

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

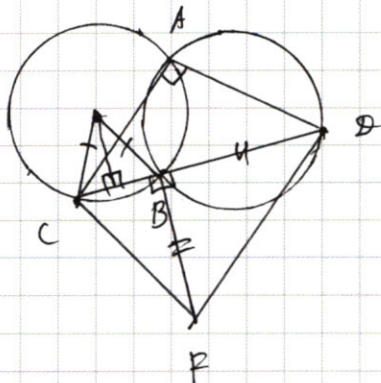
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

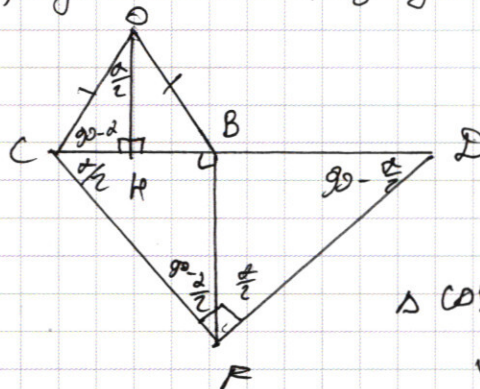
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

a)



Решение

2) сделаем вырезку.



$\triangle COB$ - равноб.

$\Downarrow$
OK - высота,
медiana,
бисс.

$\triangle COH \cong \triangle CBF$ по 2-м
углам.

$\Downarrow$

$$\frac{OC}{CF} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{CF} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{CF = 10}$$

прямой.

$\Downarrow$

по П.П. найдем

$$AB^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\boxed{AB = 8}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{S_{ACF} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 48}$$

48

CF=10

Ответ: $S=48$

1) $\angle CAD = \angle BPC = 90^\circ$
поско $\angle COB = \alpha$, тогда $\angle BCP = \frac{\alpha}{2}$
т.к. на одной дуге.

б)

$$BC = 6$$

$$\angle FAC = \frac{\alpha}{2}$$

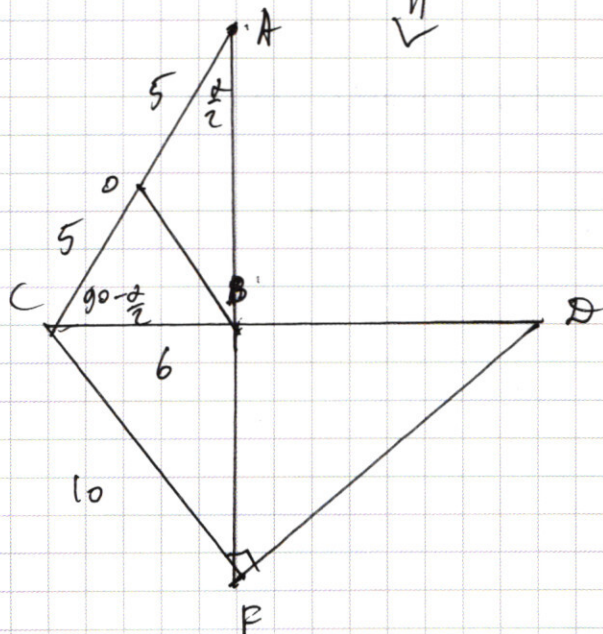
$\Downarrow$

$$\angle ACB = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

$\Downarrow$

O, C, A - на одной

$\Downarrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4- продолжение $x \geq 69$ $y = 70 + 69 - 2^{69} - 69$

от $\begin{matrix} 11 \\ \vee \end{matrix}$ 70 69 значений x и 63

Ответ: 63 пары.

~1

3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	1

1 1 3 3 3 5 5 5 - пример.

общее кол-во таких чисел.
на чисел 2-значных.

$$1) P = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 56 \cdot 10 = 560$$

$$4) 2) P = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 1120$$

$$\Rightarrow 1120 \Rightarrow$$

$$P_{\text{общее}} = 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: $P_{\text{общее}} = 1680$

~6

Дано:

$$BF = BD$$

$$CF = ?$$

$$\angle CAP = 90^\circ$$

$\Rightarrow$

$$2) x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 4y + 12) = 0$$

$$y \neq 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$1 \quad -2 \quad -4 \quad 12$$

$$3 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0$$

— корни $\Rightarrow$

$$x = 9$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$\Rightarrow$

не ОДЗ

Ответ: $(2, 2), (9, 3), \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$
 $\sqrt{17}$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

рассмотрим случаи их пересечения.

