МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в рабс
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$3375 = 675\cdot 5 = 135\cdot 5^2 = 27\cdot 5^3 = 3^3\cdot 5^3$

Заметим, что в восьмизначном числе нет нулей, иначе произведение цифр 0.

$\exists$ цифра $\vdots 5 \Rightarrow$ цифра $=5k$, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Т.к. $k\neq 0$ (иначе цифра $=0$) $\Rightarrow$ цифра $=5k, k\in\mathbb{N}$. Тогда, если $k\geq 2 \Rightarrow 5k\geq 10>9 \Rightarrow$ прот.!, т.к. цифра ≤ 9. Тогда цифра $=5\cdot 1=5$.

Т.к. $3375 = 3^3\cdot 5^3$ – сод-т 5 в 3-ей степени, то 3 цифры числа $\vdots 5$ (если ≤ 2 цифр, то одна из цифр $\geq 5^2 = 25 > 9$) $\Rightarrow$ 3 цифры равны 5. Произведение остав. 5 цифр равно $27 = 3^3$. Т.к. $3^3 \vdots$ только на 3 (из простых), то ост. цифры – степени тройки (может быть, в нулевой степени, т.е. $3^0=1$). $\exists$ 4 случая.

1) ≥ 4 цифр $\vdots 3 \Rightarrow$ уже Произв. $\geq 3^4 > 3^3 \Rightarrow$ случай невозможен

2) 3 цифры $\vdots 3 \Rightarrow 3^a\cdot 3^b\cdot 3^c = 3^{a+b+c} = 3^3$; $a,b,c\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. при $\left[\begin{array}{l} a\geq 2 \\ b\geq 2 \\ c\geq 2\end{array}\right.$ $a+b+c\geq 4$, то $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все 3 цифры есть 3, ост. 2 цифры есть 1.

3) 2 цифры $\vdots 3 \Rightarrow 3^a\cdot 3^b = 3^3$; $a,b\in\mathbb{N}$; $a\geq b$.

Если $a\geq 3 \Rightarrow 3^{a+b}\geq 3^4 > 3^3 \Rightarrow a\leq 2$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Если $a=1 \Rightarrow b \le a = 1 \Rightarrow b = 1$ и $3^{a+b} = 3^2 < 3^3 \Rightarrow$ нет.

Если $a=2 \Rightarrow 3^{2+b} = 3^3 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$ в таком случае одна из цифр $3^2=9$, другая $3^1=3$, ост. 3 цифры есть 1.

4) 1 цифра $\vdots 3 \Rightarrow$ она $\ge 3^3 > 9 \Rightarrow$ случай невозможен

5) 0 цифр $\vdots 3 \Rightarrow$ случай невозможен, т.к. $n = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ge 1$ цифры $\vdots 3$.

Итак, $\exists$ 2 случая:

1) цифры 11333555

2) цифры 11139555

В 1-ом случае число способов есть

$P(2,3,3) = \dfrac{(2+3+3)!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = \dfrac{8!}{2\cdot 6\cdot 6} =$

$= \dfrac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}^{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2 = 56\cdot 10 = 560.$

Во 2-ом случае число способов есть

$P(3,1,1,3) = \dfrac{(3+1+1+3)!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 3!} = \dfrac{8!}{6\cdot 6} =$

$= \dfrac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1}{\cancel{6}\cdot \cancel{3\cdot 2}} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4 = (8\cdot 7\cdot 5\cdot 2)\cdot 2 = 560\cdot 2 =$
$= 1120$

$\sum = 1120 + 560 = 1680$.

В каждом случае заданные 8-значные числа существуют, т.к. каждая их цифра ≥ 1 и ≤ 9.

8-значные числа из 1-го и 2-го случаев различаются, т.к. во 2-ом случае есть 9, в 1-ом — нет. При этом каждое возможное, хорошее 8-знач. число было описано $\Rightarrow$ ответ 1680.

Ответ: 1680 чисел.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x \Leftrightarrow [1]$

$\cos 11x - \cos 3x = \cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) = -2\sin 7x \sin 4x$

$-\sin 11x + \sin 3x = -\sin(7x+4x) + \sin(7x-4x) = -2\cos 7x \sin 4x$

тогда $[1] \Leftrightarrow -2\sin 7x\sin 4x - 2\cos 7x \sin 4x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\Leftrightarrow -2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x =$

$= \sqrt{2}(2\cos^2 7x - 1) = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)\cdot$

$\cdot(\cos 7x + \sin 7x) \Leftrightarrow -2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) =$

$= \sqrt{2}(\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin 7x + \cos 7x)(\sqrt{2}\cos 7x - \sqrt{2}\sin 7x + 2\sin 4x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin 7x + \cos 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2}\sin 4x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ -\sin 7x + \cos 7x + \sqrt{2}\sin 4x = 0 \end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sqrt{2}\sin(7x + \frac{3\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin 4x = 0 \end{array}\right.$

(1): $\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{1+1}\sin(7x+\varphi)$, $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

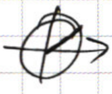
$\Rightarrow$ подходит $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2}\sin(7x + \frac{\pi}{4})$.

$-\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{1+1}\sin(7x+\varphi)$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходит $\varphi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2}\sin(7x + \frac{3\pi}{4})$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(7x+\frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) = -\sin 4x = \sin(-4x) \end{array}\right. \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 7x + \frac{\pi}{4} = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 7x + \frac{3\pi}{4} = -4x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x + \frac{3\pi}{4} + (-4x) = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

(2): $\exists$ 3 случая совпадения синусов:

1) на тригг. круге совпадают знач.  $\Rightarrow 7x+\frac{3\pi}{4}=-4x+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

2) знач. на круге не совпадают $\Rightarrow$ 2 расположения:

2.1)  $\Rightarrow \sum = 7x+\frac{3\pi}{4}+(-4x)=\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

2.2)  $\Rightarrow \sum_1 = 7x+\frac{3\pi}{4}+(-4x)=\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Все случаи описаны.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x=-\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in\mathbb{Z} \\ 11x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 3x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{28}+\frac{\pi}{7}m, m\in\mathbb{Z} \\ x=-\frac{3\pi}{44}+\frac{2\pi}{11}k, k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}n, n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Тогда получаем Ответ:

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{28}+\frac{\pi}{7}m, m\in\mathbb{Z} \\ x=-\frac{3\pi}{44}+\frac{2\pi}{11}k, k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}n, n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2-ое ур-ие:

$x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \Leftrightarrow (x-3y)(x+y-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y=0 \\ x+y-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y \\ x=4-y \end{array}\right.$

Рассмотрим 1-ое ур-ие:

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 0 \\ xy>0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}=y^{2\lg xy} \end{cases}$

проверили $\exists$ $\lg x$ и $\lg xy$ и знаменатель дроби.

