

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$3385 = 3^3 \cdot 5^3$. Значит, число состоит из цифр 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5 или 1, 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5.

Число в первом случае $P_8(2; 3, 3) = \frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$, а во втором - $P_8(3; 3) = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$. Всего чисел $\frac{8!}{3! \cdot 3!} \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4}{1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 56 \cdot 30 = 1680$

Ответ: 1680 чисел.

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x;$$

$$\sin 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 11x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 3x \cdot \cos 11x - \sin 3x \cdot \sin 11x -$$

$$- \cos 11x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Big| - \frac{1}{2};$$

$$\left(\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\sin 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\cos 11x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$2 \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = -2 \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot$$

$$2 \cos \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}; \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \left(\cos \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0; \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy^{13} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$1) \lg x \cdot \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \cdot \lg y; \lg x (5 \lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y;$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0; (\lg x - 2 \lg y)(\lg x - \lg y) = 0;$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases}; \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ y > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0 \\ x = y^2 \\ y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \\ y > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = y \\ y(y-2) = 0 \\ x = y^2 \\ y(y-3)(y^2+y-4) = 0 \\ y > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 9 \\ y = 3 \\ x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$(2; 2), (9; 3), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (9; 3), \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

Дано:

сфера с центром O вписана в трехгранный угол с вершиной S .

K, L, M - точки касания

$S_1 = 1, S_2 = 4$ - площади сечений, перпендикулярных SO и касающихся сферы

Найти:

$\angle KSO$, S - площадь сечения KLM

Решение:

Пусть A_1, B_1, C_1 и

A_2, B_2, C_2 - точки

пересечения

SK, SL и SM с

плоскостями, а H_1 и H_2 -

пересечения SO со сферой, R - радиус сферы.

$\triangle KSO = \triangle LSO = \triangle MSO$ по катету и гипотенузе.

$\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$. Тогда $\triangle A_1H_1S = \triangle B_1H_1S = \triangle C_1H_1S$

по катету и прилежащему углу. $A_1H_1 = B_1H_1 = C_1H_1$.

Пусть $H \in SO$, $KH \perp SO$. $\triangle KHN = \triangle LHN = \triangle MHN$ по стороне

и углу между ними. $LN \perp SO$, $MN \perp SO$. Тогда $KN \perp LN$,

$KL \perp LM$. N - центр окружности, вписанной в сечение, NK, NM, NL - радиусы.

Точности $A_1B_1C_1$, KML и $A_2B_2C_2$ перпендикулярны, A_1H_1 , KH и A_2H_2 ; A_1H_1 , LH и B_2H_2 ; C_1H_1 , MH и C_2H_2 попарно перпендикулярны. Тогда H_1 и H_2 - центры окружностей, вписанных в сетки, а A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 - точки касания, а сами сетки - подобные треугольники.

$$\frac{A_2H_2}{A_1H_1} = \frac{SH_2}{SH_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}, \quad \frac{SH_2}{SH_1} = 2, \quad 2SH_1 = SH_2 + 2R,$$

$$SH_1 = 2R. \quad SO = 3R, \quad \operatorname{tg} \angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}, \quad \angle KSO = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

$$\angle KHQ = \angle KSO, \quad HQ = R \cdot \frac{1}{3} = \frac{R}{3}. \quad SH = 3R - \frac{R}{3} = \frac{8}{3}R;$$

$$\frac{KH}{A_1H_1} = \frac{\frac{8}{3}R}{2R} = \frac{4}{3}, \quad \frac{S}{S_1} = \left(\frac{KH}{A_1H_1} \right)^2 = \frac{16}{9}, \quad S = \frac{16}{9}$$

$$\text{Ответ: } S = \frac{16}{9}, \quad \angle KSO = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Дано:

$R=5$, $\angle CAD=90^\circ$, $BE \perp CD$, $\angle DBF=90^\circ$, $BF=BD$
 $BC \perp AB$

Найти:

а) CF

б) S

Решение:

Пусть $\angle BAD = \alpha$.

