

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим (2) как квад. ур. отн.

$$x: x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D_1 = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (2(y-1))^2$$

Тогда $x_1 = \frac{y+2-2(y-1)+2}{2} = 4-y$

$$x_2 = \frac{y+2+2(y-1)+2}{2} = 3y$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & \left(\frac{y^4}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \\ x = 3y & x = 3y \end{cases}$$

$$\frac{4 \lg 3 + 4 \lg y}{3} = 2 \lg 3 + 4 \lg y$$

$$4 \lg 3 + 4 \lg y - 2 \lg 3 - 4 \lg y = 3 \lg 3 + \lg y$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3 + \lg y} \Rightarrow y^2 = 3 \cdot y \Rightarrow y = 3$$

$$x = 3y = 9$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\frac{5 \lg x}{x} = \frac{\lg x}{y} + 2 \lg xy$$

$$y \cdot 5 \lg x = x \lg x + 2y \lg xy$$

$$y \cdot 3 \lg x - 2 \lg y = x \lg x$$

$$\lg y \cdot (3 \lg x - 2 \lg y) = \lg^2 x$$

$$3a^2 - 2ab^2 = a^2 \quad (*)$$

$$a^2 + 3ab + b^2 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases} \quad \text{В ММ: } \begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

При $x = 4-y$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 & (3) \\ y = 4-y & (4) \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$(3): D = 1+16=17$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad y_2 < 0.$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = 4 - y \\ y = 2 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(9, 3), (2, 2),$
 $(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17} - 1}{2})$

и 4.

Дано: Ω - сфера, с центром O S - верш. тетраэдр. углы.

K, L, M - точки касания.

Найти: $\angle KSO$.

$S_1 = 1$ - площадь сечения $\perp SO$

$S_{\text{сеч}} (KLM)$.

$S_2 = 4$ - площадь сеч. $\perp SO$.

Зам.: Касания с плоскостями S_1 и S_2 касаются Ω .

Если $SO \cap (\text{сеч}_{S_1}) = A$ и $SO \cap (\text{сеч}_{S_2}) = B$, то

$AB = 2r$, где r - радиус сферы. Эти плоскости параллельны, т.к. перпендикулярны SO . Значит, AB - диаметр сферы.

Если $SO \cap (\text{сеч}_{S_1}) = A$ и $SO \cap (\text{сеч}_{S_2}) = B$, то

$AB = 2r$, где r - радиус сферы. Эти плоскости параллельны, т.к. перпендикулярны SO . Значит, AB - диаметр сферы.

Эти плоскости параллельны, т.к. перпендикулярны SO . Значит, AB - диаметр сферы.

Эти плоскости параллельны, т.к. перпендикулярны SO . Значит, AB - диаметр сферы.

Эти плоскости параллельны, т.к. перпендикулярны SO . Значит, AB - диаметр сферы.

$\text{сеч}_{S_1} \rightarrow \text{сеч}_{S_2}$ с коэф.: $R = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 2$. т.е. $SA = AB = 2r$, $SO = 3r$.

Тогда $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$, $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$.

2). Пусть $\text{сеч} (KLM)$ - $\triangle PQR$. O - равноудалено от сторон $\triangle PQR$, и оно проецируется в центр окр. вписанной в $\triangle PQR$.

$SO \perp (\text{сеч}_{S_1})$. Пусть $SO \cap (\text{сеч}_{S_1}) = M$. $KM \perp SO$. $SK = \sqrt{SO^2 - KO^2} = 2\sqrt{2}r$.

$KM = \frac{SK \cdot KO}{SO} = \frac{2\sqrt{2}r^2}{3r} = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$. - радиус окр. вписанной в $\triangle PQR$.

$SM = \sqrt{SK^2 - KM^2} = \sqrt{8r^2 - \frac{8}{9}r^2} = \frac{8}{3}r$. При возмещении с SO (15

$S_1 \rightarrow S_{PQR}$ с коэф. $u = \frac{SM}{SO} = \frac{\frac{8}{3}r \cdot 3}{8r} = \frac{3}{4}$

т.е. $\frac{S_1}{S_{PQR}} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{PQR} = \frac{16 \cdot S_1}{9} = \frac{16}{9}$.

