

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

"

"

$$\cos x = \sin y$$

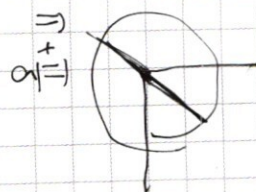
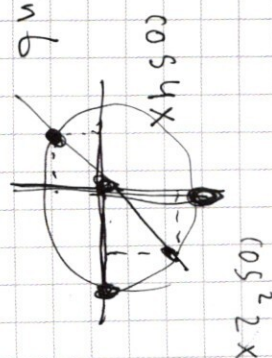
$$\cos(a+b)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

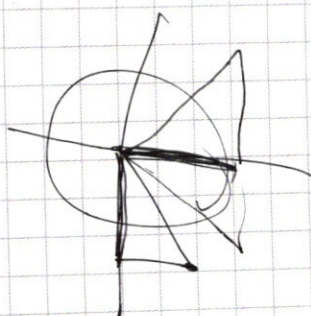
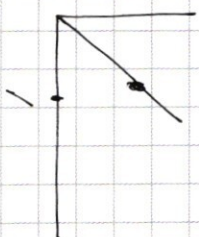
$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

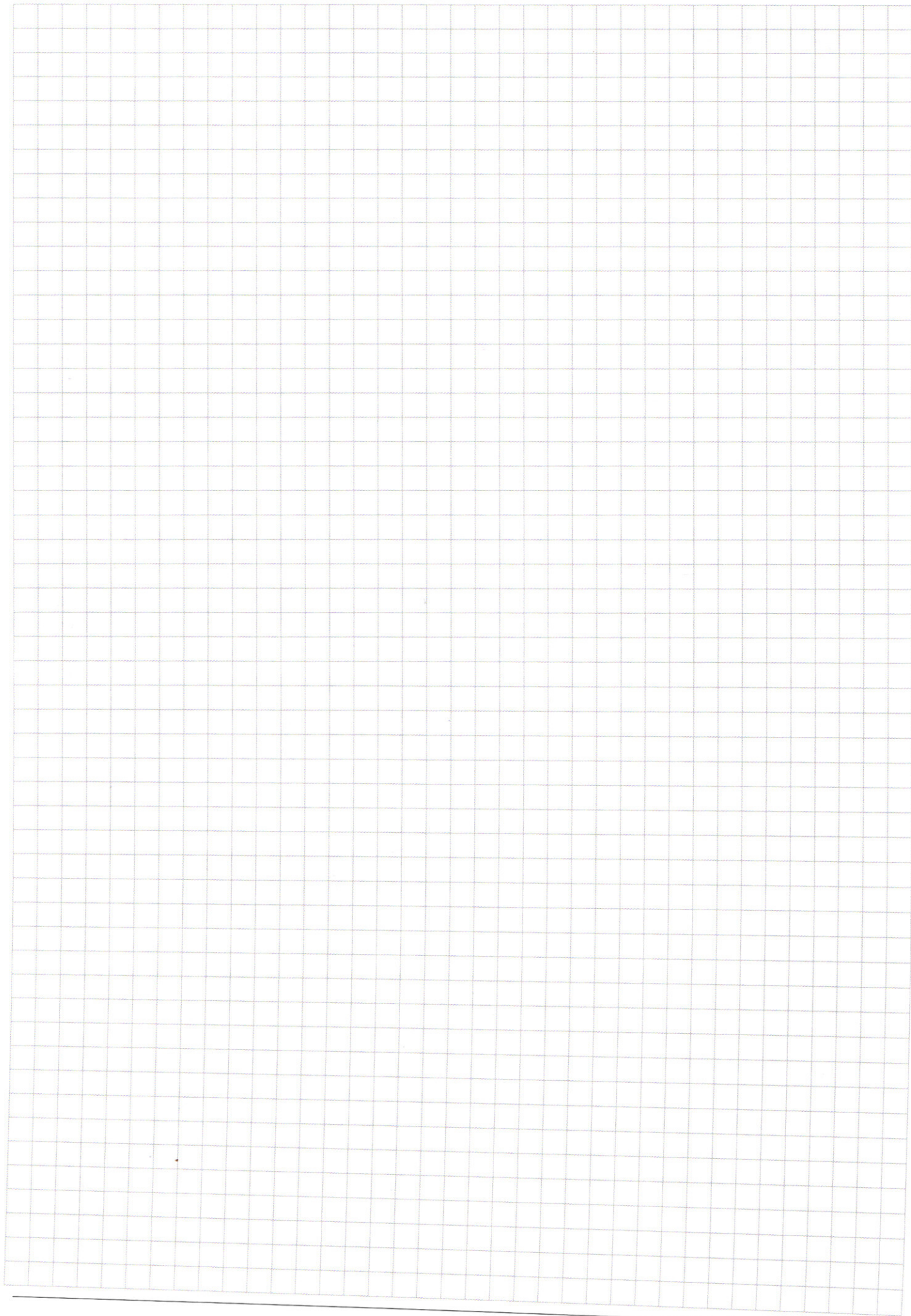
$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin$$