Продолжение на стр. 13

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$$ имеет ровно 2 решения.

Рассмотрим 1-ое ур-ие:

$|y-3-x|+|y-3+x|=6 \Leftrightarrow |y-(x+3)|+|y-(-x+3)|=6.$

Рассмотрим 4 случая и изобразим их на пл-ти XOY:

1) $\begin{cases} y\geq x+3 \\ y\geq -x+3 \\ y-x-3+y+x-3=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x+3 \\ y\geq -x+3 \\ 2y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x+3 \\ y\geq -x+3 \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\geq x+3 \\ 6\geq -x+3 \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ x\geq -3 \\ y=6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y\geq x+3 \\ y\leq -x+3 \\ y-x-3-y+3-x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x+3 \\ y\leq -x+3 \\ -2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq x+3 \\ y\leq -x+3 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq -3+3=0 \\ y\leq 3+3=6 \\ x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow$

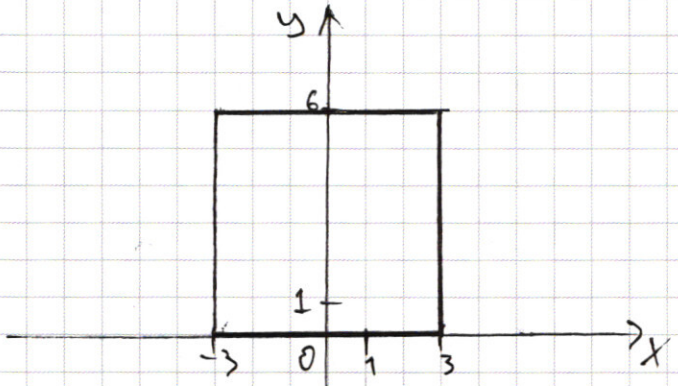
$\Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 0 \\ y\leq 6 \\ x=-3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y\leq x+3 \\ y\geq -x+3 \\ -y+3+x+y-3+x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq x+3 \\ y\geq -x+3 \\ 2x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq x+3 \\ y\geq -x+3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq 3+3 \\ y\geq -3+3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y\leq 6 \\ y\geq 0 \\ x=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y\leq x+3 \\ y\leq -x+3 \\ -y+3+x-y+3-x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq x+3 \\ y\leq -x+3 \\ -2y+6=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\leq x+3 \\ y\leq -x+3 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x+3 \\ 0\leq -x+3 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -3 \\ x\leq 3 \\ y=0. \end{cases}$

Нарисуем на оси XOY:



Это квадрат со стороной 6 и центром $(0,3)$. Стороны $\parallel OX$ и OY.

Рассмотрим 2-ое ур-ие:

$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ при $a<0$ решений нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a<0$ с-ма имеет <2 решений $\Rightarrow a<0$ не подходит.

При $a \geq 0$:

График $(x-4)^2+(y-3)^2=a$ есть окр-ть (или точка) с центром $(4;3)$ и рад. $\sqrt{a}$.

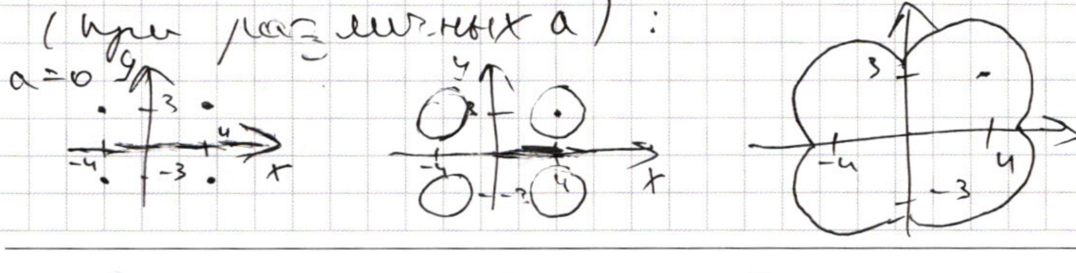
Заметим, что если у исходного ур-ия подходит решение (x_0,y_0), то подходят решения $(x_0;-y_0)$, $(-x_0;y_0)$; $(-x_0;-y_0)$ $\Rightarrow$ график ур-ия симметричен отн-о осей OX и OY и точки $(0;0)$.

Рассмотрим (пока) только $x,y \geq 0$:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \begin{cases} |x|=x \\ |y|=y \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=a \end{cases}$$ — график такой с-мы есть окр-ть с центром $(4;3)$, радиусом a, у которой удалим части, где

$$\left[\begin{array}{l} x<0 \\ y<0. \end{array}\right.$$

Нарисуем, как будет выглядеть график ф-ии (при различных a):