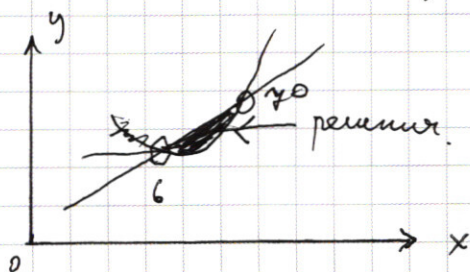
$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

пусть $x \geq 6$, тогда

$$2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 5 \cdot 2^{64} - 6$$

$\emptyset$

пусть $x < 6 \Rightarrow \emptyset$ построим два графика.



, тогда

$$x = 7 \quad y = 70 + 7 \cdot 2^{64} - 7$$

$$x = 8 \quad y = 70 + 8 \cdot 2^{64} - 8$$

и т.д.

$$x \geq 69 \quad y \geq 70 + 69 \cdot 2^{64} - 69$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В) 2- продолжение $A_3 p^2 \geq 145 \Rightarrow A_3 p \geq \sqrt{145}$, при
 $a = 145$ будет также 2 решения,

Ответ: при $a = 1; 145$ - 2 реш.
~3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$y^{5 \lg x - 2 \lg xy} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{8^3}{y^3}} = x^{\lg x}$$

$$\lg \frac{x^3}{y^3} \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$3 \lg x \lg y - 2 \lg^2 y - \lg^2 x = 0$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$(\lg x - \lg y)(\lg x - 2 \lg y) = 0$$

$$\lg x = \lg y$$

① $x = y$

$$\lg x = 2 \lg y$$

② $x = y^2$

1) $x = y$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$-4y(y-2) = 0$$

$$y \neq 0$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$



Квадрат с вершинами
прямоугольника

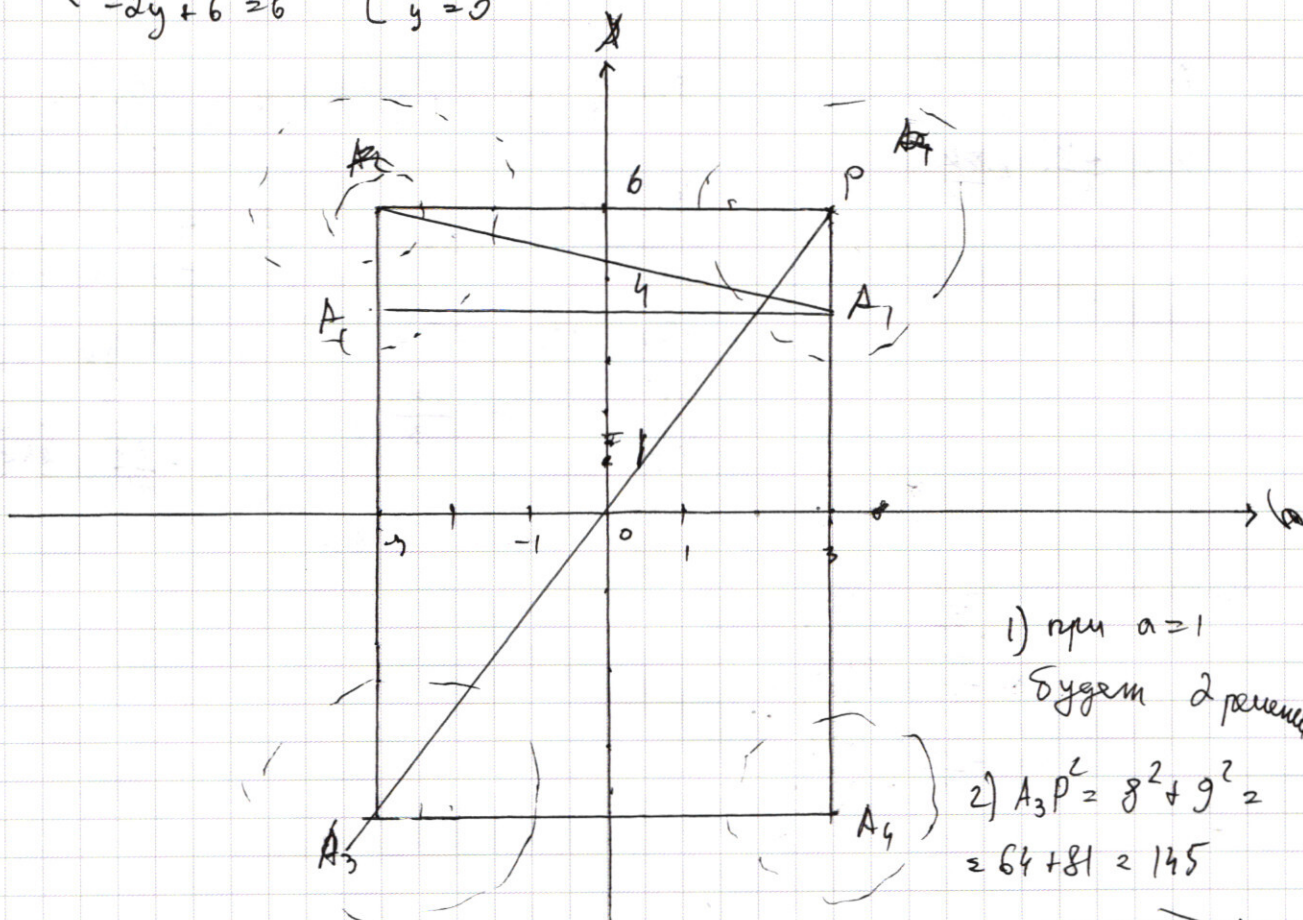
$$A_1(4,3) \quad A_2(1,-3) \quad A_3(-4,-3) \\ A_4(-4,3)$$