$S_{PQR} =$ Ответ: 1) $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

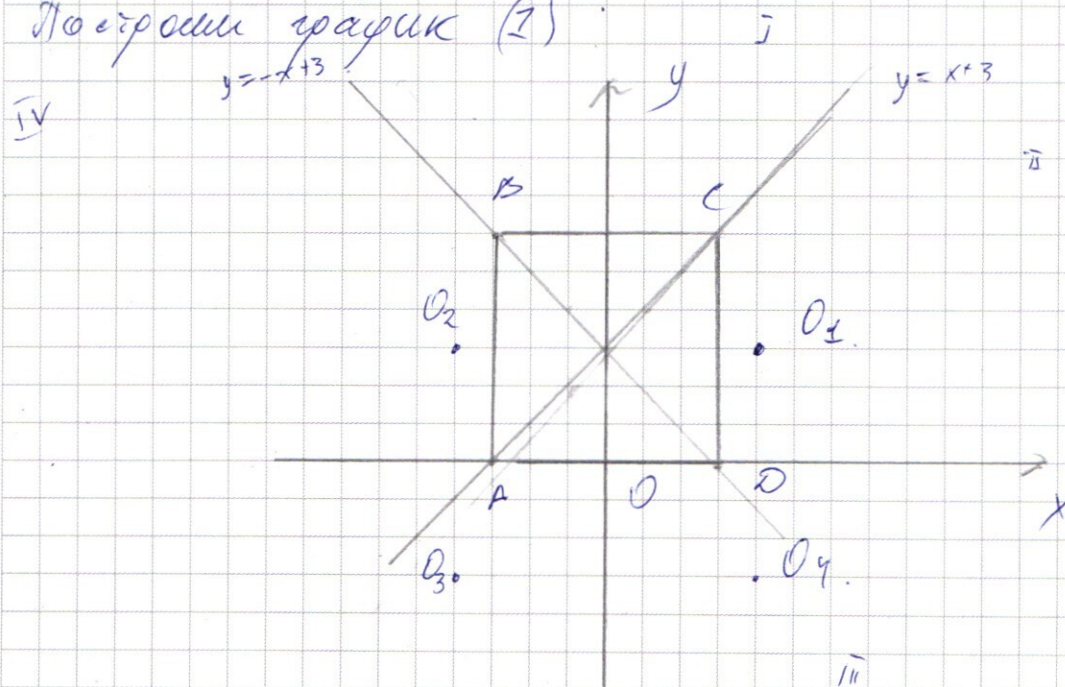
2) $S_{\text{сеч}} = \frac{16}{9}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5-

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Построим график (1)



Область I соотв. случаю, когда
 $\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \geq -x+3 \end{cases}$ тогда
 $y-3-x+y-3+x=6$
 $y=6$.

Область II - $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$ тогда:
 $x+3-y+y-3+x=6$
 $x=3$.

Обл. III: $\begin{cases} y \leq 3+x \\ y \leq -x+3 \end{cases}$

Обл. IV: $\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \leq -x+3 \end{cases} \quad x=-3$

$$x+3-y-y+3-x=6$$

Построим гр-к (2): Если $x > 0, y > 0$, то $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ - окр. с ц. в точке $O_1(4; 3)$. Если $x < 0, y > 0$, то $(x+4)^2 + (y-3)^2 = a$, - окр. с ц. в $O_2(-4; 3)$. Если $x < 0, y < 0$, то $(x+4)^2 + (y+3)^2 = a$ - окр. с ц. в $O_3(-4; -3)$. Если $x > 0, y < 0$, то $(x-4)^2 + (y+3)^2 = a$ - окр. с ц. в $O_4(4; -3)$. Заметим, что $a \neq \pm$ окр-ты с ц. O_1 и O_2 кас-

