

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Для начала разложим 64827 на простые множители:

1) 64827 по признаку делимости $\div 9$.

$$\begin{array}{r} 64827 \quad | 9 \\ - 63 \\ \hline 18 \\ - 18 \\ \hline 027 \\ - 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

2) $7203 \div 3$; $7203 = 3 \cdot 2401$.

3) $2401 = 7^4$

Итак $64827 = 7^4 \cdot 3^3$, т.к. это произведение цифр восьмизначного числа, то это число ~~содержит~~ обязательно содержит 4 семерки и 1 единицу + 3 тройки
числа 2 единицы + 1 тройка + 1 девятка.

число способов выбрать позиции для четырёх семерек в восьмизначном числе — $C_{8,4}^{7,4}$

Для 1 случая ~~выбора~~ кол-во способов расставить тройки и единицу по оставшимся позициям — $C_{4,1}^{3,1}$, ~~то~~ Для 2 случая это $C_4^2 \cdot 2$, где

C_4^2 - кол-во способов выбрать места для
едущих, а 2 - перестановки 9 и 3.
Тогда общее количество таких восьмизначных
чисел $C_8^4 \cdot (4 + C_4^2 \cdot 2) = 700$

Ответ: 700

и 3.

$$\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 5x = 0$$

Используя формулы суммы косинусов,
разности синусов и сдвигая фазы
функций получим:

$$2 \cos 5x \cdot \sin 2x + 2 \cos 5x \cdot \cos 2x + \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \left(\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) \right) = 0$$

по методу биномного разложения

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Тогда получаем $\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos 5x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$

$$\begin{cases} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \cos 5x = -\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{3\pi}{4} - 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = -\frac{3\pi}{4} + 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)};$$

$$\text{ОДЗ: } y < 0, \\ x > 0.$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y;$$

Решим второе ур-ие относительно y :

$$y^2 + 2y(x+2) + 12x - 3x^2 = 0.$$

$$y = -x - 2 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 12x + 3x^2} =$$

$$= -x - 2 \pm 2(x-1).$$

$$\begin{cases} y = -3x \\ y = x - 4. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ обе части первого ур-ия отрицательны $\Rightarrow$ мы можем их логарифмировать. Сделаем это:

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = \ln(x^{2\ln(xy^2)})$$

$$\ln(-y)(\ln x^7 - \ln(-y)) = (\ln x + \ln y^2) \cdot 2 \ln x$$

$$\ln(-y)(4\ln(x) - \ln(-y)) = 2\ln^2 x + 4\ln(-y) \cdot \ln x$$

$$3\ln x \cdot \ln(-y) = 2\ln^2 x + \ln^2(-y)$$

Подставляем y из 2-го ур-ня.

$$1. y = -3x,$$

$$3\ln x \cdot \ln 3x = 2\ln^2 x + \ln^2(3x)$$

$$3\ln x \cdot (\ln 3 + \ln x) = 2\ln^2 x + (\ln 3 + \ln x)^2$$

$$(\ln 3 + \ln x)(\ln 3 + \ln x - 3\ln x) + 2\ln^2 x = 0.$$

$$\ln^2 3 - \ln 3 \cdot \ln x = 0.$$

$$\begin{cases} x = 3. \\ y = -9. \end{cases}$$

$$2. y = x - 4, \text{ учитывая ОДЗ: } x \in (0; 4) \text{ и } y \in (-4; 0)$$

$$3\ln x \cdot \ln(x-4) = 2\ln^2 x + \ln^2(x-4). \text{ Проверка.}$$

не трудно проверить, что $x=1$ не является решением, потому разделим ур-е на $\ln^2 x$.

$$\frac{3\ln(x-4)}{\ln x} = 2 + \frac{(\ln(x-4))^2}{\ln^2 x}, \quad \text{замена: } \frac{\ln(x-4)}{\ln x} = a.$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = \frac{3+1}{2} = 2; 1.$$

$$\int \ln(4-x) = \ln x; \quad x=2$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln(4-x) = \ln x; \quad x=2 \\ \ln(4-x) = 2\ln x; \quad x^2+x-4=0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$

[illegible]

с учётом ~~XXXX~~
нагрузки

$$X \in (0, 4)$$

$$\begin{aligned} X &= 2 \\ Y &= 2 \\ X &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ Y &= \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Or bot: $(2; 2); (3; -9); \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}, -\frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$

N5.

$$|x+y+8| + |x-y+8| = 16.$$

$$2(|x|-8)^2 + (|y|-15)^2 = a.$$

Для начала рассмотрим первое уравнение:

первый модуль раскрывается S_{i+1}^{+} при $x+y \geq -\theta$, т. е.

Второй — ~~как~~ в точках пересечения
прямой $y = -x - 8$; третьей — ~~как~~ в точках
пересечения ~~прямой~~ $y = x + 8$

вспомогательная линия $y = x + 8$

Тогда есть 4 случая расположения модулей в 1
ур-нии

① точки выше $y = -x - 8$
и ниже $y = x + 8$.

$$x + y + 8 + x - y + 8 = 16$$

$x = 0$ — прямая $\parallel Oy$.