$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including various equations and diagrams.

Equations:

- $\left(\frac{4-x}{x}\right)^{3\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln 4-x}}{x^{\ln x}}$
- $\frac{2^2}{2^2}$
- $\cos(a-b)$
- $\cos 7x + \cos 3x$
- $\cos(a) + \cos(b)$
- $\cos 7x + \cos 3x$
- $\frac{x^{\ln(4-x)^3}}{x^{\ln x}} = \frac{4-x}{x^{\ln 4-x}}$
- $x^{\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)^3} = \left(\frac{4-x}{x}\right)^{\ln 4-x}$
- $x^{\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)^2} =$
- $\ln(4) = 2$
- $\left(\frac{4-x}{x}\right)^{2\ln x} = (4-x)^{\frac{\ln(4-x)}{x}}$
- $\frac{4-x}{x^{\frac{\ln(4-x)}{x} \cdot 2\ln x}}$

Diagrams:

- A diagram showing a triangle with vertices labeled 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
- A diagram showing a triangle with vertices labeled 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.
- A diagram showing a triangle with vertices labeled 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

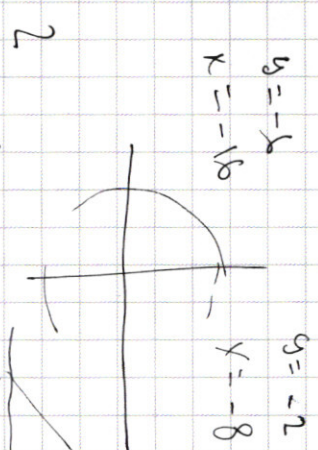
$$93 + 3(3^{27} - 1)X \geq y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28}X - 3 \times 2^7 y > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\frac{\ln(\frac{y-x}{x})^2}{\ln(\frac{y-x}{x}) \ln x} =$$

$$\frac{X \ln(4-x)^2}{6 \ln(4-x)^2}$$

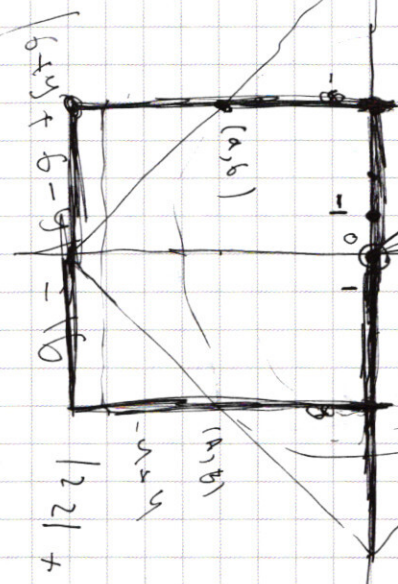
$$\frac{6 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 9 \cdot 6}$$