иутся стороны. AB и CD иудет равно зреч. Если $a = O_3 A$,
 то дудет более з-реч. Если $O_2 C = a$, то по симметрии
 отн. O_2 . т.к. окр с ц. O_2 проидёт через B и D , то окр.
 с ц. O_2 проидёт через A и B , дудет более зрешений.
 Если $a = O_3 C$, то окр. с ц. O_3 проидёт через $(I) C$, а
 окр. с ц. O_1 через $(I) B$ а окр с центрами O_1 и O_2 не
 пересекут квадрата. Наконец, если $a = O_1 O_2$, то
 все окр. пересекутся в $(I) O$, окр. с центрами O_1 и O_2 не-
 пересекутся в середине BC и тогда дудет зрешения.

1) $a = O_3 C$. $(I) C(3; 6)$, $(I) O_3(-4; -3)$

$$O_3 C = \sqrt{4^2 + 9^2} = \sqrt{16 + 81} = \sqrt{97}, \quad a = \sqrt{97}$$

2) $a = O_1 O_2$ $O_1 O_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $a = 5$.

ответ: $a \in \{1, 5, \sqrt{97}\}$

116.

Дано: ω_1, ω_2 - окр.

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A; (I) B\}$$

$$(I) C \in \omega_1, (I) D \in \omega_2, (I) B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ, BF \perp CD,$$

$$BF = BD, \gamma = 5$$

а) Найти: CF .

Р-ние: а) Заметим, что т.к. радиус ω_1

и радиус ω_2 - равны, то $\angle CAB$ в ω_1 и $\angle CBA$

в ω_2 равны. $\angle BDA = \frac{1}{2} \angle CAB = \angle BCA$, т.е. $\angle BDA = 45^\circ$

По т.-м. углов: Если $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABD = 180^\circ - 45^\circ - \alpha$ и,

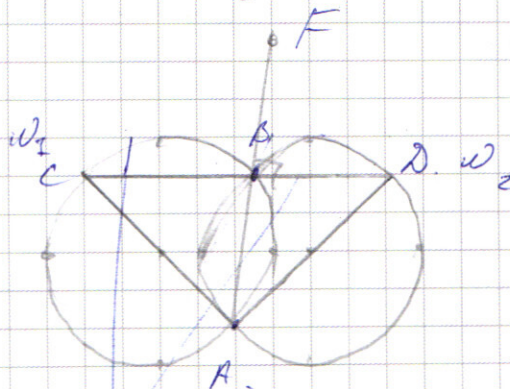
как внешний угол $\triangle DAB$: $\angle DBA = \angle DAB + \angle CAB = 45^\circ + 90^\circ - \alpha$

Если $AD = AC = x$, то $CD = \sqrt{2}x$. С другой стороны $BD + BC = CD$.

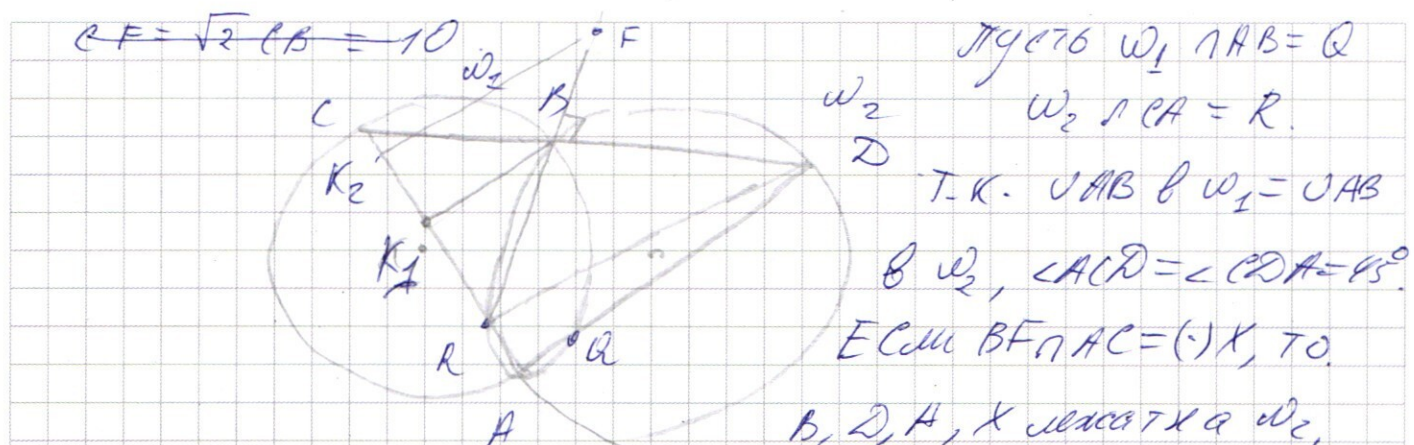
$BD =$ большая дуга AC равна большей дуге AD , т.е.