② точки выше $y = -x - 8$
и выше $y = x + 8$.

$$x + y + 8 - x + y - 8 = 16$$

$y = 8$ — прямая $\parallel Ox$.

③ точки ниже ~~$y = -x - 8$~~
и ~~ниже~~ выше $y = x + 8$

$$-x - y - 8 - x + y - 8 = 16$$

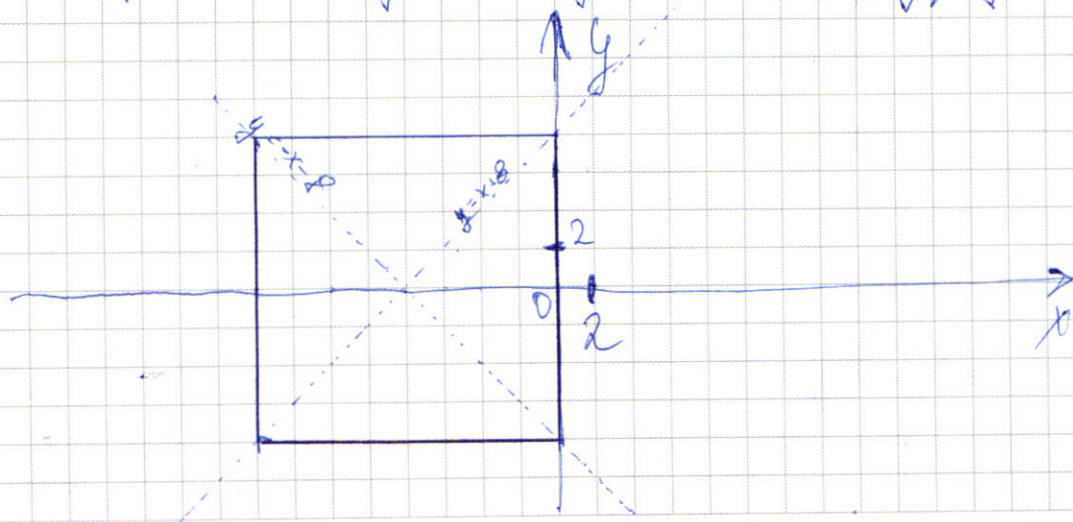
$x = -16$ прямая $\parallel Oy$.

④ точки ниже $y = -x - 8$
и ниже $y = x + 8$.

$$-x - y - 8 + x - y + 8 = 16$$

$y = -8$ — прямая $\parallel Ox$.

Построим нагляднее схему:

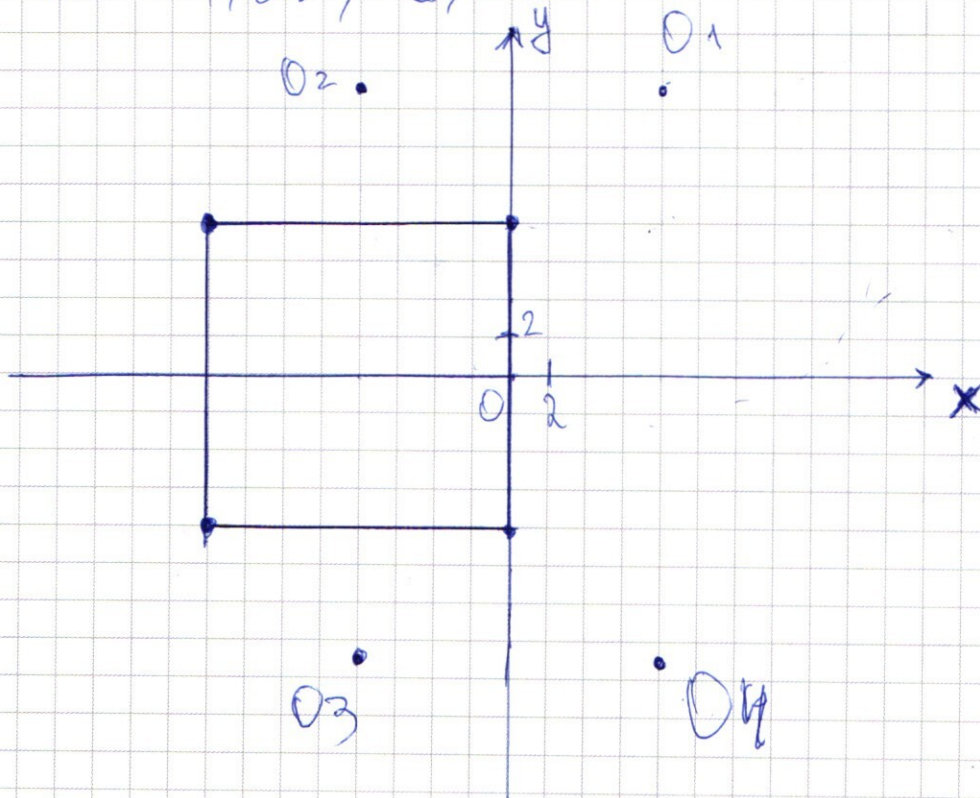


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второе ур-ие $(x-8)^2 + (y-15)^2 = a$
представляет собой совокупность окр-тей
(частей окр-тей) радиуса $\sqrt{a}$ (при $a < 0$
решений нет)