$$A = x + y + 8$$

$$B = x - y + 8$$

$$2x + y > 0$$



$$|a+b| + |a-b| = 16$$

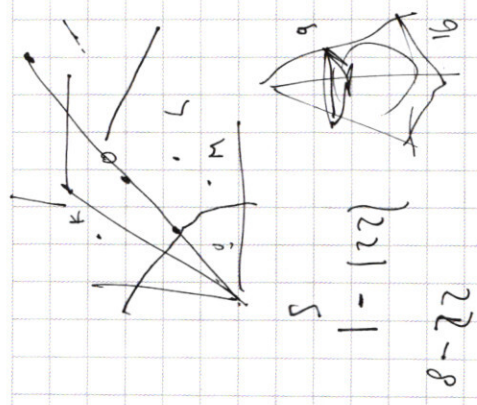
$$|x| + |y| = 16$$

$$|6+y| + |6-y| = 16$$

$$|2+y| + |2-y| = 16$$

$$\frac{A+B-16}{A-B} = x$$

$$\frac{A+B-16}{A-B} = y$$

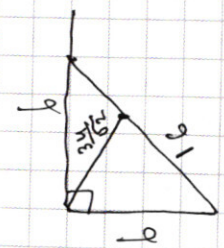
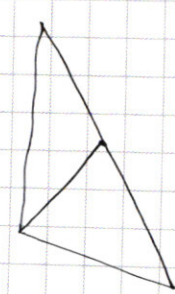


$$|1+y| + |1-y| = 16$$

$$|7+y| + |7-y| = 16$$

$$25 + 19 = 16$$

$$2y - 14 = 16$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\boxed{2} \quad \cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = -\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\sin 2x \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k \\ x = -\frac{5\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos 5x = -\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = \sin 2x \cos 45^\circ - \cos 2x \sin 45^\circ$$

$$\cos 5x = \sin (2x + 45^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 2x + 45^\circ + 360^\circ k_1 \\ 2x + 45^\circ = 45^\circ + 360^\circ k_2 \end{cases}$$

$$3x = 45^\circ + 360^\circ k$$

$$2x + 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 90^\circ - (2x + 45^\circ) + 360^\circ k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 45^\circ + 360^\circ k \\ 7x = 45^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ОТВЕТ: $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k_1$

$x = -\frac{5\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k_2 \quad k_i \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k_3$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}k_4$

7

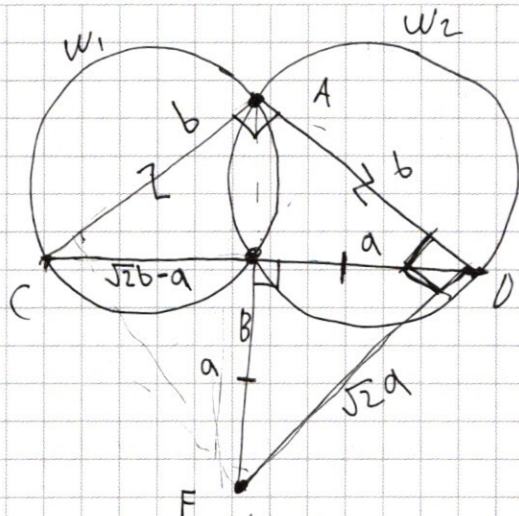
$$93 + 3^{28} - 3x > 4 > 3^x + 4 \cdot 3^{28}$$

$$\left| 3^x + 4 \cdot 3^{28} \right| > \left| 93 + 3^{28} - 3x \right|$$

для ГОСТ: 6. X

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



сделаем поворот, ~~зададим~~
переводящий
 w_1 в w_2

$C \rightarrow D$ (известный факт
при повороте и сжатии)
два окружности, образ
построение образа точек

a)

$$\Rightarrow AC = AD \Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DBF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DBF \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{AC}{AD} = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 6$$

$$BD = BF = DF = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 9$$

$$CF = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}b - a)^2} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{AB} = \frac{\sqrt{2}a}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{2} AB = \frac{\sqrt{2} R w_2 \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 17 \sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$= 34 \text{ Ответ: } 34$$

b) $CF = 34$ $h_{F, AC} = AD = 6$ (т.к. $\angle ADC + \angle CDF = 90^\circ$)