$\angle CBA = \angle CBD = 90^\circ$, значит $AD = AC = BC = 10$. Тогда

$$CD = 10\sqrt{2}, BD \cdot CD = AD^2, BD = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}. BD = BF = CB,$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть $\omega_1 \cap AB = Q$
 $\omega_2 \cap CA = R$.

Т.к. $\angle A B \omega_1 = \angle A B$

в ω_2 , $\angle A C D = \angle C D A = 45^\circ$.

Если $B F \cap A C = (X)$, то

B, D, H, X лежат на ω_2 ,

т.к. $\angle X B D + \angle X A D = 180^\circ$, т.е. (X) совпадает с (R) .

Пусть $B F \neq y = B D$. $\angle R B D$ опр. на $R D$ - диаметр, т.к.

$\angle R B D = 90^\circ$, $\angle F D B = 45^\circ$, $\angle C R B = 180^\circ - \angle B D A = 45^\circ$.

$$B R = C B = \sqrt{R D^2 - B D^2} = \sqrt{4^2 - y^2}$$

$$C F^2 = B F^2 + C B^2 = B F^2 + 4^2 - y^2 = 4^2$$

$$C F = 2^2 = 10.$$

б) $B C = 6$. Найти: $S_{A C F}$?

Р-ние: $C F = 10$, $C B = 6$, $B F = 8$. По доказанному $C B =$
 $= B R = 6$, $B F = B D = 8$, $C D = 14$, $A C = \frac{C D}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

$C R = \sqrt{2} B R = 6\sqrt{2}$. Пусть $B K_1 \perp A C$, $F K_2 \perp A C$ & $K_1 R B \sim K_2 F R$

по 2 углам. $\frac{B K_1}{F K_2} = \frac{R B}{F R} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, $F K_2 = \frac{4}{3} B K_1$

$\triangle C B R$ - равнобедренный, $B K_1$ - медиана, $B K_1 = \frac{1}{2} R C = 3\sqrt{2}$

$$F K_2 = 4\sqrt{2}. S_{A C F} = \frac{1}{2} \cdot A C \cdot F K_2 = 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 49.$$

Ответ: а) 10, б) 49

✓ 1

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

В восьмизначном числе с заданными
свойствами могут участвовать: 1) 3 5-ки, 3 3-ки

2 - 1-цы. 2) 35-ки, 1-9-ка, 23-ки. В обоих случаях оставшиеся 2 места заполняются единицами.

1) Выбрать из 8-ми мест 3 места для 5-ок можно C_8^3 способами. Для 3-троек есть C_5^3 способа
 т.е. всего $C_8^3 \cdot C_5^3 = 56 \cdot 10 = 560$

2) Для

1) Расставить 3 пятерки на 8 мест можно $8 \cdot 7 \cdot 6$ способами. Расставить 3 тройки $5 \cdot 4 \cdot 3$ из того $\frac{8!}{2!}$

2) Расставить 3 пятерки на 8 мест $8 \cdot 7 \cdot 6$ способов, расставить 9-ку - 5 способами, 3-ку - 4 шос.