$$CF^2 = BF^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2.$$

$$\frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R, BC = 2R \cos \alpha, \frac{BD}{\sin \alpha} = 2R, BD = 2R \sin \alpha$$

$$BC^2 + BD^2 = 4R^2, CF = 2R, CF = 10; \frac{BD}{BC} = \tan \alpha, \frac{BF}{BC} = \tan \alpha, \angle BCF = \alpha$$

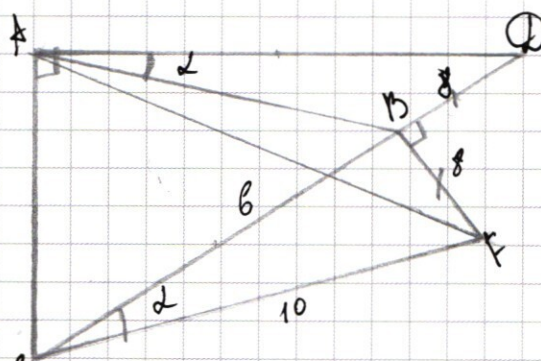
$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R = \frac{AD}{\sin \angle ABD}, \sin \angle ABC = \sin \angle ABD, AC = AD,$$

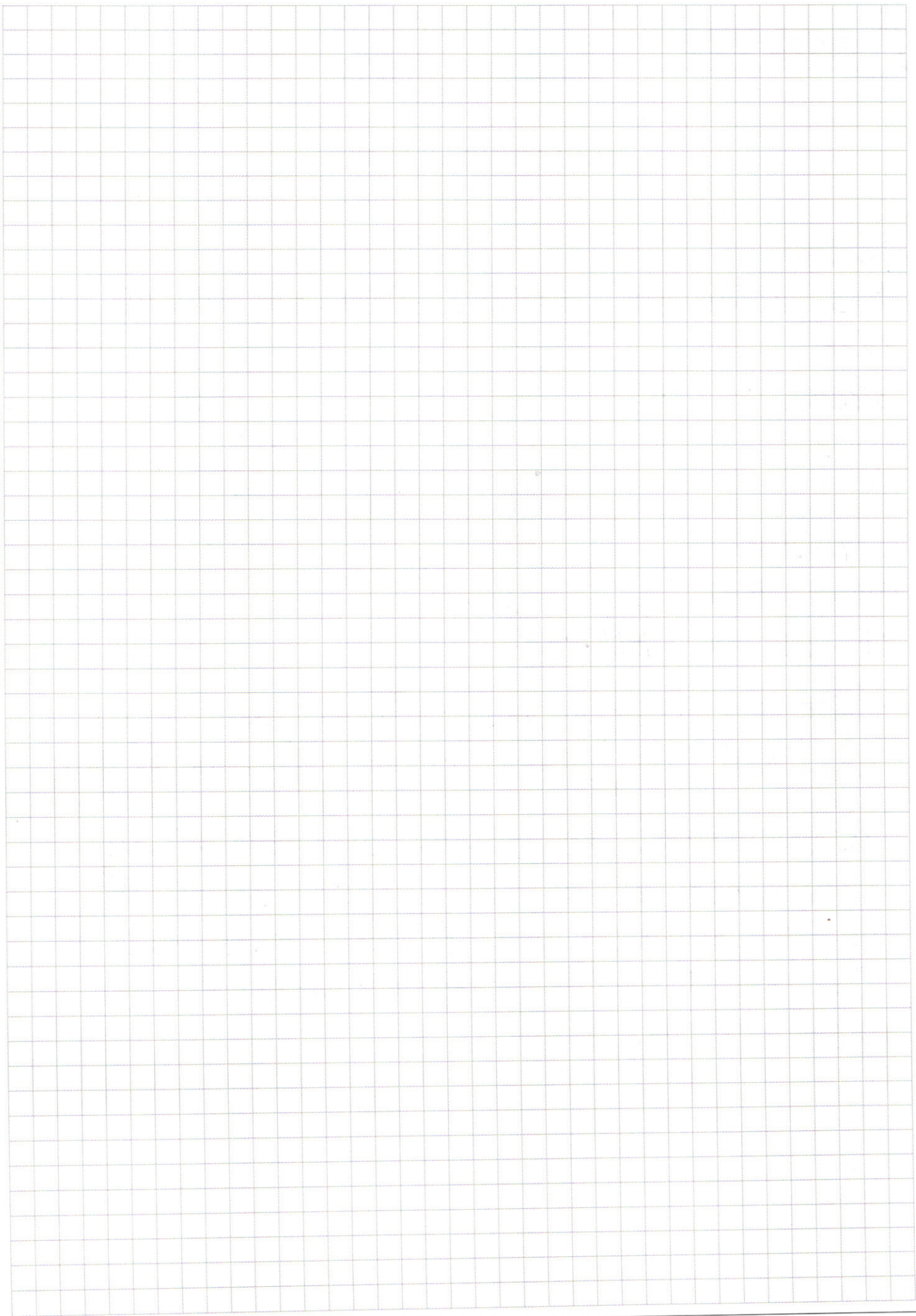
$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ. BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8, CD = 14, AC = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \alpha) = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot 10 \cdot (0,6 + 0,8) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 49$$