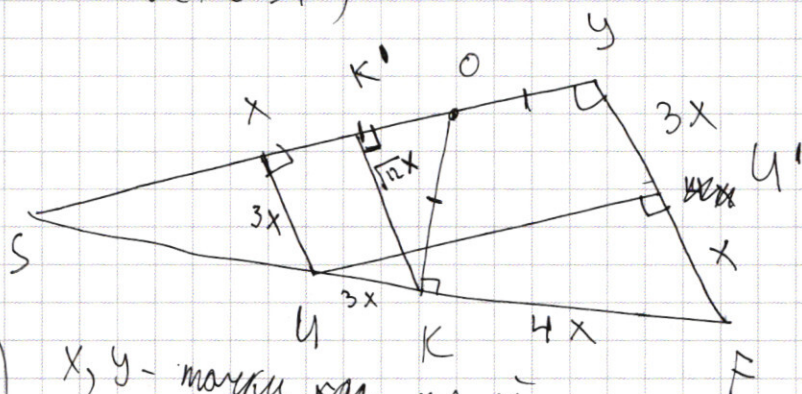
$$S_{ACF} = \frac{h_{F, AC} \cdot AC}{2} = \frac{b^2}{2} = S_{CAD} \Rightarrow DF \parallel AC \Rightarrow h_{D, AC} = h_{F, AC}$$

$$AB = \frac{CF}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{2}} \quad BC = \sqrt{2}b - a = 16 \Rightarrow b = \frac{16 + a}{\sqrt{2}}$$

$$BF^2 + BC^2 = CF^2 \Rightarrow 34^2 = a^2 + 16^2 \Rightarrow a = \sqrt{34^2 - 16^2} = \sqrt{18 \cdot 50} = 30$$

$$b = \frac{16 + 30}{\sqrt{2}} = \frac{46}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ACF} = \frac{46^2}{4} = 23^2 = 529 \text{ Ответ: } 529$$

4) Стереоскопическая картина
ча (OSK)



$$XU = UK \text{ (кас.)}$$

$$KF = FY \text{ (кас.)}$$

1) X, Y - точки кас. пл-и сфер

$$XO = OK = OU = R_{\text{ср.}}$$

$$\frac{XU}{YF} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \quad (\text{т.к. отношение площадей кв-ов коэф-та подобия})$$

$$\angle OSK = \angle U'UF = \arcsin \frac{1}{7}$$

$$\text{Ответ: } \angle OSK = \arcsin \frac{1}{7}$$

2)

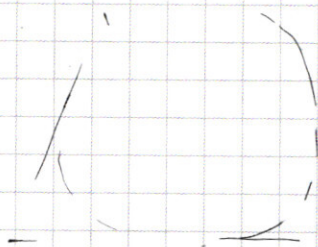
$$KK' = \sqrt{3 \cdot 4} \cdot x = \sqrt{12} x$$

$$OK = \frac{U'U'}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9 - 1}}{2} x = \frac{\sqrt{48}}{2} x = \sqrt{12} x$$