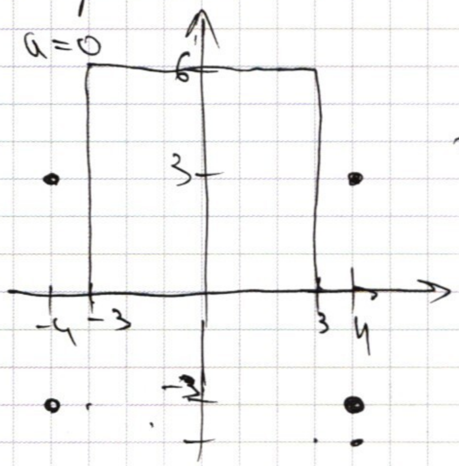


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

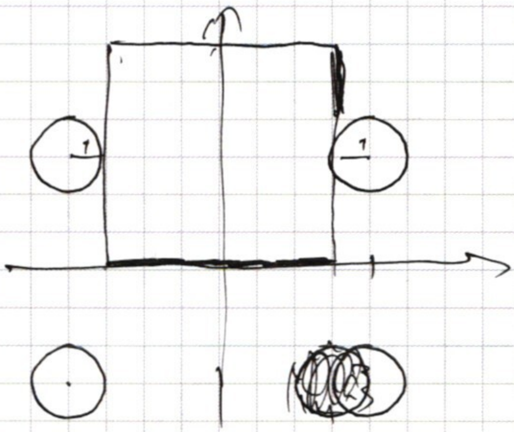
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По условию, 2 графика должны иметь ровно 2 точки пересечения. ~~[illegible]~~ Рассмотрим пересечения 2 графиков:



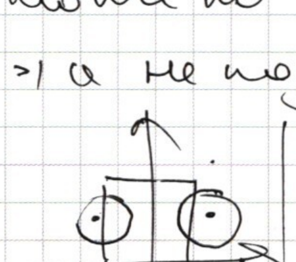
=> 0 решений;



При $\sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow a < 1$ Окр-ти расширяются и не задевают квадрат => решений 0. => $a < 1$ — не подходит

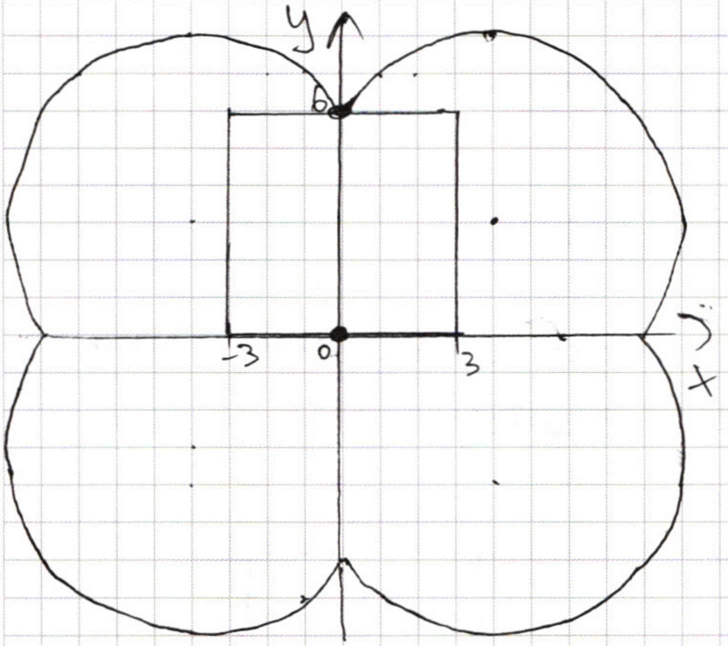
При $\sqrt{a} = 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ 2 окр-ти задевают квадрат остальные 2 — нет => решения 2.

При $\sqrt{a} \in (1; 5) \Leftrightarrow a \in (1; 25)$ Окр-ть с $x, y \geq 0$ задевает квадрат по 2-ум точкам, Окр-ть с $x \geq 0, y \leq 0$ — тоже по 2-ум другим точкам => решений ≥ 4 => a не подходит. При $\sqrt{a} = 5 \Leftrightarrow a = 25$ график с



окр-тями пересекает квадрат по 2-ум точкам => решения 2 => $a = 25$ подходит. (точки $(0;0)$ и $(0;6)$).

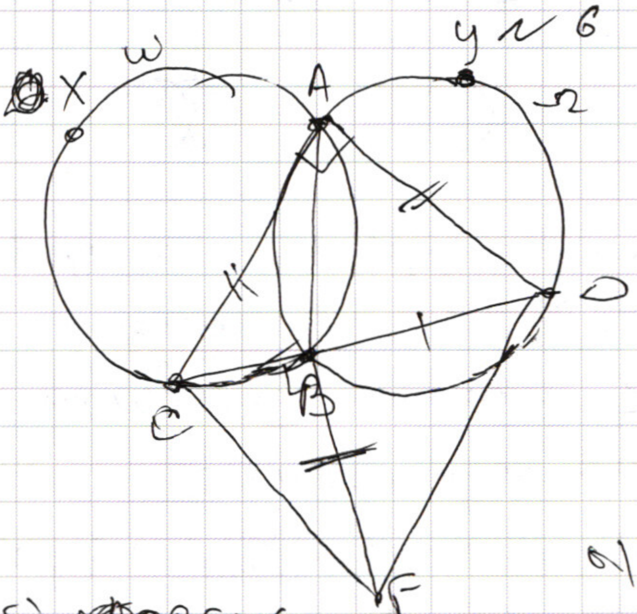
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



При $\sqrt{a} > 25$ каждая из фиг не будет пересекать квадрат → решений 0.

Получаем, что решений 2 лишь при $a = 1$ и $a = 25$.

Ответ $a = \{1; 25\}$.



Дано: ω, Ω — окр-ти; $\omega \cap \Omega = \{A\} \cup \{B\}$; $r_\omega = r_\Omega = 5$; $B \in CD$; $C \in \omega$; $D \in \Omega$; $\angle CAD = 90^\circ$. $FB \perp CD$; $BF = BD$; A и F пор. сп. от CD.

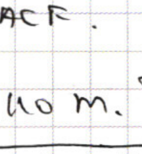
а) Найти: CF.

б) $BC = 6$

Найти: $S_{\triangle ACF}$.

Решение: а) по т. Пифагора в $\triangle BCF$: $BC^2 + BF^2 = CF^2 \Rightarrow CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2}$

$r_\omega = r_\Omega \Rightarrow$ окр-ти ω и Ω симм-ны (ω) друг другу отн-о AB. Отразим 1-ую окр-ть отн-о AF. Тогда, т.к. окр-ти совпали, то $A' = A$; $B' = B$; $C' \in \Omega$.