Ответ: $CF = 10$, $S = 49$.





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x &= y^2 \lg xy, \quad \lg x \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg xy \cdot \lg y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$(\lg x)^{\frac{1}{5}} (\lg y^5 - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \cdot \lg y^{\frac{1}{5}}$$

$$a(56 - a) \leq 2(a + b) \cdot 8$$

$$5ab - a^2 = 2b^2 + 2ab, \quad a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a=b, a=2b \quad (a-b)(a-2b)=0 \quad \frac{a}{b} - 3\frac{a}{b} + 2 = 0, \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(\frac{a}{b} - 2\right) = 0$$

$$\lg x = \lg y \Rightarrow \lg x = \lg y^2$$

$$x=y, x=y^2, 1) y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$4y^2 - 8y = 0, \quad y(y-2) = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0, \quad y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y(y-8)(y^2+y-4)=0$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 8x$$

$3R, R$

782.

$$\text{f.e. } k_{SO} = \frac{1}{3}$$

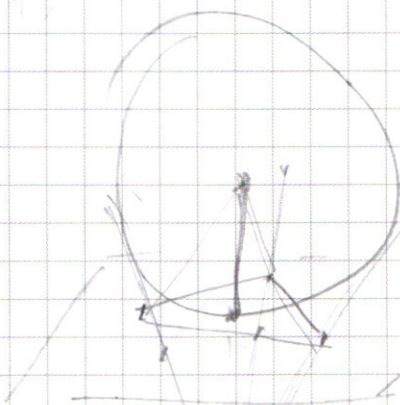
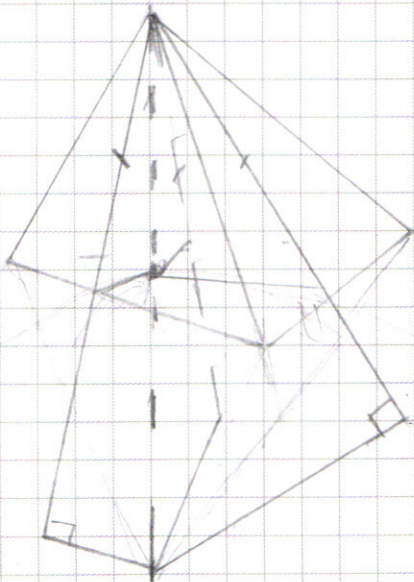
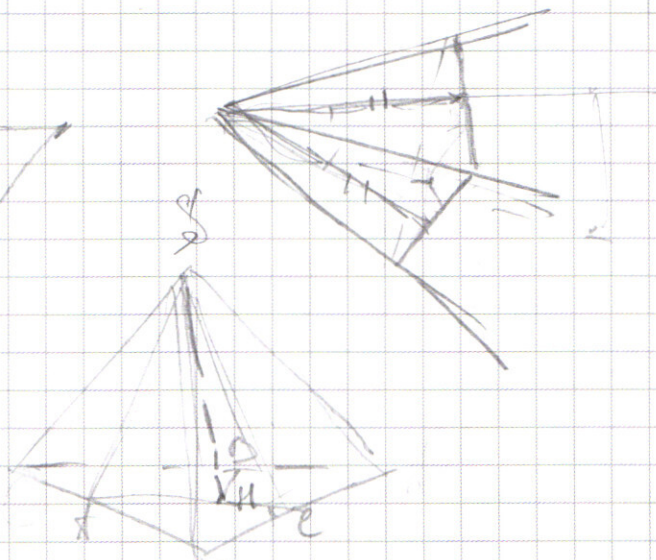
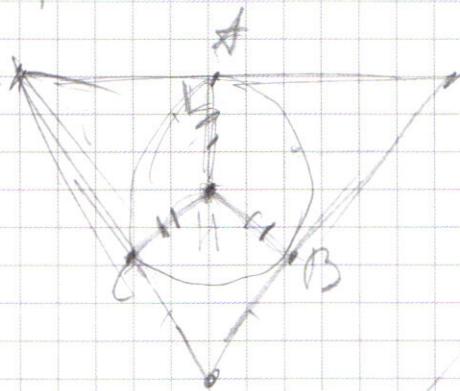
$$\angle S'O = \arcsin \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$