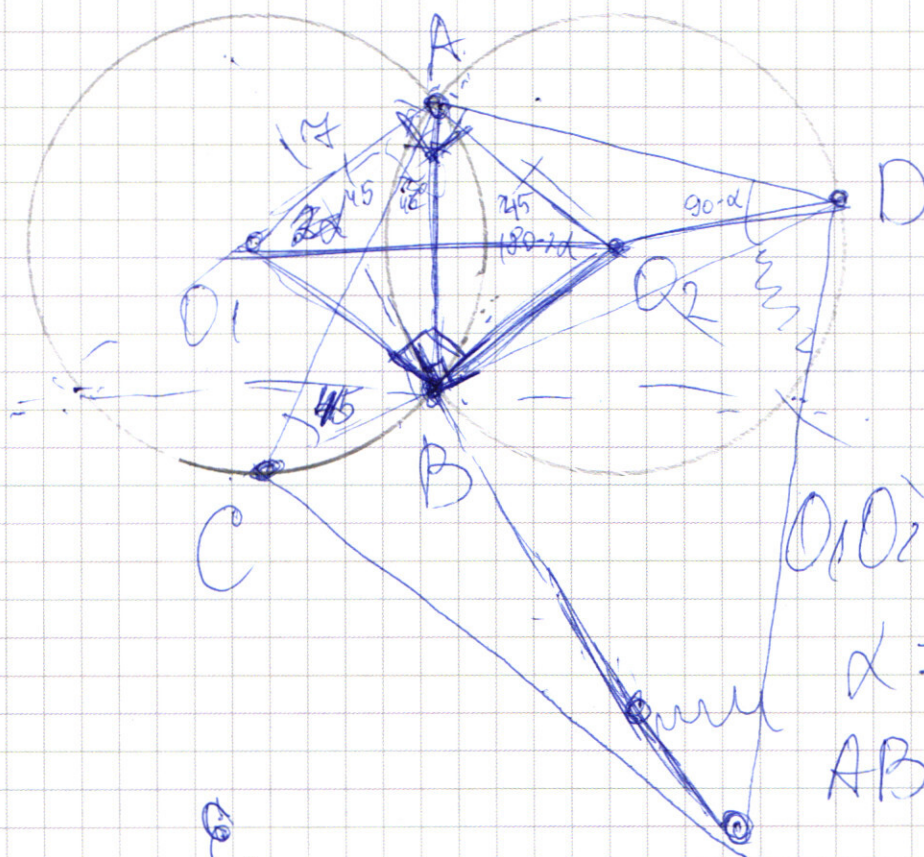
с центрами $O_1(8; 15)$ при x и $y \in I$ четв
 $O_2(-8; 15)$ при x и $y \in II$ четв
 $O_3(-8; -15)$ в III четв
 $O_4(8; -15)$ в IV четв.

Теперь построим на графике 1 ур-ие и
точки O_1, O_2, O_3, O_4 :