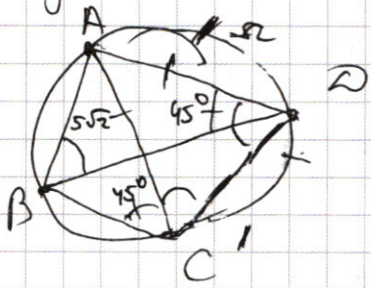
т.к. $O_1O_2 \perp AB$ и $O_1A = AO_2 \Rightarrow AB$ делит $O_1O_2 \Rightarrow$ центры симм-ны, т.к. $r_1 = r_2$, то и окр-ти симм-ны

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 7 2 0 5
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получим такой рисунок:



По условию: $\angle CAB + \angle BAD = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAD + \angle BAC' = 90^\circ$.
$\angle CBD = 180^\circ \Rightarrow \angle DBA + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DBA + \angle ABC' = 180^\circ$.

Также $BC = BC'$, т.к. отразили.

$\begin{cases} \angle ABC' + \angle DBA = 180^\circ \\ ABC'D \text{ - вписан.} \Rightarrow \angle ABC' + \angle ADC' = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle DBA = \angle ADC' = \angle AC'D \Rightarrow$

$\Rightarrow AC' = AD$ и $\cup AD = \cup DC'$.

$\angle BAD + \angle BAC' = 180^\circ - \angle BC'D + \angle BAC' = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAC' + 90^\circ = \angle BC'D \Leftrightarrow \angle BDC' + 90^\circ = \angle BC'D$

~~Рассмотрим исходный рисунок:~~

~~$\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \frac{\cup CB + \cup BD}{2} = 90^\circ \Rightarrow \cup CB + \cup BD = 180^\circ$;~~

~~$\angle CBD = 180^\circ = \angle CBA + \angle ABD = \frac{\cup CXA + \cup AYD}{2} \Rightarrow \cup CXA + \cup AYD = 360^\circ$.~~

~~Сумма дуг окр-тей есть $720^\circ = 360^\circ \cdot 2 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \cup AB_\Omega + \cup AB_\omega = 2\cup AB$ (ввиду симметрии) $= 720^\circ - 180^\circ - 360^\circ =$~~
~~$= 180^\circ \Rightarrow \cup AB = 90^\circ \Rightarrow$~~

Т.к. $C'A = AD \Rightarrow CA = AD \Rightarrow$ т.к $\angle CAD = 90^\circ$, то
$\angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ = \angle AC'B$

По т. синусов: $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R = 10 \Rightarrow AB = 10 \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}$.

Продолжим позже. (стр. 12)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 7

$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases} \Rightarrow 2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$.

x подходит $\Leftrightarrow \exists y$, что с-ма выполнена.

Найдём, когда данное нер-во выполняется, а когда — нет.

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x \Leftrightarrow 2^x + 6\cdot 2^{64} < 70 + 2^{64}x - x \Leftrightarrow 2^{64}(x-6) > 2^x - 70 + x$.

При $x = 70$:

$2^{64}(70-6) > 2^{70} - 70 + 70 \Leftrightarrow 2^{64}\cdot 64 > 2^{70} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{70} > 2^{70} \Leftrightarrow$ ложь $\Rightarrow x = 70$ не подходит

При $x > 70$ к левой части прибавляется (при шаге 1) 2^{64}, а к правой $2^{x+1} - 2^x + (x+1) - x = 2^x + 1 > 2^{64}$, т.к. $x > 70 > 64 \Rightarrow$ к левой приб. меньше правой $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. при $x = 70$ $2^{64}(x-6) \le 2^x - 70 + x$, то при $x \ge 70$ $2^{64}(x-6) \le 2^x - 70 + x \Rightarrow x \ge 70$ не подходит

При $x = 6$: $2^{64}\cdot(6-6) > 2^6 - 70 + 6 \Leftrightarrow 0 > 64 - 70 + 6 \Leftrightarrow 0 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ложь $\Rightarrow x = 6$ не подходит.

При $x < 6$ у левой части уходит при шаге 1 2^{64}, а у правой: $2^x - 2^{x-1} + x - (x-1) = 2^{x-1} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $2^{x-1} \le 2^{7-1} = 2^6 = 64$, что уходит $\le 64 + 1 = 65$,

$2^{64} > 65 \Rightarrow$ из левой уходит больше $\Rightarrow$ при $x \le 6$ левая часть будет $\le$ правой $\Rightarrow x \le 6$ не подходит.

Итак, все нужные $x \in [7; 69]$.

Возьмём производные от обеих частей:

$(2^{64}(x-6))' = 2^{64}$; $(2^x - 70 + x)' = 2^x \cdot \ln 2 + 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-21) - (2^{70} - 128) - 189\cdot 2^{65} = 70\cdot 63 + (2^{64}-1)(7\cdot 342) -$

$-(2^{70} - 128) - 189\cdot 2^{65} = \underline{70\cdot 63} + 2^{64}\cdot 7\cdot 341 - \underline{7\cdot 342} -$

$-2^{70} \underline{+128} - 189\cdot 2^{65} = (70\cdot 63 - 7\cdot 342 + 128) +$

$+ 2^{64}(7\cdot 342 - 64 - 189\cdot 2) = (4410 - 2394 + 128) +$

$+ 2^{64}(2394 - 64 - 378) = 2144 + 2^{64}\cdot 1952.$

Ответ: $2^{64}\cdot 1952 + 2144$.

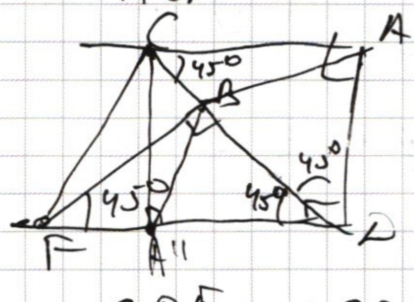
Продолжение №6:

Проведём AB, CF, FD.