$$\chi = \frac{216}{\frac{8}{3}R} \rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \sqrt{\frac{36}{64} = \frac{9}{16}}, \quad \sqrt{2} = \frac{16}{9}$$

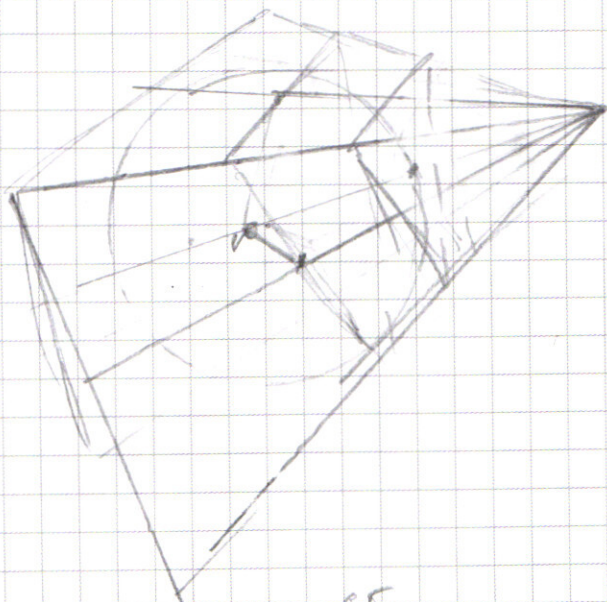
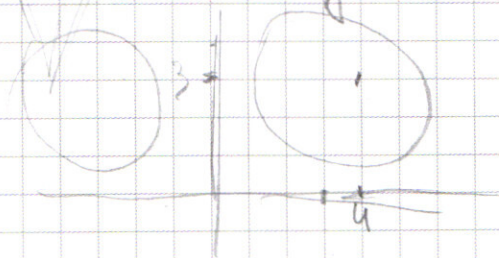
$$\frac{(1 + \sqrt{17})^2}{4} = \frac{17 + 1 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

51



$$y - 3 - x \geq 0$$

$$y \geq x + 3$$



$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 9$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} + 1 \leq 40 + 2^{64} \cdot x - x$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) 325 = 3 \cdot 1125 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 125 = 3^{3 \cdot 5^3}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 16800$$

$$2) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin\left(-4x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = \cos 4x$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \left(\sin \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} + \cos \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$= -\sin \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