$$R_1 = R_2 = R = 17$$

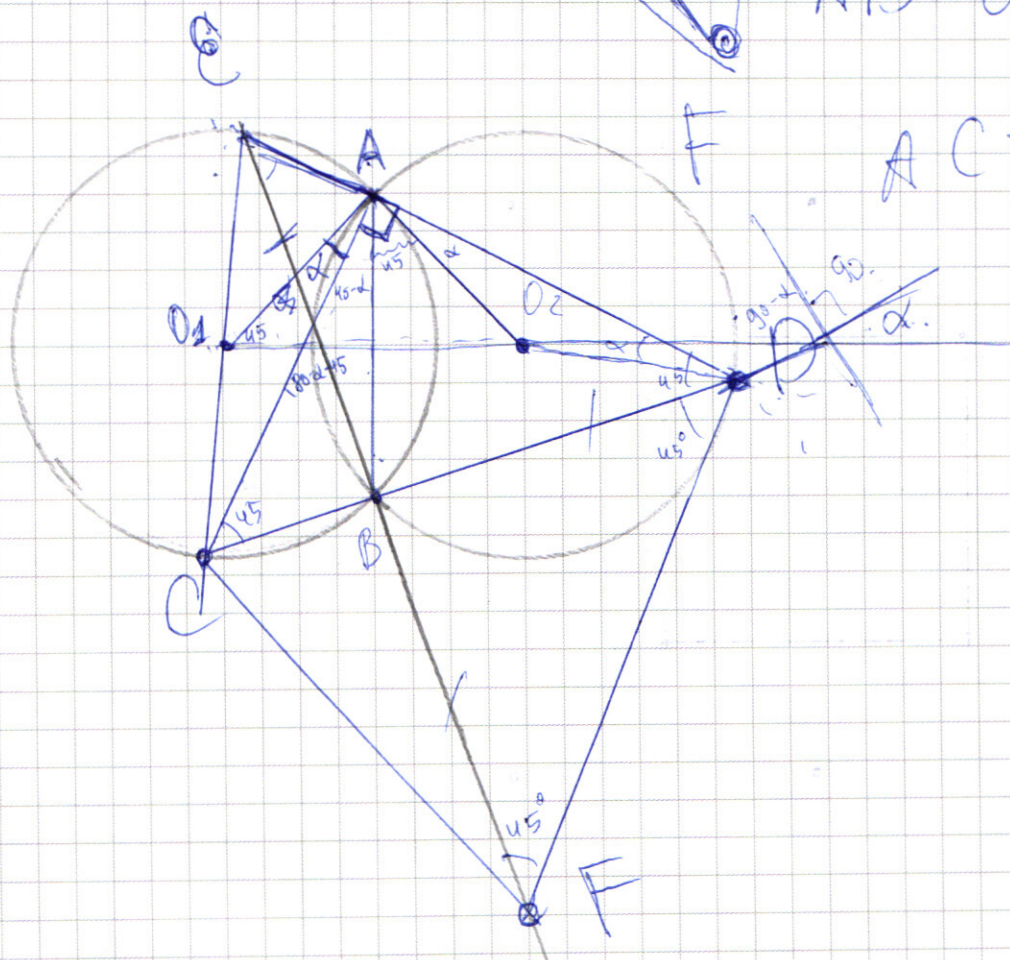
$$BF = BD$$



$$O_1 O_2 = \sqrt{2} \cdot 17$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$AB = O_1 O_2 = 17\sqrt{2}$$



$$AC = AD$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 1. В квадрате со стороной 17 и окружности с центром в центре квадрата и радиусом 7. Найти количество точек пересечения квадрата и окружности.~~

Заметим, что при любом значении a , количество пересечений квадрата и окружности с центрами в O_1 и O_4 , а также в O_2 и O_3 равно. Таким образом условие задачи равносильно поиску такого a , что окр-та (части окр-тей) с центрами в O_1 и O_2 пересекает квадрат ~~необязательно~~ ровно в 1 точке.

2-е условие задачи не выполняется (увеличиваю радиус, получаю 2 окр-ти, одна из которых не касается)

1. Окр-та с центром в O_2 .

I одно пересечение, при $7a = 7$

II > 1 пересечение, при $7a \in (7; 17]$

III 0 пересечений, при $7a \in [0; 7) \cup (17; \infty)$

2. Окр-та с центром в O_1

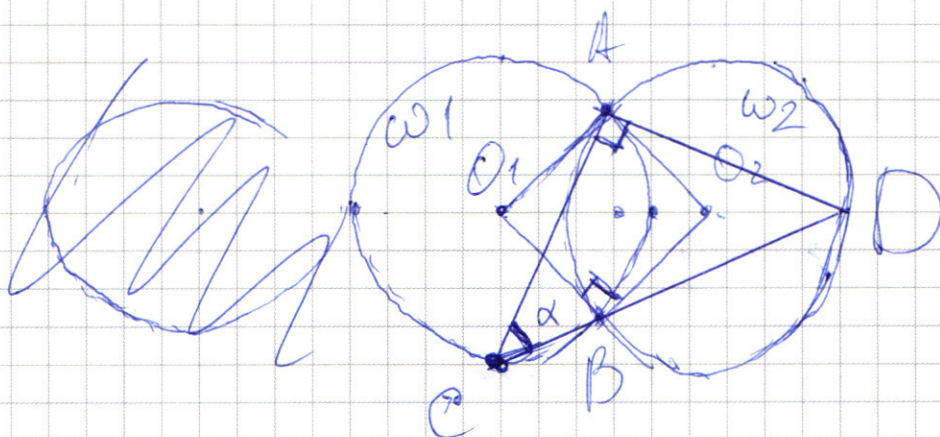
I, 1 пересечение, при $7a \in [17; 17]$

II, > 1 пересечение никогда

III, нет пересечений при $7a \in (0; 17) \cup (17; \infty)$

Тогда подходит $7a = 7$; $a = 49$. Ответ: 49.

NE

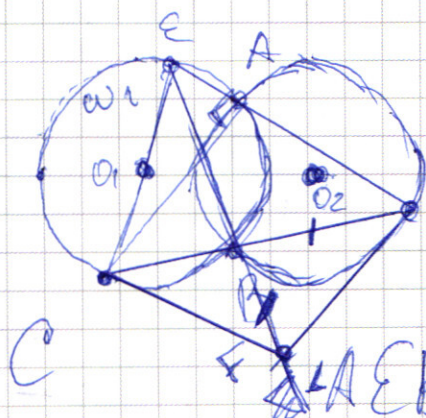


Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle AO_1B = 2\alpha$.