$$\text{Итого } 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!}$$

$$\text{Всего: } \frac{8!}{3!} + \frac{8!}{2!} = 20160 + 8720 = 28880 \text{ способов.}$$

$$\text{ОТВЕТ: } 28880.$$

12.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\text{Заметим, что } (\cos 11x + \sin 3x) + (\cos 3x + \sin 11x)$$

$$\cos 11x + \sin 3x = a \quad a^2 + b^2 = 2 + 2 \sin 14x.$$

$$\cos 3x + \sin 11x = b$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 + 2 \sin 14x. \\ a^2 - 2ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = \sqrt{2} \cos 14x. \\ a = b + \sqrt{2} \cos 14x. \end{cases}$$

$$b^2 + 2\sqrt{2}b \cos 14x + 2 \cos^2 14x + b^2 = 2 + 2 \sin 14x.$$

$$\sqrt{2} \cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x.$$

$$-2 \sin(7x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 4x = \cos 14x.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 5x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 5x - \cos 3x = -2 \sin 4x \sin x$$

$$\sin 3x - \sin 5x = -2 \sin 4x \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$\begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$$

$$4 + 28n = 1 + 2k$$

$$k = 6 + 28n$$

$$\begin{cases} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}$$

$$4 + 14n = 1 + 2k$$

$$6 + 14n = 2k$$

$$k = 3 + 7n$$

$$\begin{cases} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos 4x = 0 \end{cases}$$

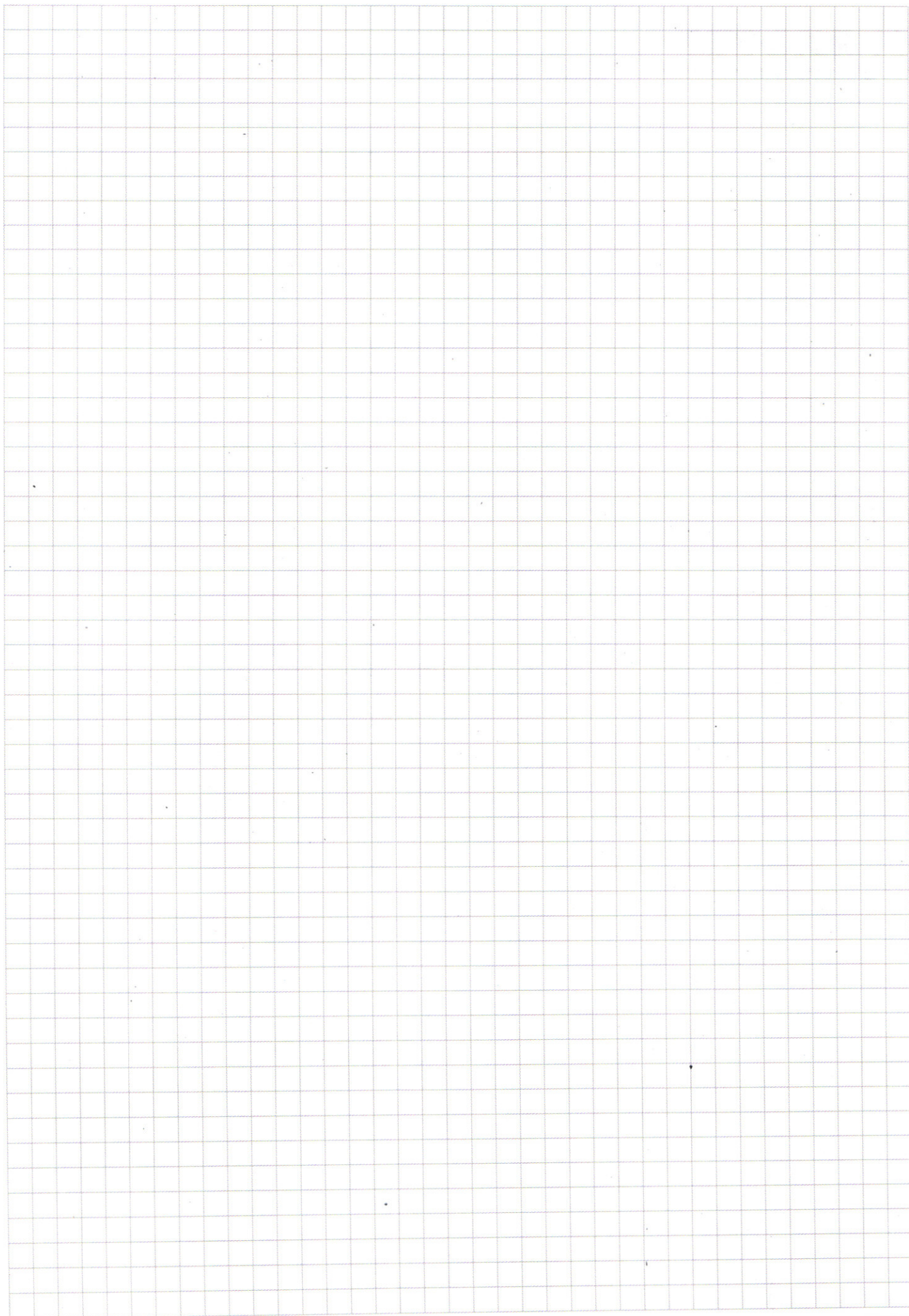
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n \\ x = \frac{\pi n}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \\ x = \frac{\pi n}{4} \end{cases}$$

