!

51. $64827 : 9$ $127 : 2$

$$\begin{array}{r} 64827 \quad | \quad 9 \\ 63 \quad \quad | 7203 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 2801 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 343 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 49 \end{array}$$

$7^4 \cdot 3^3$

$$\sqrt{1548^2} = 17^2$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \beta = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)^2 =$$

52. $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$$\frac{18 - 2\sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x + 2 \sin 5x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x + \sin 5x) + 2\sqrt{2} \cos^2 2x - \sqrt{2} = 0$$

$$D = 4(\cos 5x + \sin 5x)^2 + 16 = 20 + 8 \sin 10x$$

$\cos 2x =$

$$y = -x^2$$

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

$$x = 0 \quad x^3 - 2x^2 - 7x + 12 = 0$$

53. $\int \left(-\frac{x^7}{y} \right) \ln(-y) = x^2 \ln(xy^2)$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

$$2(y+1)^2 - 2 = (x-y)^2 - 2(x-6)^2 - 36 = 0$$

$$\frac{x^7 \ln(y)}{(-y) \ln(-y)} = x^{2 \ln x} \cdot x^{4 \ln y}$$

$$x(3 \ln(-y) - 2 \ln x) = (-y) \ln(-y)$$

$$(3 \ln(-y) - 2 \ln x) \ln y = \ln^2(-y)$$

$$-2a^2 + 3ab - b^2 = 0$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$b = \frac{3a \pm a}{2}$$

$x > 0; y < 0$

(отриц.) $\ln(-y)$

$$\frac{1}{(-y) \ln(-y)} = \frac{1}{e}$$

$$\frac{x^7 \ln(y)}{e} = e^2 \cdot x^{4 \ln(-y)}$$

$$x^{3 \ln(-y)} = e^3$$

$$3 \ln(-y) \cdot \ln x = 3$$

$$\ln x \cdot \ln(-y) = 1$$

$$x = e^{\frac{1}{\ln(-y)}}$$

$$b = 20 - 4 = 16$$

$$b = 0 \quad x = -y$$

$$\begin{array}{r} 1 - 2 - 7 \quad | \quad 12 \\ 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0 \\ x^2 + x - 4 \end{array}$$

$$D =$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

$$x^2 + x - 4$$