$\angle CBD = 90^\circ$; $FB = BD \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$;

Из предыдущих соображений:

$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$. Получаем картинку:



$AB = 5\sqrt{2}$. $\angle CAD + \angle ADF = 90^\circ\cdot 2 = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \parallel DF$.

Отразим A отн-о CD:

$\angle CDF = \angle CDA = 45^\circ \Rightarrow A'' \in FD$;

$\angle CA''D = \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$ в $\triangle CDF$ CA'', FB — высоты;

$A''B = AB = 5\sqrt{2}$.

$\begin{cases} BD = FD\cdot \cos\angle CDF \\ A''D = CD\cdot\cos\angle CDF \\ \angle CDF \text{ — общий} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{BD}{A''D} = \dfrac{FD}{CD} \Rightarrow \triangle DBA'' \sim \triangle DFC \Rightarrow$

по 2 ст. углу и мемору.

$\Rightarrow \dfrac{FC}{A''B} = \dfrac{FD}{BD} = \dfrac{1}{\cos\angle CDF} = \dfrac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \Rightarrow$

] $2^{64}(x-6)=f(x)$; $2^x-70+x=g(x)$

$f(6)=g(6)$; $f(70)=g(70)$;

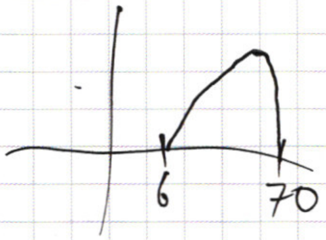
] $k(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow k(6)=k(70)=0$;

$k'(x)=f'(x)-g'(x)=2^{64}-2^x\cdot\ln 2-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2^{64}-2^x\cdot\ln 2-1\geq 0 \Leftrightarrow 2^x\ln 2\leq$
$\leq 2^{64}-1 \Leftrightarrow x\leq \log_2\frac{2^{64}-1}{\ln 2}$

$k'(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\geq \log_2\frac{2^{64}-1}{\ln 2}$

Тогда $k(x)$ на $[6;\log_2\frac{2^{64}-1}{\ln 2}]$ возрастает, на $[\frac{2^{64}-1}{\ln 2};70]$ убывает $\Rightarrow$ т.к. $k(6)=k(70)=0$, то на $(6;70)$ $k(x)>0 \Rightarrow \forall x\in(6;70)$ x подходят.



Тогда $x\in[7;69]$.

Для каждого x:

$y\in(2^x+3\cdot 2^{65};70+(2^{64}-1)x] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $x\geq 6 \Rightarrow 2^x+3\cdot 2^{65}; 70+(2^{64}-1)x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для каждого x значений y:

$70+(2^{64}-1)x-2^x-3\cdot 2^{65}$.

Тогда число решений есть:

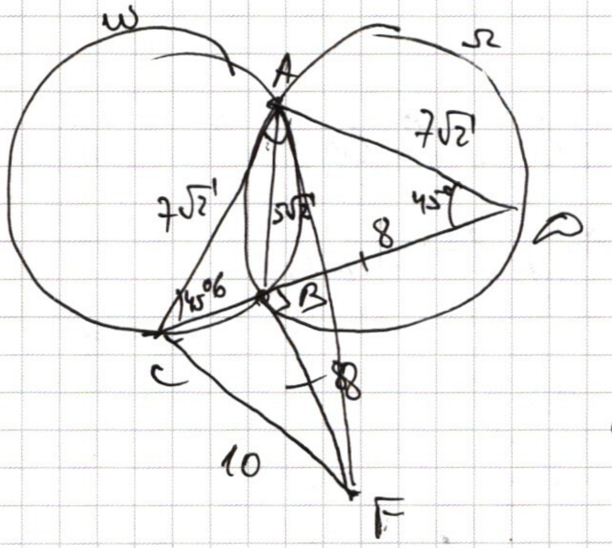
$$\sum_{x=7}^{69}(70+(2^{64}-1)x-2^x-3\cdot 2^{65})=70\cdot 63+(2^{64}-1)(7+8+\ldots+69)-$$
$$-(2^7+\ldots+2^{69})-3\cdot 2^{65}\cdot 63=70\cdot 63+(2^{64}-1)\left(\frac{69\cdot 70}{2}-\frac{6\cdot 7}{2}\right)-$$
$$-(2^{70}-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2-2^1-1-1)-189\cdot 2^{65}=70\cdot 63+(2^{64}-1)\cdot(69\cdot 35-$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow FC = A''B \cdot \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10.$

Ответ: $FC = 10$.

б) $BC = 6 \Rightarrow FC^2 = 100 = BC^2 + BF^2 = 36 + BF^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BF^2 = 64 \Rightarrow BF = BD = 8.$



Тогда $CD = 6 + 8 = 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = AC = CD \cdot \cos 45^\circ =$
$= CD \cdot \sin 45^\circ = \frac{14}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$

$\sin \angle BCF = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

$\cos \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{3}{5}$.

$\sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cos \angle BCF +$
$+ \cos 45^\circ \sin \angle BCF = \frac{\sin \angle BCF + \cos \angle BCF}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} =$
$= \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

$S_{\triangle ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \cancel{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{\cancel{10}}}{2} = 49.$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 49$.

№2 (продолжение).

