

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3375 = 125 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$$

П.в. в цифрах м.б. только множителями 5, 3 и 1.

М.к. $5 \cdot 5 > 9$ и $5 \cdot 3 > 9$, то могут иск. только
цифры 1, 3, 5, 9, причем в такую набрар:

1) 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1.

2) 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1.

ка-во вар-тов в перв. разбиении: $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$ (т.к.
всего 8 чисел, повт. цифрой 3; нулей - 3, один - 2).
@ 560

Во втора аналогично $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$.

Суммарно: $560 + 1120 = 1680$

Ответ 1680 чисел.

№5

Решаем с помощью графов.

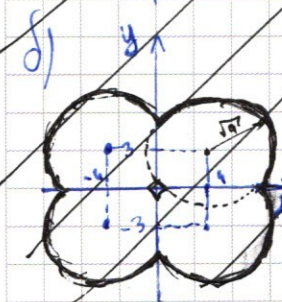
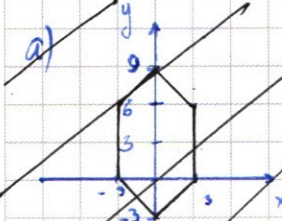
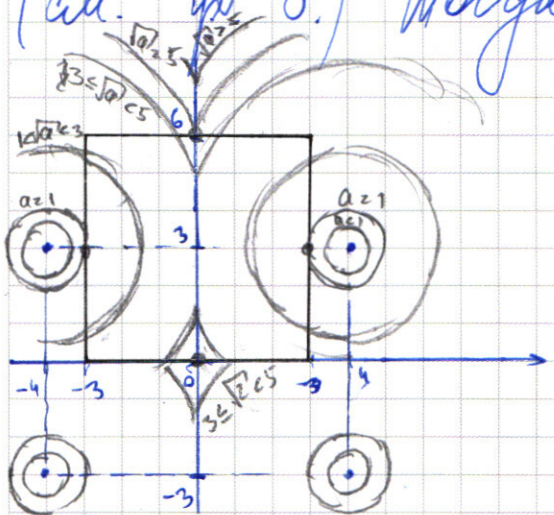
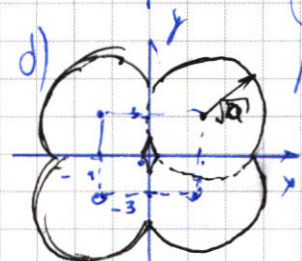
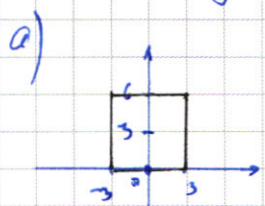
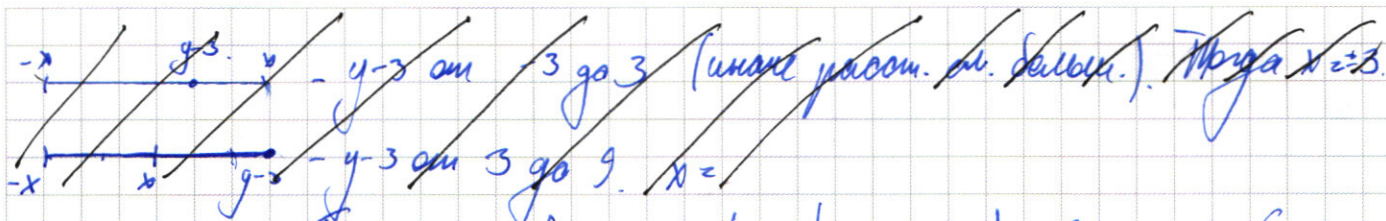


График $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ показан на
рис. (a). Он так выглядит, т.к. ур.е. есть
сумма расст. между точками $(y-3)$ и $(-x)$, и
 $(y-3)$ и $(-x)$ на число прямой. При $y > 3$ или
 $y = -3$ расст. это $x \geq 0 \geq 6 \rightarrow -x$ не сору,
или $y \geq 3$ или $y = -3$ корень есть, и для
 $y > 3$ есть 2 противот. корня,



График

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ — п.а. Если $|y-3| > 3$, то рел. мот. (т.к. ~~нигде не выполняется~~) тогда раст. мот. $(y-3)/4(x) + \text{раст. мот. } (y-3)$ и $(-x) \geq 2(y-3) > 6.$

$|y-3| = 3$ на подг. мод. х. Там - 3 до 3

$|x-3| < 3$, то можно $x \neq \pm 3$.

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a - \text{окр. с ц. } (4; 3) \text{ и}$$

радиуса $\sqrt{a} \Rightarrow (|x|-4)^2 = (|y|-3)^2 = a$ Это часть
кр. вход. в I четв. и окруж. во все 4-х четв.
(см. рис. 5) Тогда:

При $\sqrt{a} = 1$ ни одн. цу ср. не переска
с квадр.

При $a = 1$ равно 2 т. пересеч:
 $(3; 3)$ и $(-3; 3)$.

При $1 < \sqrt{a} < 5$ точ. пересет линии
линии 4 - одна в верх. касов. полуме,
а другая в нижнем.