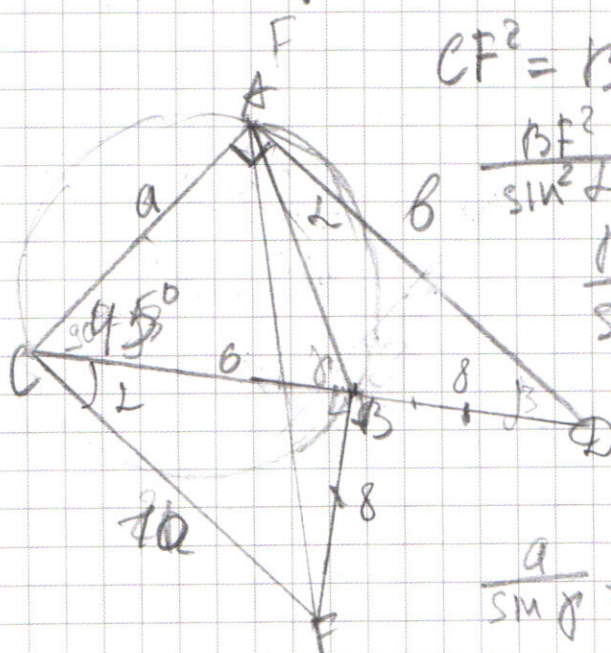
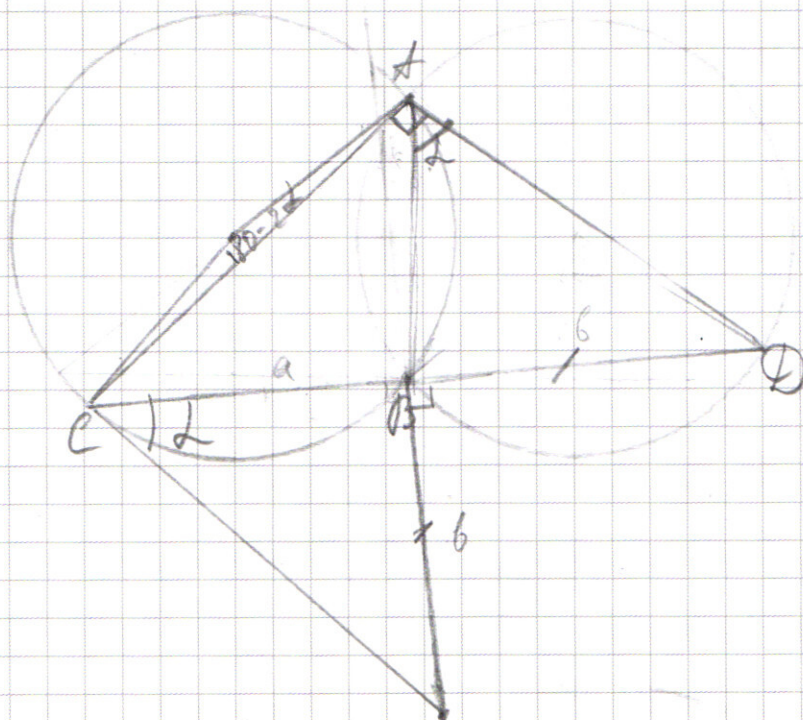
$$\sin \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin 3x - \sqrt{2} \sin 11x + 2 \sin 5x \sin 11x = 2 \cos 11x \cos 3x -$$

$$- \sqrt{2} \cos 11x + \sqrt{2} \cos 3x, (\sqrt{2} \sin 3x - 1)(\sqrt{2} \sin 11x + 1) =$$

$$= (\sqrt{2} \cos 3x - 1)(\sqrt{2} \cos 11x + 1)$$

$$\frac{a}{\cos L} = \frac{b}{\sin L}, \quad \frac{b}{a} = \tan L$$



$$CF^2 = BC^2 + BF^2$$

$$\frac{BF^2}{\sin^2 L} = 4R^2$$

$$\frac{BC^2}{\sin^2(90-L)} = 4R^2$$

$$4R^2 \quad CF = 2R$$

$$\frac{6}{\cos L} = 10, \quad \cos L = 0.6$$

$$\frac{a}{\sin \gamma} = 2R, \quad \frac{b}{\sin \gamma} = 2R$$

$$a = b$$