$\angle ADB = 90 - \alpha$ и $\angle AO_2B = 180 - 2\alpha$.

Тогда O_1AO_2B - вписанный
 $\Rightarrow \angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 90^\circ$; $\angle AO_1B = 90^\circ$

$\alpha = \angle ACB = 45^\circ = \angle ADC$.



~~Пусть $\angle ACB = \alpha$~~

Пусть $DA \cap \omega_1 = E$,
 $\angle EAC = 90^\circ \Rightarrow EC$ - диаметр

$\angle AEB = \angle ACB = 45^\circ$.

$\angle EDB = 45^\circ$

$\Rightarrow \angle EBD = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow BE \perp CD$ через B,

т.е. $F \in EB$. ~~В $\triangle FBD$~~ $\angle BFD =$
 $= \angle BDF = 45^\circ$

т.к. $BD = BF$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$DB \perp EF, \angle EDB = \angle BDF = 45^\circ$$

$\Rightarrow DB$ — ~~линия~~ высота ^{и медиана} $\triangle EDF$

$\Rightarrow EB = BF = DB$. Тогда CB —

~~линия~~ высота и медиана $\triangle ECF$

$\Rightarrow CE = CF$; CE — диаметр,

$$CE = 2R; CF = 2R = 34$$

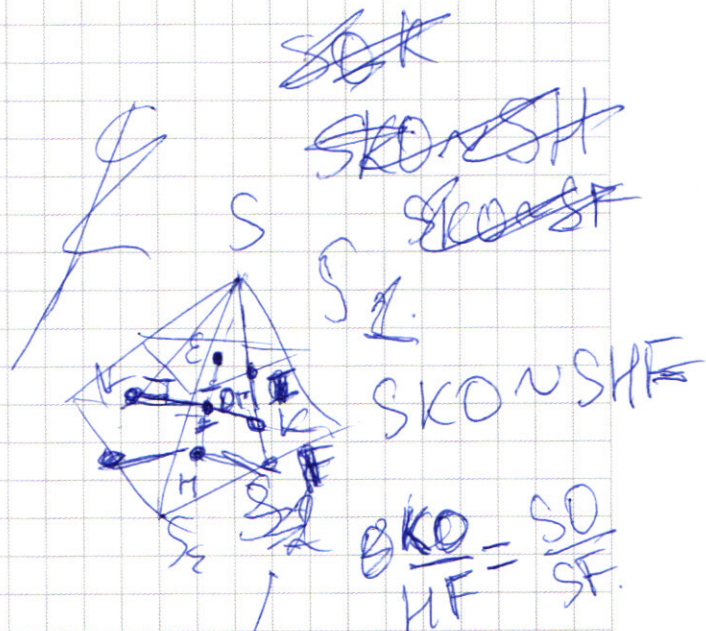
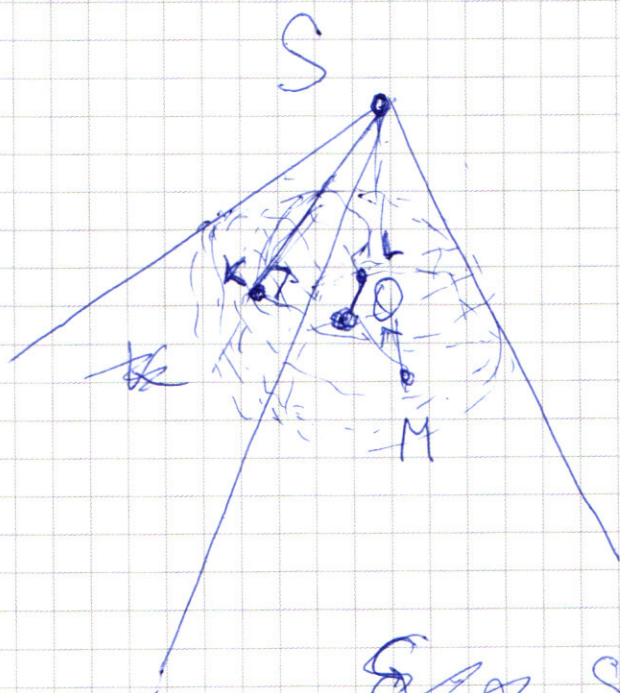
Ответ: 34