$$2) \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6 \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ -2x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3+x \geq 0 \\ y-3-x \leq 0 \\ 2x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ -2y+6 \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ y \leq 0 \end{cases}$$



1) при $a=1$

будет 2 решения

$$2) A_3P^2 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\sin 7x = -\cos 7x$$

$$\frac{\sin 7x}{\cos 7x} = -1$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$\sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x = 0$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} = \pi k$$

$$+3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = 0$$

$$\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$$

$k \in \mathbb{Z}$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 33\overline{)53} \\ 11\overline{)25} \\ 33\overline{)53} \\ 11\overline{)25} \\ 25\overline{)5} \\ 5\overline{)5} \\ 1\overline{)5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 115\overline{)3} \\ -9\overline{)35} \\ 20\overline{)35} \\ 18\overline{)20} \end{array}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\underline{1133555}$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 2\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\begin{array}{r} 9000000 \overline{)65} \\ 90\overline{)0} \\ 0 \end{array}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{4x}{2}\right)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin(4x) \sin 7x + 2 \sin(4x) \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{4x} = y^{20xy}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0 \quad \cos 7x$$

$$(x-y)^2 - 4(x-y^2+3y) = 0 \quad -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - \sqrt{2} ($$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x))$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

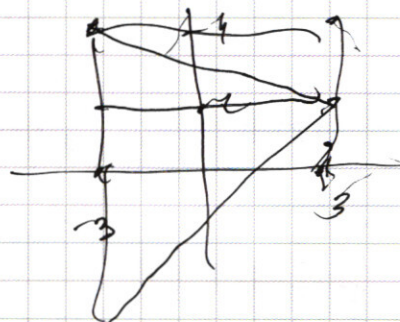
$$x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0$$

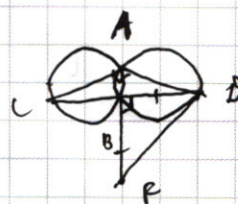
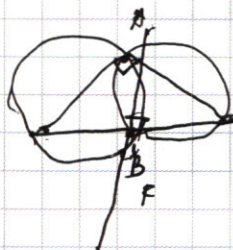
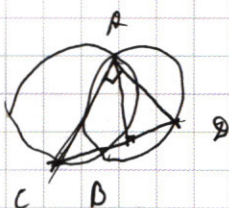
$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2}$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$



$$\frac{5 \lg y^{\frac{1}{x}} - \lg x}{x} = \frac{2 \lg x + 2 \lg y}{xy}$$



$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| \geq 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$O_1(4, 3) \quad O_2(4, -3) \quad O_3(-4, -3) \quad O_4(-4, 3)$$

$$2) \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ 2y-6 \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ 2y-6 \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ 2y-6 \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 6 \\ 2y \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases} \quad x = -3$$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