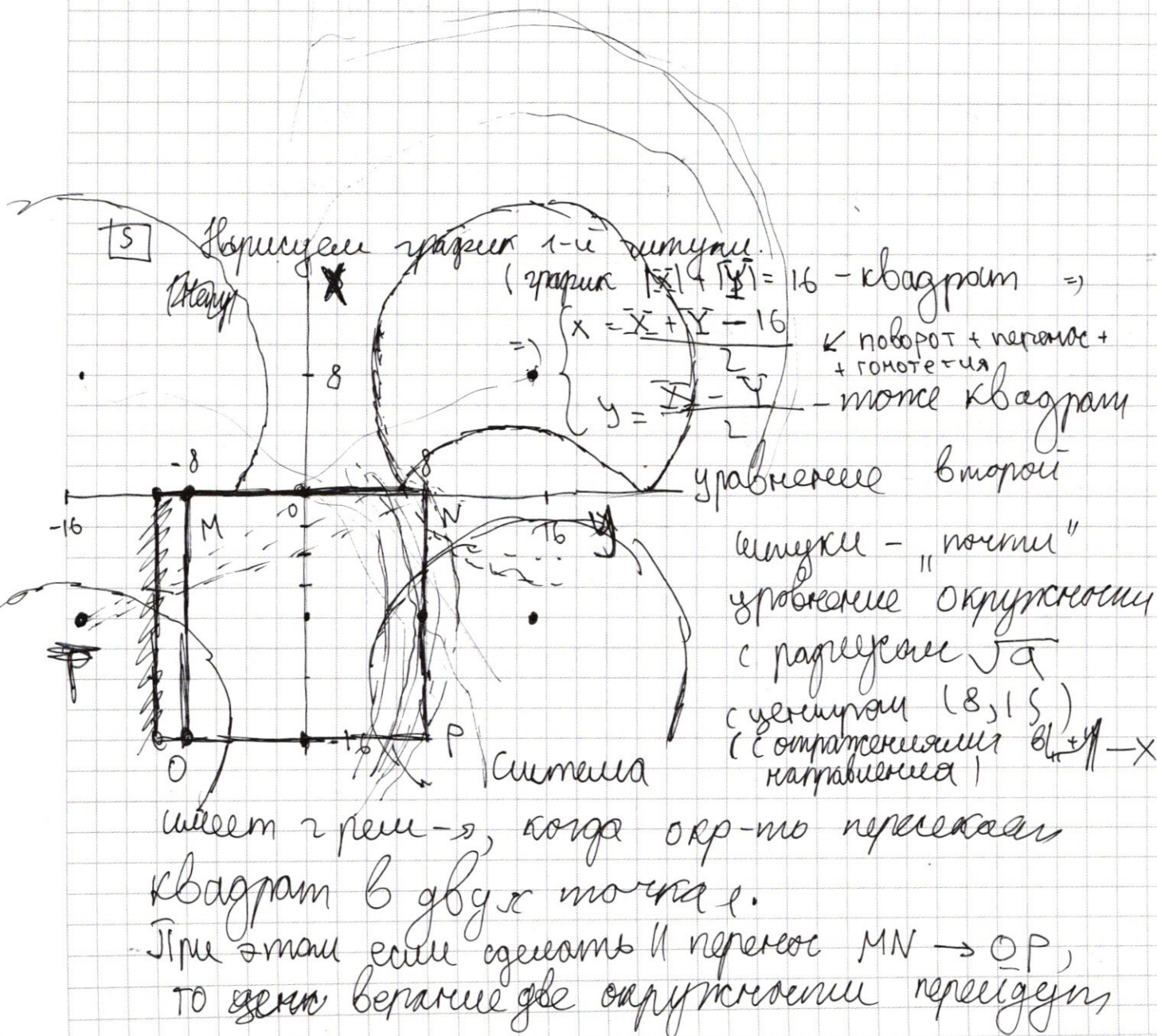
$$OK = KK' \Rightarrow OUK' \text{ согр.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KLM} = \left(\frac{\sqrt{12}}{3}\right)^2 \cdot S_1 = 9 \cdot \frac{12}{9} = 12$$

$$\text{Ответ: } 12$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



В итоге две $\Rightarrow$ пересечения
~~происходит только с N и MO~~
 Верхняя правая окр. не
 пересекается с MN в точке x_0, y_0 , где
 $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0, x_0 y_0 > 0$

$\Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ - подходит,
 ведь перес. только в $(0,0)$ и $(-16,0)$
 $a \in \mathbb{N}$, $(0,17)$ не подходит, т.к. окружности
 пересекут кв-т в 0 или 4-х точках.

По графику трудно видеть, что точка
 не подходит и $a \in [17, 23]$ (7,3 решения)

$a = 23$ 3 реш.

$a > 0$ реш.

$\sqrt{8^2 + 23^2}$

$a \in (23, \sqrt{8^2 + 23^2})$ тоже
 4 реш.