$$4 > 3^x + 4 \cdot 3^{2x}$$

$$4 \leq 93 + 3 - 3x \cdot (-4)$$

$$-44 > 93 - 93 \cdot 4 - 43 + 12x$$

$$-34 > 3 + 12x$$



$$S_1 = 9$$

$$S_2 = 16$$

$$\frac{R}{HF} = \frac{4R}{SF}$$

$$\frac{HF}{SF} = \frac{1}{4}$$

$$\triangle SEI \sim \triangle SHF$$

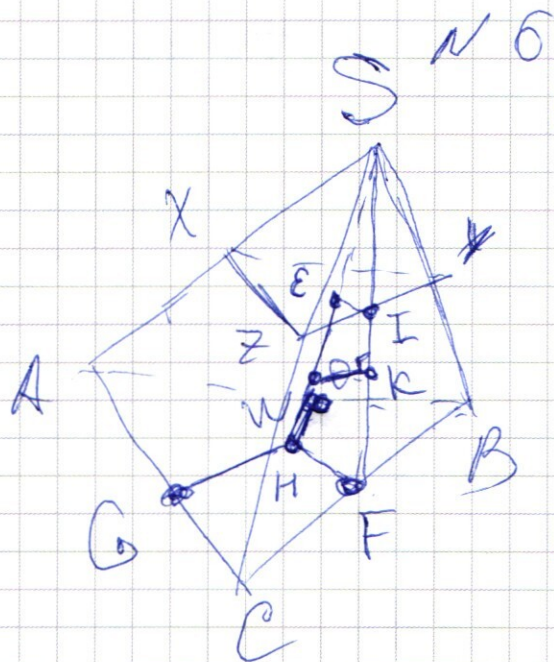
$$\frac{SE}{SH} = \frac{EI}{HS} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{3}{4}$$

$$SH = SE + 2R$$

$$4SE = 3SE + 6R$$

$$SE = 6R$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть основанием этого
тетраэдра — является из
плоскостей касающихся
сферы, а XYZ — верхняя

$$(XYZ) \parallel (ABC)$$

$$S(ABC) = 16$$

$$S(XYZ) = 9$$

$$SH \perp (ABC)$$

$$H \in ABC$$

$$SF \perp BC; F \in BC$$

$$E \in (XYZ); SE \perp (XYZ)$$

$$SF \cap XYZ = I; SI \perp ZX$$

$$\triangle SEI \sim \triangle SHF; \frac{EI}{HF} = \frac{SE}{SH} = \sqrt{\frac{S_{XYZ}}{S_{ABC}}} = \frac{3}{4}$$

Кроме нетрудно заметить, что EH — диаметр.

Пусть радиус — R ; $EH = 2R$.

$$SH = 2R + SE; SE \cdot 4 = 3 \cdot (2R + SE)$$

$$SE = 6R$$

Радиус сферы, проведенный в точку касания с (SCB) ,
 $\perp (SCB)$; пусть K — точка

наклонная сторона $u(SBC)$

$(SHF) \perp (SBC)$ т.к. $HF \perp BC$ и $SF \perp BC$.

тогда $KE(SHF)$; $\frac{KO}{SF}$ тогда $\triangle SKO \sim \triangle SHE$

по 2-м углам (общий вершинный и 90°),

$$\Rightarrow \frac{KO}{HF} = \frac{SO}{SF}; KO = R; SO = SE + EO = 7R.$$

$$\frac{HF}{SF} = \frac{KO}{SO} = \frac{1}{7} = \sin \angle KSO$$

$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{7}$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

~~В $\triangle$ ах KLM и FGW соответственно
пропорциональные $\perp$ -ые к сторонам
а т.к. Δ задается 3-мя элементами,
то еще необходимо (БОВ) основания $\perp$ -ов
(СВН - основания $\perp$ -ов из т.Н. на стороны AC и AB)~~

тогда $\frac{SKLM}{SFG}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

путь (км) $\angle$ стороны треугольника
числа $\sin \alpha$, $\sin \beta$ и $\sin \gamma$, тогда

~~в $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$~~

~~соответственно $\sin \alpha$, $\sin \beta$ и $\sin \gamma$~~
~~пропорциональны~~
~~сторонам a , b и c~~

$$\triangle APQ \sim \triangle ABC$$

$$\text{иначе } \frac{S_{APQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{R}{r}\right)^2, \text{ где}$$