1) при $a \geq 1$

Судет - 2 реч

$$2) A_3 P = 8^2 + 8^2 = 128$$

$$A_3 \geq 128$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^5 \lg x - 2 \lg x \cdot y = x \lg x$$

$$y \lg \frac{x^3}{y^3} = x \lg x$$

ОДЗ
 $x > 0$
 $y > 0$

$$\lg \frac{x^3}{y^3} \cdot \lg y = \lg^2 x$$

$$(\lg x^3 - \lg y^3) \lg y = \lg^2 x$$

$$3 \lg x + \lg y - 3 \lg^2 y - \lg^2 x = 0$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x + \lg y + 3 \lg^2 y = 0$$

$$\lg x = \lg y$$

$$x = y$$

$$\lg x = 2 \lg y$$

$$x = 2y^2$$

1) $x = y$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$-4y(y-2) = 0$$

$$y = 0 \text{ (не подходит)}$$

$$y = 2 \quad x = 2$$

2) $x = y^2$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$1 \quad -2 \quad -7 \quad 12 \quad 0$$

$$-12 \quad + \quad -12 \quad + \quad 1$$

$$8 \quad - \quad 12 \quad - \quad 7 \quad + \quad 12$$

$$3 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0 \quad - \text{корни} \quad x = \sqrt{3}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$2^6 - 6$$

~~12~~

$$2^4 + 3 \cdot 2^{65} = 42 + 2^{64} - 4$$

$$3 \cdot 2^4 +$$



$$x = 70$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 9 & 5 & 5 \end{array}$$

$$P = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

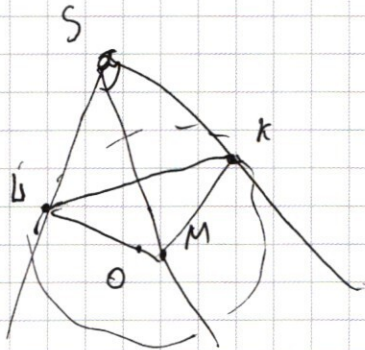
$$P = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = 1120$$

$$1) \quad P = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

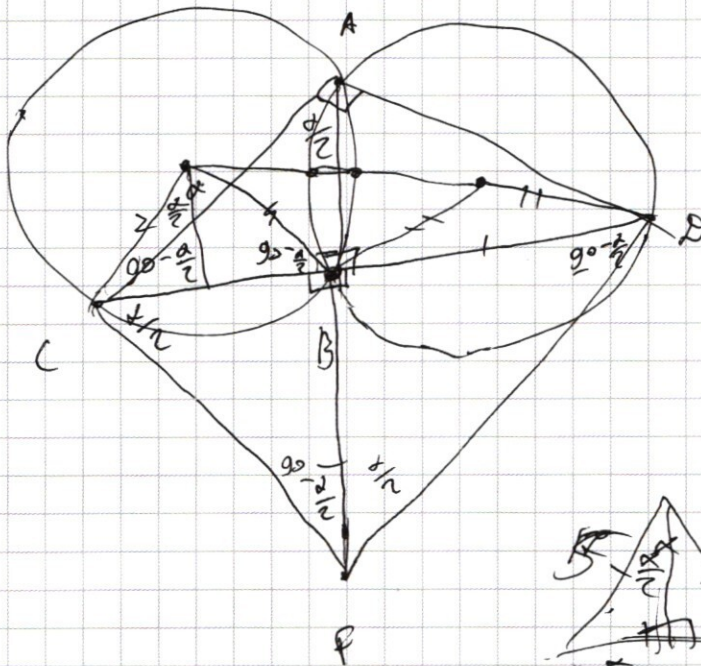
$$P = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = 1120$$

$$P_0 = 1120 + 560$$

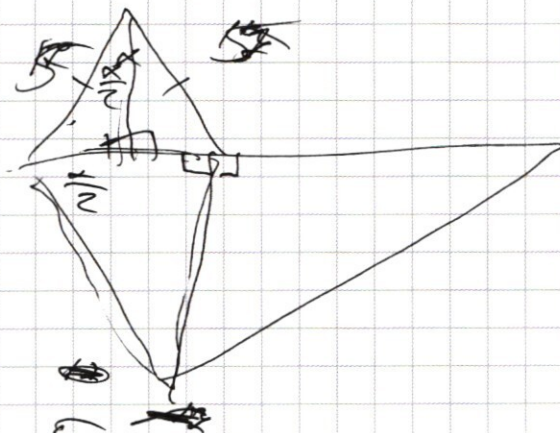
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