$N = P \cap$

$a \in (\sqrt{8^2 + 23^2}, \infty)$ - 0 решений

$a = \sqrt{8^2 + 23^2}$ - 3 решения

$a \in [17, \sqrt{8^2 + 23^2})$ подходит

Ответ: $[17, 593]$

$\Rightarrow$ подходит $a \in [17, 23) \cup 23 \cup \sqrt{593} \cup \sqrt{593}$

Ответ: $a \in [17, 23) \cup \sqrt{593}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $64827 = 7^4 \cdot 3^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ число может состоять из цифр 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7
или ~~1, 1, 3, 3~~, 7, 7, 7, 7, 9; ведь $7 \cdot 3 = 21 > 9$ - не цифра,
~~и~~ $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 > 9$ - не цифра ~~и~~. Цифры $\{2, 4, 5, 6, 8, 0\}$
не могут быть, т.к. $64827 \nmid \{2, 4, 5, 6, 8, 0\}$
~~но цифра~~ если "4" > 4 , то $64827 : 7^5$ (74),
если "7" < 4 , то $64827 = 7^4 \cdot a$, где $a \nmid 7 = 1$

$\Rightarrow \# 7 = 4$, также, либо $\# 3 = 1$, при наличии "9",
либо $\# 3 = 3$. остальные единицы.

] A_5 - кол-во способов из цифр 5 сост-в 8-знач. числа

$$A_{PS} = \left(A_{\{1, 1, 3, 7, 7, 7, 7, 9\}} = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 1!} \right) + \left(A_{\{1, 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7\}} = \right.$$

$$\left. = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!} \right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 + 5 \cdot 7 \cdot 8 = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 = 1120$$

Ответ: 1120

3 ~~$y = -3x$~~

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\Rightarrow) (3x+4)(y-x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x \\ y = x-4 \end{cases}$$

1^o $y = -3x$

$$\left(-\frac{x^2}{-3x}\right)^{\ln(3x)} = x^2 \ln(x \cdot 9x^2) \Leftrightarrow \left(\frac{x^6}{3}\right)^{\ln 3x} = X^{\ln 81x^6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{6 \ln 3x - \ln 81x^6} = 3^{\ln 3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{\ln(3^2)} = 3^{\ln 3x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^{\ln 9} = 3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^a = \frac{x}{3} \\ (3e^a)^{\ln 9} = 3^{\ln 3} \cdot 3^{\ln(3e^a)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -9 \\ x = 3 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ e^a = \frac{x}{3} \\ 9^a = 3^a \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \text{проверим найдем} \\ x = 3$$

2^o $y = x-4$

$$\left(\frac{x^2}{4-x}\right)^{\ln(4-x)} = x^2 \ln(x(x-4)^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \\ + x^{\ln(4-x)^2 - x^2 \ln(x-4)^2} = (4-x)^{\ln 4-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ x^{\ln \frac{(4-x)^2}{x^2}} = 4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ \ln \left(\frac{(4-x)^2}{x^2}\right)^{\ln x} = (4-x)^{\ln 4-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ \frac{(4-x)^3 \ln x}{x^3} = \frac{(4-x)^{\ln 4-x}}{x^{\ln x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ \left(\frac{4-x}{x}\right)^{3 \ln x} = \left(\frac{4-x}{x}\right)^{\ln 4-x} \cdot \frac{x^{\ln 4-x}}{x^{\ln x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ \frac{(4-x)^{\ln \frac{(4-x)^3}{x^3}}}{x^{\ln x}} = \frac{(4-x)^{\ln 4-x}}{x^{\ln 4-x}} \cdot \frac{x^{\ln 4-x}}{x^{\ln x}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ x^{\ln \left(\frac{4-x}{x}\right)^3} = \left(\frac{4-x}{x}\right)^{\ln 4-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x > 0 \& x > 0 \\ x^{\ln \frac{4-x}{x}} = \left(\frac{4-x}{x}\right)^{\ln 4-x} \end{cases}$$

ОТВЕТ: $\{3, -9\}, \{2, -2\}$