При $\sigma^2 = 5$ мож. пересч. Δ в две: $(0; 0)$ и $(0; 6)$.

При $\beta_0 > 5$, решением нит, т.к. 16-м полностью
зависит от окружающей среды.

Frage: $a \in \{7, 5\}$

Решим задачу по отдельности:
 $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12yz = 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2(2y+4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\Delta_x = (2y+4)^2 - 4(-3y^2+12y) = 4y^2+16y+16+12y-48y = 16y^2-32y+16 = (4y-4)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm \sqrt{(4y-4)^2}}{2} = \frac{2y+4 \pm |4y-4|}{2} = y+2 \pm (2y-2) =$$

$$= 3y; -y+4$$

$(\frac{5}{x}) \lg x = y^2 \lg xy.$ $\boxed{x \neq 0}$ (т.к. у. $\neq 0$ $x, y > 0$).

$$y^5 \lg x = x^5 \lg y \cdot y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y$$

$$y^3 \lg x = x^5 \lg y \cdot y^2 \lg y$$

$$y^3 \lg y \lg x = x^5 \lg y \cdot 10^2 \lg^2 y$$

$$3 \lg y \lg x = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$$

$$3ab = a^2 + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a-2b)(a-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ a=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} x=y \\ y^2=x \\ 3y=x \\ x=-y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y=y \\ 3y=y \\ a=y \\ y^2=-y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=3 \\ y=2 \\ y=\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3; x=9 \\ y=2; x=2 \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$1 < \sqrt{17} < 9 \Rightarrow$ корректно.

Ответ: $(x; y) \in (9; 3), (2; 2), (\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}), (\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{17}}{2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\int \left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x = y^2 \lg x$
 $\frac{y^5 \lg x}{x \lg x} = y^2 \lg x = y^{2 \cdot (\lg x \cdot \lg y)} = y^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$
 $\frac{y^{3 \lg x}}{x \lg x} = y^{2 \lg x}$
 $y^{3 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{\lg x}$
 $3 \lg x - 2 \lg y$
 $\lg x^3 \cdot \lg y^2$
 $\lg \frac{x^3}{y^2} = \lg x \cdot \lg y$
 $(3 \lg x^2 - 2 \lg y^2) \lg x y$
 $3 \lg x \cdot \lg y = 3 \lg y$
 $2,25 x^2 - 0,75 x^2 = 2 x^2$

$$\frac{(y^5)^{\lg x}}{(x)^{\lg y}} = y^{2 \lg xy}$$

$$\lg_{10} x = a, \quad 10^a = x.$$

$$x^a = (10^a)^a$$



$$x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ -16 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - (2y + 4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (2y + 4)^2 - 4(-3y^2 + 12y) =$$

$$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y^2 - 4)^2$$

$$x = \frac{2y + 4 \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = \frac{y + 4 \pm \sqrt{y^2 - 1}}{1}$$

$$y + 4 = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$y + 4 = -\sqrt{y^2 - 1}$$

$$y + 4 = \sqrt{y^2 - 1}$$

$$= 3y + 2; \quad -y + 6$$

$$\cos 11x - \cos 3x = \sin 11x = \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\frac{(y^5)^{\lg(3y+2)}}{(3y+2)^{\lg y}} = y^{2 \lg(3y+2y)}$$

$$\frac{(y^5)^{\lg x}}{(x)^{\lg y}} = y^{2 \lg xy}$$

$$y = 10^{\lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$3 \lg y \lg x = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$$

Вывести

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$10^{3 \lg y \lg x} = 10^{\lg^2 x} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ 30 \overline{) 675} \\ \underline{37} \\ 35 \\ \underline{25} \quad 13 \\ \quad \times 125 \\ \quad \underline{27} \\ \quad 1875 \\ \quad 250 \\ \underline{3375} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 135} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 15} \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$$

$5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1$

$5^3 \cdot 3^3$

$5, 5, 5, 3, 1, 1, 1, 1$

$\cos 4x - \cos 3x - \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos (3x - 14x)$

$a - b = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} = \sqrt{2} ab$

$a - b = \sqrt{2} ab = \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} = \sqrt{2} \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-b^2}$

$a^2 + b^2 + 2a^2b^2 - 2ab = 2\sqrt{2} a^2b + 2\sqrt{2} ab^2 =$

$= 1 - a^2 + 1 - b^2 + 2(1-a)(1-b) =$

$y > 2^0 + 3 \cdot 2^{05} = 70 + 2^{64} - 1$

$x = 6$

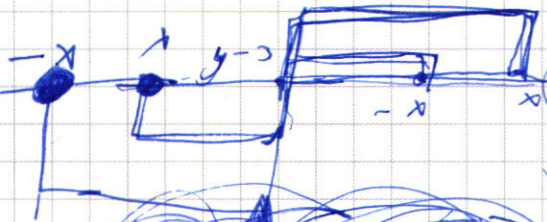
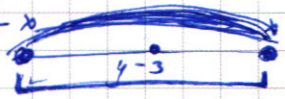
$64 = 3 \cdot 2^{05} = 70 + 2^{64} - 6$

$128 = 3 \cdot 2^{05}$

7-8.10.