$$4n = 1 + 2k$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \cos(14x - 3x) \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 14x \\ & \cos 14x \cos 3x + \sin 14x \sin 3x - \cos(5x) + \sin 3x \sqrt{2} \cos 3x \\ & \cos 14x \cos 3x + \sin 14x \sin 3x - \cos 3x - \sin 14x \cos 3x + \cos 14x \sin 3x = 0 \\ & \cos 3x (\cos 14x - \sin 14x) + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x = 0 \end{aligned}$$

$$\cos 3x + \cos 14x$$

$$\cos 14x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 14x (\sin 3x - \cos 3x)$$

$$+ \sin 3x - \cos 3x - \sqrt{2} \cos 14x = 0$$

$$\cos 14x (\cos 3x + \sin 3x)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cos 14x \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) (\sin 14x + 1) = \sqrt{2} \cos 14x \\ & (\cos 14x - 1) \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\cos 3x (\cos 14x - \sin 14x)$$

$$-2 \leq x \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$\cos 14x (\cos 3x + \sin 3x - \sqrt{2} - 1) + \sin 3x (\sin 14x + \cos 14x + 1) = 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$$

$$x = 2$$

$$\log_6 9$$

$$\begin{aligned} & 4 \log_3 y = 3 \Rightarrow \log_3 y = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 3^{\frac{3}{4}} \\ & 4 \log_3 + \log_3 y = 3 \Rightarrow \log_3 y = 3 - 4 \log_3 \\ & 4 \log_3 + 4 \log_3 y = 12 \Rightarrow \log_3 y = \frac{12 - 4 \log_3}{4} \end{aligned}$$

$$x = 115$$

$$\cos(54^\circ) \cos(54^\circ) = 2 \cos 54^\circ \cos 54^\circ$$

6
15. $n+1 = 24$
20.

$$\cos 11x + \cos(11-3x) = \cos 3x + \cos(14-11x)$$

$$2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) \cos(4x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cos(4x + \frac{\pi}{4}) \cos(4x - \frac{\pi}{4})$$

$$2 \cos(4x + \frac{\pi}{4}) \cos(4x - \frac{\pi}{4}) = 2 \cos(4x + \frac{\pi}{4}) \cos(4x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$$

$$a^2 + b^2 = 1 + 2ab$$

$$(a+b)^2 = 1 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = 1 - 2ab$$

$$\cos 11x - \cos 3x = 360$$

$$a^2 + b^2 = 2 + 5 \sin 11x$$

$$\cos 3x + \cos 5x = 500$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 500$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) = \cos(11x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) = \cos(11x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) = \cos(11x - \frac{\pi}{4})$$