Рассмотрим 1-ый случай $x = 3y$:

$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y > 0 \\ y > 0 \\ \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg 3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \\ \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \\ y^{4\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2\lg 3y^2} \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \\ 3^{4\log_3 y \cdot \lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot 3^{2\log_3 y \lg 3y^2} \end{cases} \Leftrightarrow$

(1): т.к. $y > 0$, то $y = 3^{\log_3 y}$ – определено

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \\ 3^{4\log_3 y \cdot \lg 3y} = 3^{\lg 3y + 2\log_3 y \cdot \lg 3y^2} \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

(2): т.к. 3^x мон. возр.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \\ 4\log_3 y \cdot \lg 3y = \lg 3y + 2\log_3 y \cdot \lg 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\log_3 y (\lg 3 + \lg y) = \lg 3 + \lg y + 2\log_3 y \cdot (\lg 3 + 2\lg y) \\ x = 3y \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow [1]$

Рассм. ур-ие [1]:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \end{cases}$ $4\log_3 y (\lg 3 + \lg y) = \lg 3 + \lg y + 2\log_3 y \cdot (\lg 3 + 2\lg y) \Leftrightarrow 4\lg y + \cancel{4\log_3 y \cdot \lg y} = \lg 3 + \lg y + 2\lg y + \cancel{4\log_3 y \cdot \lg y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lg y = \lg 3 + 3\lg y \Leftrightarrow \lg y = \lg 3 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} y = 3$

(3): т.к. $\lg x$ – мон. возр. ф-ия

Тогда с-ма $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y > 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 3. \end{cases}$

Рассмотрим 2-ой случай: $x = 4 - y$

$x = 4 - y \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = y^{2\lg(4-y)y} \\ 4 - y > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in (0;4) \\ x = 4-y \\ y^{5\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg(4-y)y} \end{cases}$$

Рассмотрим 3-е ур-ие:

$$y^{5\lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg((4-y)y)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^{5\lg(4-y)} = y^{\log_y(4-y)\lg(4-y) + 2(\lg(4-y)+\lg y)} \\ y>0 \text{ — возв} \\ y \neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ 1^{5\lg 3} = 3^{\lg 3} \cdot 1^{2\lg 3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5\lg(4-y) = \log_y(4-y)\lg(4-y) + 2\lg(4-y) + 2\lg y \\ y \neq 1 \end{cases} \\ 1 = 3^{\lg 3} \; (\Leftrightarrow \text{ложь, т.к. } \lg 3 \neq 0 \Rightarrow 3^{\lg 3} \neq 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\lg(4-y) = \frac{\lg(4-y)}{\lg y} \cdot \lg(4-y) + 2\lg(4-y) + 2\lg y \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lg(4-y)\lg y = \lg^2(4-y) + 2\lg^2 y \\ y \neq 1 \end{cases} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3pq = q^2 + 2p^2 \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(4) если $p = \lg y$; $q = \lg(4-y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q^2 - 3pq + 2p^2 = 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q = 2p \\ q = p \end{array}\right. \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \lg(4-y) = \lg y \\ \lg(4-y) = 2\lg y \end{array}\right. \\ y \neq 1 \end{cases} \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$$

(5) : $D = 9p^2 - 8p^2 = p^2 \Rightarrow q = \frac{3p \pm p}{2} = \left[\begin{array}{l} 2p \\ p \end{array}\right.$.

(6) : т.к в ОДЗ $y > 0$, то $2\lg y = \lg y^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4-y=y \\ 4y = y^2 \end{array}\right. \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y^2+y-4=0 \end{array}\right. \\ y \neq 1 \end{cases} \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \\ y \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$D = 1 + 16 = 17 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$.

можно было без подстановки $x = 4-y$;
Я нигде не использовал, что $x = 4-y \Rightarrow$
$\Rightarrow$ с-ма $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=y^2 \\ y \neq 1 \end{cases}$

Подставляем в с-му :

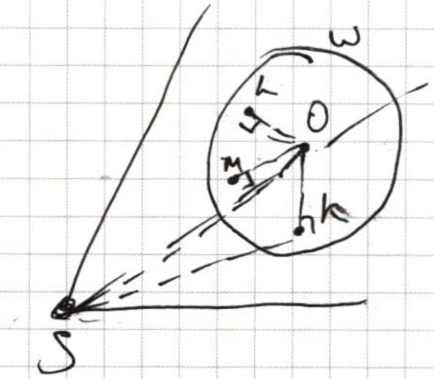
$\begin{cases} y \in (0; 4) \\ \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \\ x = 4-y \end{cases} \overset{(7)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{array}\right. \\ x=4-y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

(7) : $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow$ не подходит ; $\frac{\sqrt{17}-1}{2} < \frac{5-1}{2} = 2$; $\frac{\sqrt{17}-1}{2} > \frac{2-1}{2} > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ подходит.

Тогда ответ : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$.

№ 4

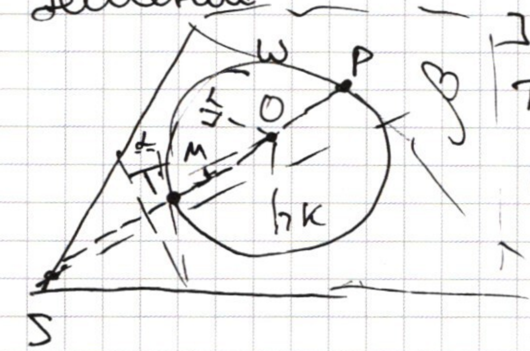
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: сфера ω с ц. O вписана в 3-гр. угол с верш. S и кас-ся его в т. K, L, M; S сечений (α и β), кас. сферы и ⊥ SO, есть 1 и 4.

Найти: ∠KSO, S сеч. пл-тью KLM.

Решение:

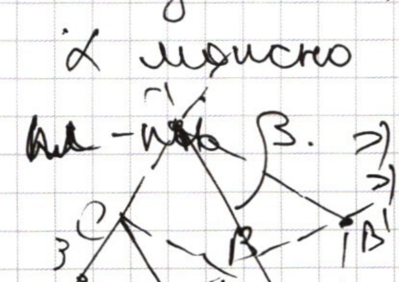


] $SO \cap \omega = \{T\} \cup \{P\}$.

т.к. $SO \perp$ пл-ям α и β и $OT' \perp \alpha$; $OP' \perp \beta$, где T', P' — т. кас-ся сферы с α, β.

Тогда $T = T'$; $P = P'$; иначе из O можно допустить 2 пер-ра на α или на β, что нельзя.