5040/9
55 580
34

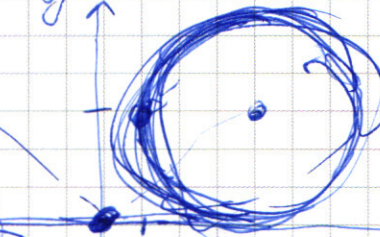
560
2
1120



$$y^2 - 2y - 4 = 0$$

$$y = 1 + 16\sqrt{17}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{9}$$



Zero-zero-zero
find the system

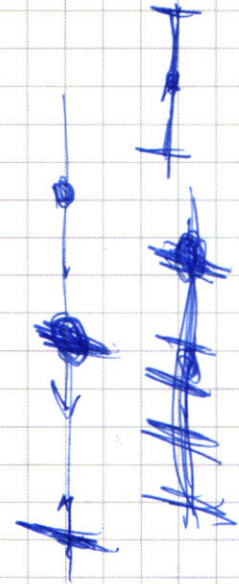


$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

МАТЕМАТИКА



10080/9
1120



2 3 4 5 6 7 8
2 6 24 100 720

5040
8 7
40320/9
20160



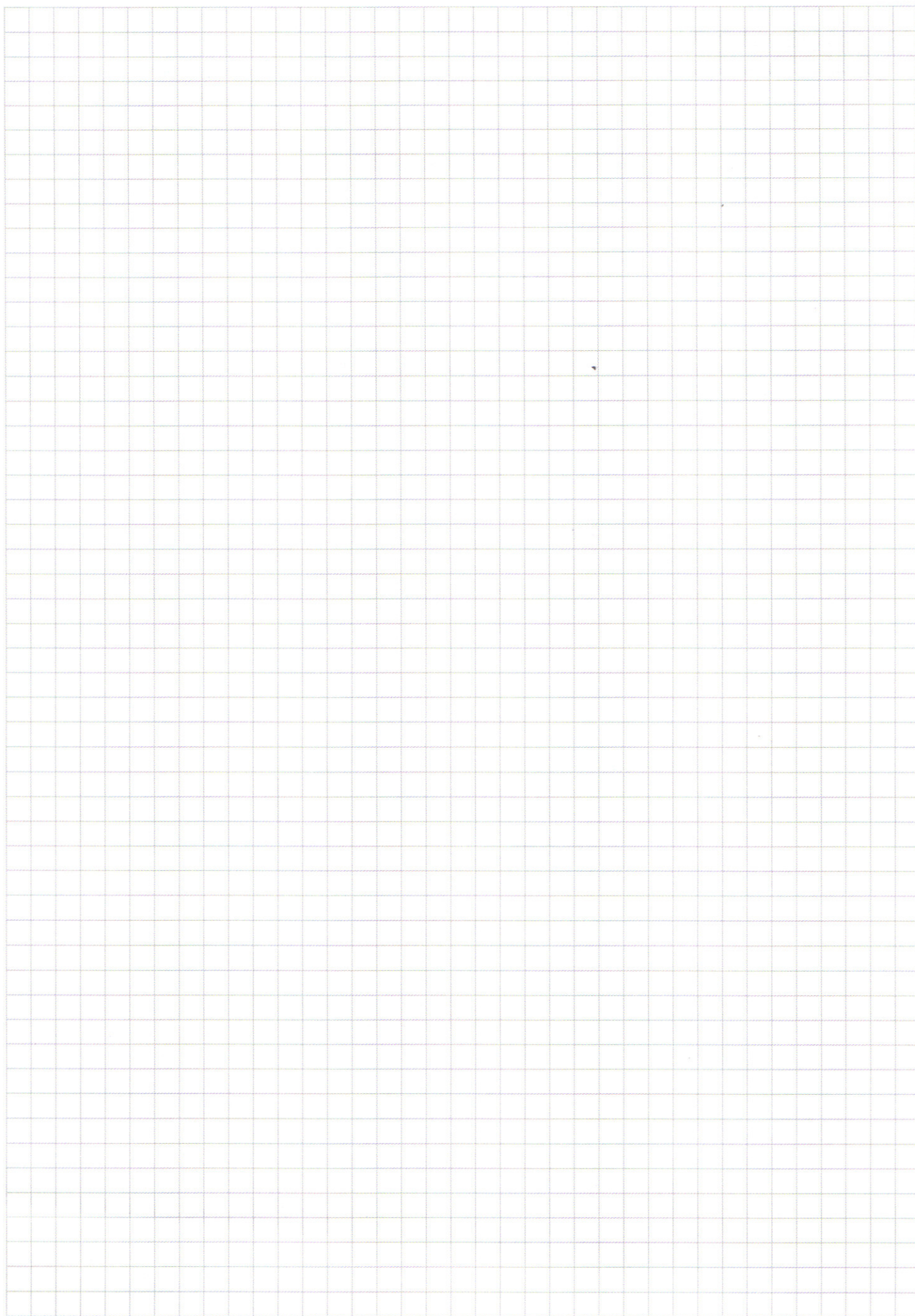
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)