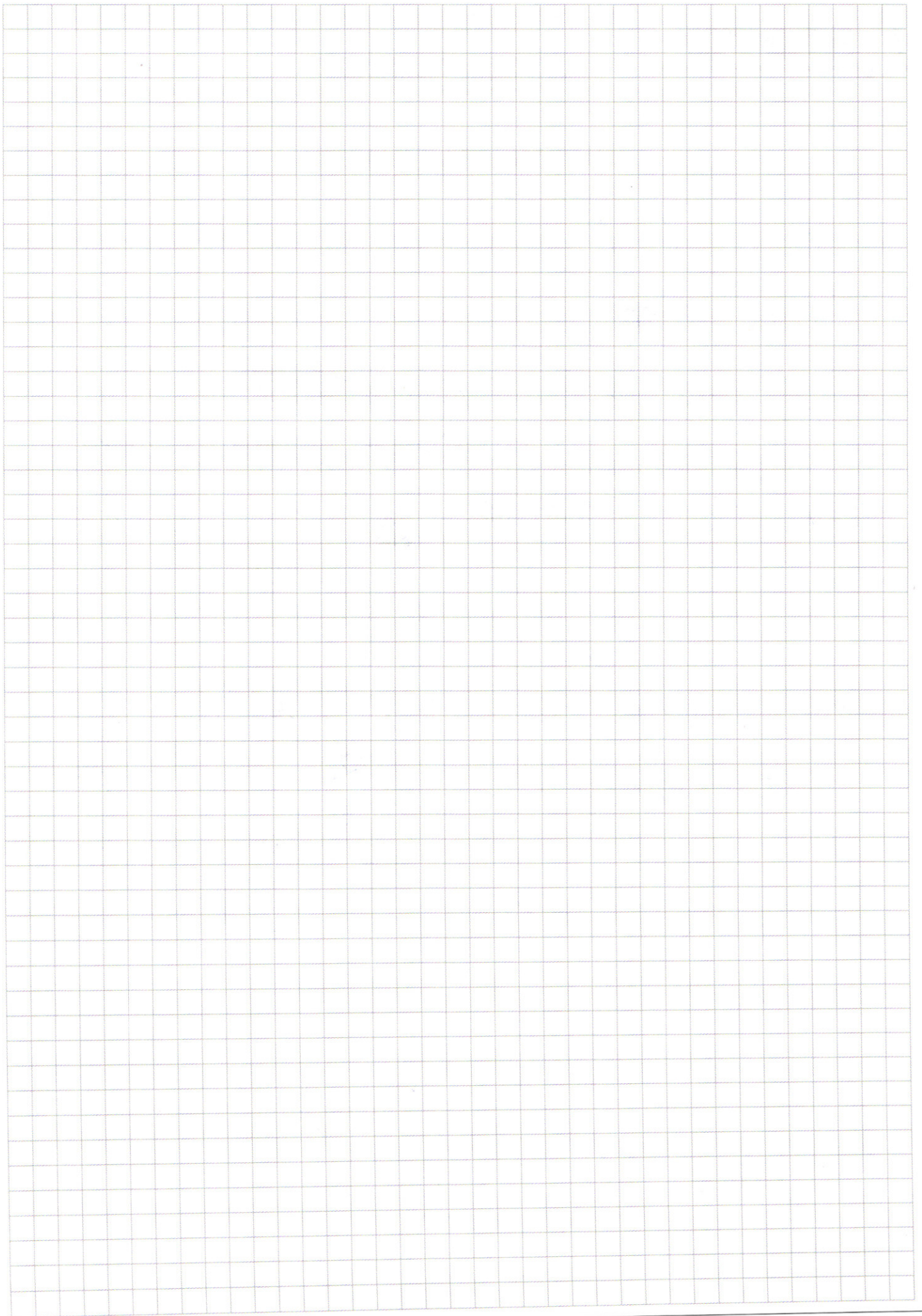
r — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

$$r = SN \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{8R}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot R$$

$$S_{APQ} = S_{ABC} \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 16 \cdot \frac{R^2}{\frac{12}{9}R^2} =$$

$$= 12$$

$$\text{Ответ: } \arcsin\left(\frac{1}{4}\right), 12$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$1. y = -3x$$

$$\ln(3x) \cdot \ln\left(\frac{x^6}{3}\right) = \ln(81x^6) \cdot \ln x$$

$$(\ln x + \ln 3)(\ln x^6 - \ln 3) = (\ln 81 + \ln x^6) \ln x$$

$$\ln x^6 \cdot \ln x - \ln 3 \cdot \ln x + \ln x^6 \cdot \ln 3 = \ln x \cdot \ln 81 + \ln x \cdot \ln x^6$$