Тогда: $TP \perp \alpha$; $TP \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta \Rightarrow$ пл-ть α можно перевести гомотетией с ц. S в пл-ть β. $\Rightarrow$ ~~гомотетия переводит~~ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ если α высекает на $S1$ т. A, $S2$ — т. B, $S3$ — т. C; β высек. на $S1$ т. A_1, на $S2$ т. B_1, на $S3$ т. C_1, то $AC \parallel A_1C_1$; $BC \parallel B_1C_1$; $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow$ т.к. отношение площадей 2-х подобных Δ есть k^2, что $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \Rightarrow$

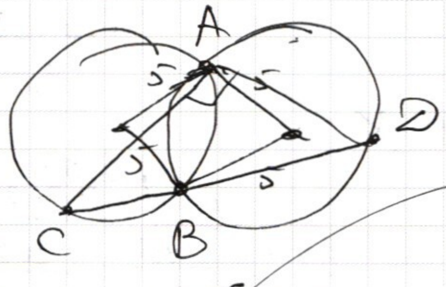
$\Rightarrow \frac{SP}{ST} = 2$.

$\angle KSO = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{KO}{OS} = \frac{r}{r+ST}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

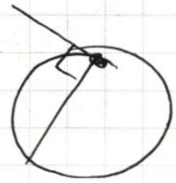
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

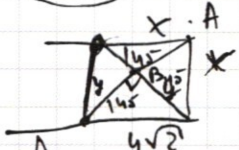


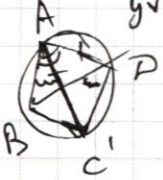
$\cup BA$

$\cup BA + \cup AD = \cup BC + 180^\circ$

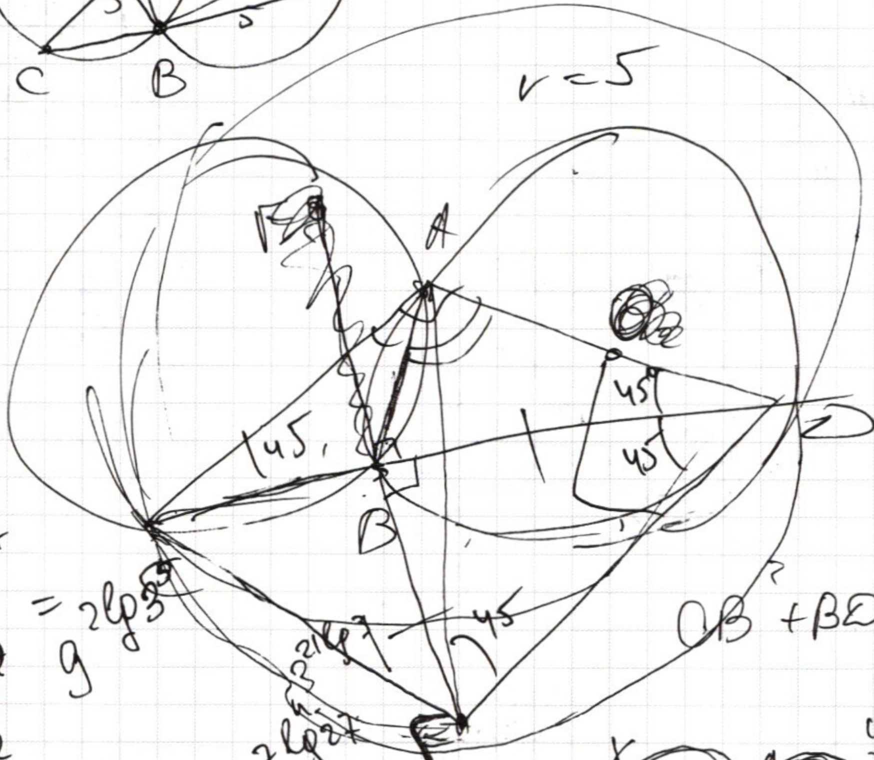
$\cup DC = \cup AD$







$r = 5$



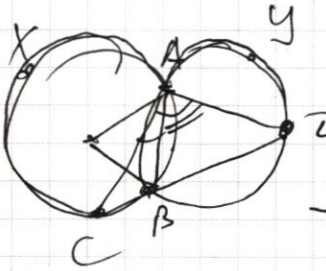
$\frac{9^{5\lg 27}}{4} = 9^{2\lg_3 5}$

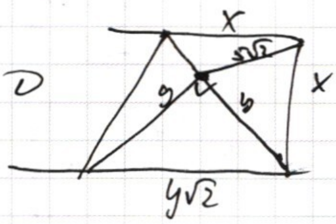
$3^{7\lg 27} = 3^{4\lg_3 5}$

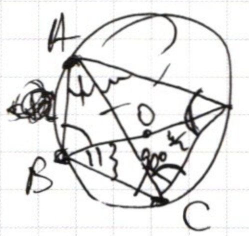
$C^2_? - ?$

$OB^2 + BD^2 - ?$

$\Sigma_{угл} = 720^\circ$







$\cup AKC + \cup BYD = 360^\circ$

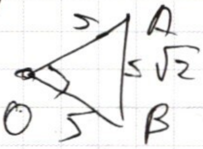
$\cup BC + \cup BD = 180^\circ \Rightarrow$

$\begin{cases} \angle OBA + \angle ABC = 180^\circ \\ \angle OAB + \angle BAC = 90^\circ \end{cases}$

$\angle OBA = \angle ADC$

$\Rightarrow$ сумма дуг $880^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ каждая $90^\circ \Rightarrow$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2^x + 3\cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1)x$

$$4410 - 2394 = 2016$$

$(6-x)2^{64} + (2^x - 70 + x) < 0$

2016+128

$2^{64}(x-6) > 2^x - 70 + x$

2144

$65 \Rightarrow 2^{64}\cdot 59 > 2^{65} - 5$

$63 \cdot 70 = 4410$

$2330 - 378 = 1952$

$2^{64}\cdot 60 > 2^{66} - 4$

$342 \cdot 7 = 2394$

$\geq 3 \quad \leq 7$

$\underbrace{4\,5\,6\,7}_{7-3}$

$2^{64}\cdot 61 > 2^{67} - 3$

$2^{64}\cdot 62 > 2^{68} - 2$

$2^{64}\cdot 63 > 2^{69} - 1$

$341 \cdot 7$

$2^{64}\cdot 64 > 2^{70} - 1$

$\vee$

$2^{64}\cdot 64$

$x \leq 70$

$x \geq 0$

$\forall\, x \leq 70$ верно

$x = 0, 1, \ldots, 6$ — отдельно

$2^{64}\cdot(-6) > 2^0 - 70 + 0$ — нет

$2^{64}\cdot(-5) > 2^1 - 70 + 1$ — нет

$\vdots$

$2^{64}\cdot(-1) > 2^5 - 70 + 5$ — нет

$0 > 2^6 - 70 + 6$ — нет

$x \geq 1$
$x \leq 70$

$\Rightarrow \sum_{x=1}^{70}\left(70 + (2^{64}-1)x - 2^x - 3\cdot 2^{65}\right) =$