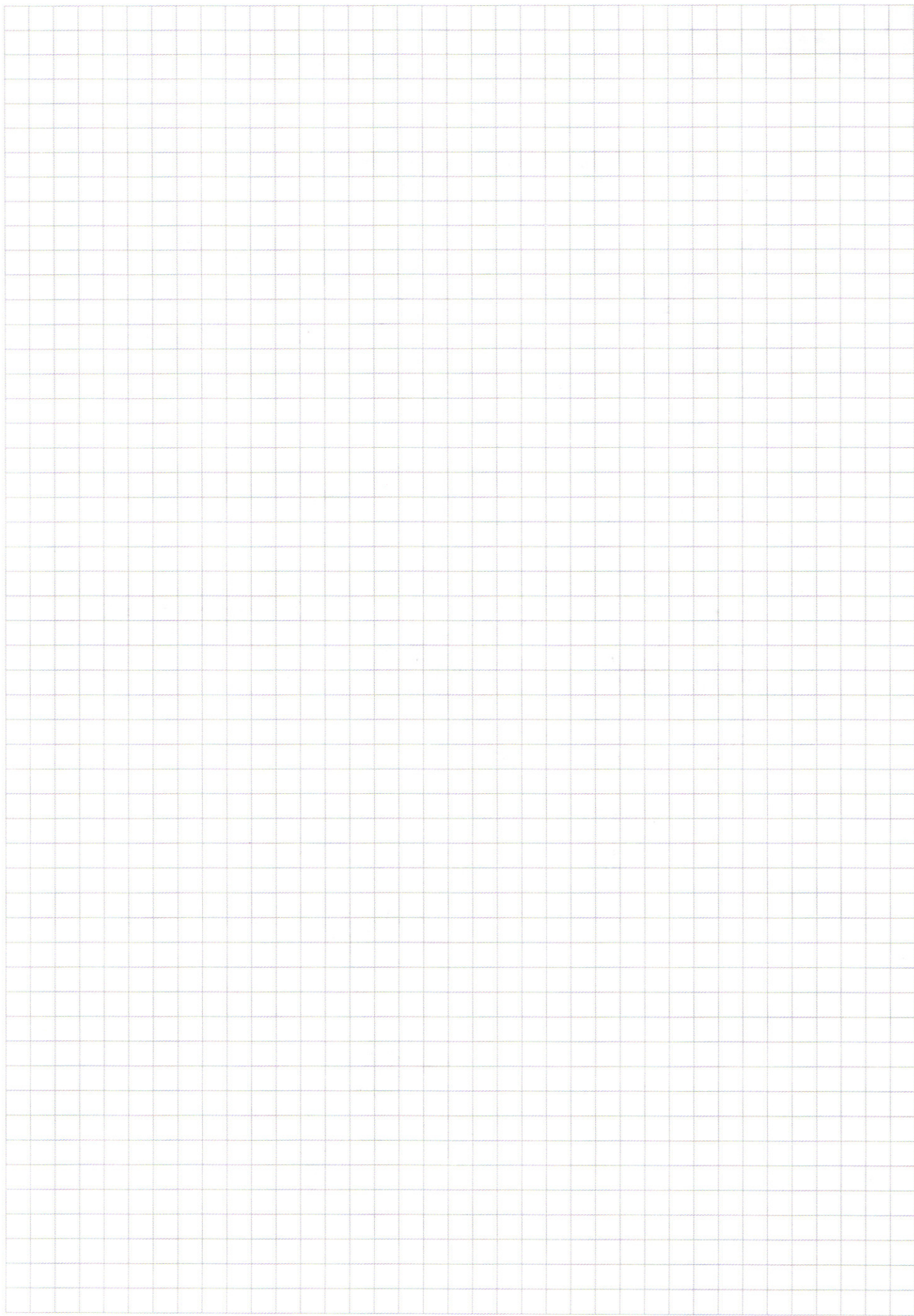
$$\begin{aligned} &10 \ 24 \ 0 \ 12 \\ &x^3 - 2x^2 + 13x - 3 \\ &-3 \quad x^2 + 12 \\ &-24 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &1 \ 2 \ 1 \ 12 \\ &-3 \ 1 \ -1 \ 4 \ 0 \ \sim \text{вык} \\ &x^2 - x + 4 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &5 \\ &\frac{5}{CF} = \frac{1}{2} \\ &CF = 10 \end{aligned}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)