$$\ln x^6 \cdot \ln 3 = \ln x \cdot \ln 243$$

$$6 \ln x^6 = 5 \ln x$$

$$x = 1$$

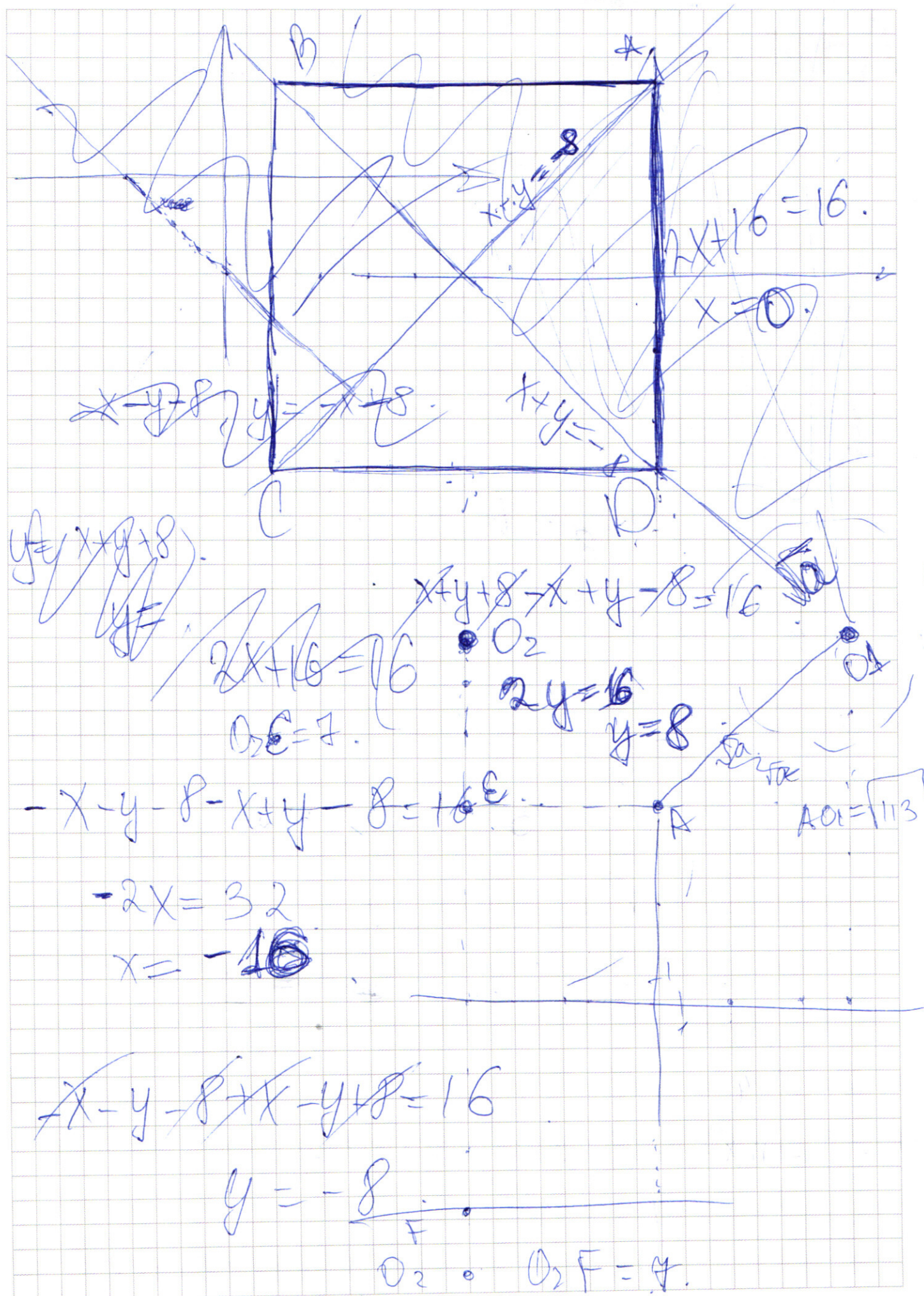
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 3} = 1$$

$$2. y = x - 4$$

$$\ln(-y) (2\ln x^3 - \ln(-y)) = 2\ln x (\ln x + 2\ln(-y))$$

$$7\ln x \cdot \ln(-y) - (\ln(-y))^2 = (2\ln x)^2 + 4\ln x \cdot \ln(-y)$$

$$3\ln x \cdot \ln(-y) = 2(\ln x)^2 + (\ln(-y))^2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$648 \cancel{24} = 7203 \cdot 9 = 3^3 \cdot 2401 = 3^3 \cdot 7 \cdot 343 =$$

$$\begin{array}{r} 64824 : 9 \\ \underline{63} \\ -18 \\ \underline{-18} \end{array}$$

$$= 3^3 \cdot 7^4$$

$$\textcircled{7} \times 4 + \rightarrow 3; 9$$

$$3; 3; 3$$

$$C_4^8 (4 + C_2^4 \cdot 2) = \frac{8!}{4!4!} \cdot 10 = \frac{5040 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 700$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\cos(5x+2x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$$

$$\sin 7x - \sin 3x = 2 \cos 5x \sin 2x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} (\sin^2 2x - \cos^2 2x)$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) (2 \cos 5x + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 5x = \cos 3x \cos 2x - \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos 2x (\sqrt{2} \cos 3x - 1) - \sin 2x (\sqrt{2} \sin 3x - 1) = 0$$

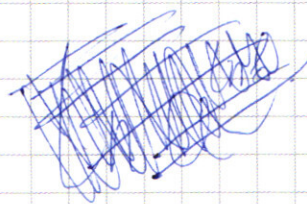
$$\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{x}{y}\right)^{\ln(-y)} \stackrel{N3.}{=} x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$-30x = 4$$



$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0$$

~~$$y = \frac{-2x - 4 \pm \sqrt{4x^2 + 32x - 12x - 4y}}{2}$$~~

$$y^2 + y(2x + 4) + 12x - 3x^2 = 0$$

~~$$y = \frac{-2x - 4 \pm \sqrt{4x^2 + 32x - 12x - 4y}}{2}$$~~

$$y = -x - 2 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 3x^2 - 12x}$$

$$= -x - 2 \pm 2\sqrt{x^2 + 3x - 2}$$

$$= \begin{cases} -x - 4 \\ -3x \end{cases}$$

$$3 \ln(4-x) = 2 \ln$$