$= 70\cdot 70 + 2^{64}\cdot\frac{70\cdot 71}{2} - \frac{70\cdot 71}{2} - (2^{71}-2) - 3\cdot 70\cdot 2^{65} =$

$=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

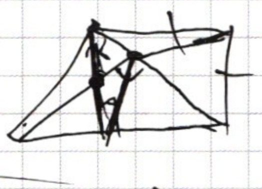
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

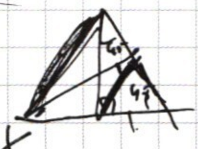
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3375 \mid 5 \Rightarrow 675 \cdot 5 \Rightarrow 135 \cdot 5^2$

$27 \cdot 5^4$

333555   930555





$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) = -2\sin 7x \sin 4x$

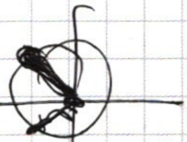
$-(\sin(7x+4x) - \sin(7x-4x)) = -2\sin 4x \cos 7x$

$\sin 7 \cos 4 + \cos 7 \sin 4 - \sin 7 \cos 4 + \cos 7 \sin 4$

$q^2 - 3pq + 2p^2 = 0$

$D = 9p^2 - 8p^2 = p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow q = \frac{3p \pm p}{2} = \left[\begin{matrix} 2p \\ p \end{matrix}\right.$



$|-y-3+x| + |\underbrace{-y-3-x}_{y+x+3}|$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$

$\lg y = \frac{\log_3 y}{\log_3 10} = \log_3 y \cdot \lg 3$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$x^2 - x \cdot 2 \cdot (y+2) - 3(y-2)(y+2) = 0$

$\frac{D}{4} = (y+2)^2 + 3(y-2)(y+2) = (y+2)(4y-4) =$

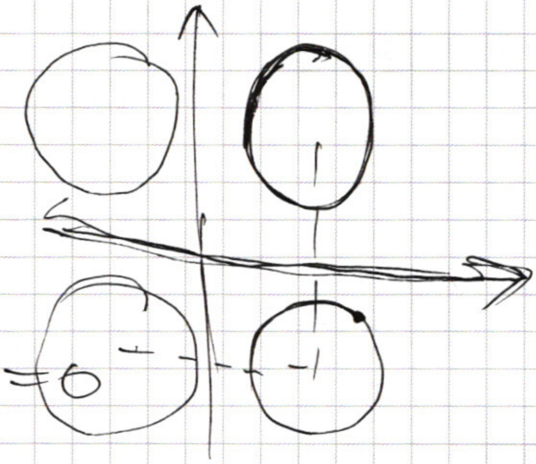
$= 4(y+2)(y-1)$

$x = (y+2) \pm 2\sqrt{(y+2)(y-1)}$

$p^2 + 2q^2 - 3pq = 0.$

$a^{5\lg b} = b^{\lg b} \cdot a^{(\lg a + \lg b)}$

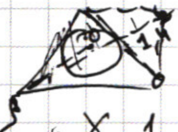
$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$



$(x+y)(x-3y-4)=0$

$(x-3y)(x+y^2-4)=0$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y}$



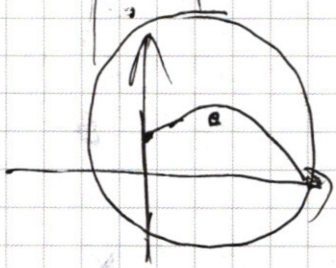
$8 \cdot \frac{x-1}{3} r =$

$x=y$
$x=y^2$

суко

$= \frac{4x+4}{3} r$

$= y^{2\lg 3y^2} = 2(\lg 3y + \lg y)$



$\frac{y^{4\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2\lg 3y^2}$

$y^{4\lg 3y - 2\lg 3y^2} = 3^{\lg 3y}$

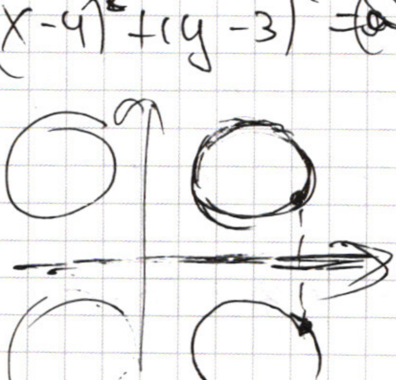
$y^{4\log_y 3 \lg 3y} =$

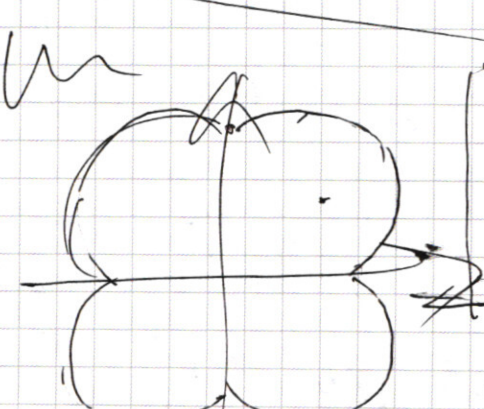
$y^{4\frac{\lg 3}{\lg y}}$ $4\lg 3 + \lg y$

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$(x-4)^2+(y-3)^2=(6)^2$

$y^{4\frac{\lg 9}{\lg y}} + \lg 3$





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)