

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 64827. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = x^{2\ln(xy^2)}, \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 9 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 15)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 17 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 16$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 \cdot 3^{28} \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\pm \pm) \quad \underbrace{\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)}}_{>0} = \underbrace{x^{2\ln(xy^2)}}_{>0}$$

П.к. $x > 0$, а $y < 0$, но можно
прелогарифмировать

$$\ln\left(-\frac{x^7}{y}\right)^{\ln(-y)} = \ln x^{2\ln(xy^2)}$$

$$\ln(-y) \ln\left(-\frac{x^7}{y}\right) = 2\ln(xy^2) \cdot \ln x$$

$$\begin{cases} \ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x^6}{y^2}\right) = 2\ln\left(-\frac{y^3}{3}\right) \cdot \ln\left(-\frac{x}{3}\right) \quad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{3} \quad x = -\frac{y}{3} \\ \ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{(y+4)^4}{y}\right) = 2\ln((y+4)y^2) \cdot \ln(y+4) \quad (**) \end{cases}$$

$$(\pm) \quad \ln(-y) \cdot (6\ln(-y) - 7\ln 3) = 2(3\ln(-y) - \ln(3))(\ln(-y) - \ln 3)$$

$$\ln(-y) = a \quad \ln 3 = b$$

$$a(6a - 7b) = 2(3a - b)(a - b)$$

$$2b^2 - ab = 0$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2b = a \end{cases} \quad \begin{cases} \ln 3 = 0 \\ \ln(-y) = \ln 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -9 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -9 \\ x = -\frac{y}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \end{cases}$$

$$(\pm \pm) \quad \ln(-y)(7\ln(y+4) - \ln(-y)) = 2(\ln(y+4) + 2\ln(-y)) \ln(y+4)$$

$$\ln(-y) = c \quad \ln(y+4) = d$$

$$c(7d - c) = 2(d + 2c) \cdot d$$

$$7dc - c^2 = 2d^2 + 4cd$$

$$c^2 - 3dc + 2d^2 = 0$$

$$\begin{cases} c = 2d \\ c = d \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(-y) = 2\ln(y+4) \\ \ln(-y) = \ln(y+4) \end{cases} \quad \begin{cases} -y = (y+4)^2 \\ -y = y+4 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2y + 4 = 0 \\ y^2 + 9y + 16 = 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ y^2 + 9y + 16 = 0 \quad (1) \\ y < 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad y^2 + 9y + 16 = 0 \\ D = 81 - 64 = 17 > 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -9 \\ x = 3 \end{cases} \\ y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = -2 \\ x = 2 \\ y = -9 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}\right); (2; -2); (3; -9)$

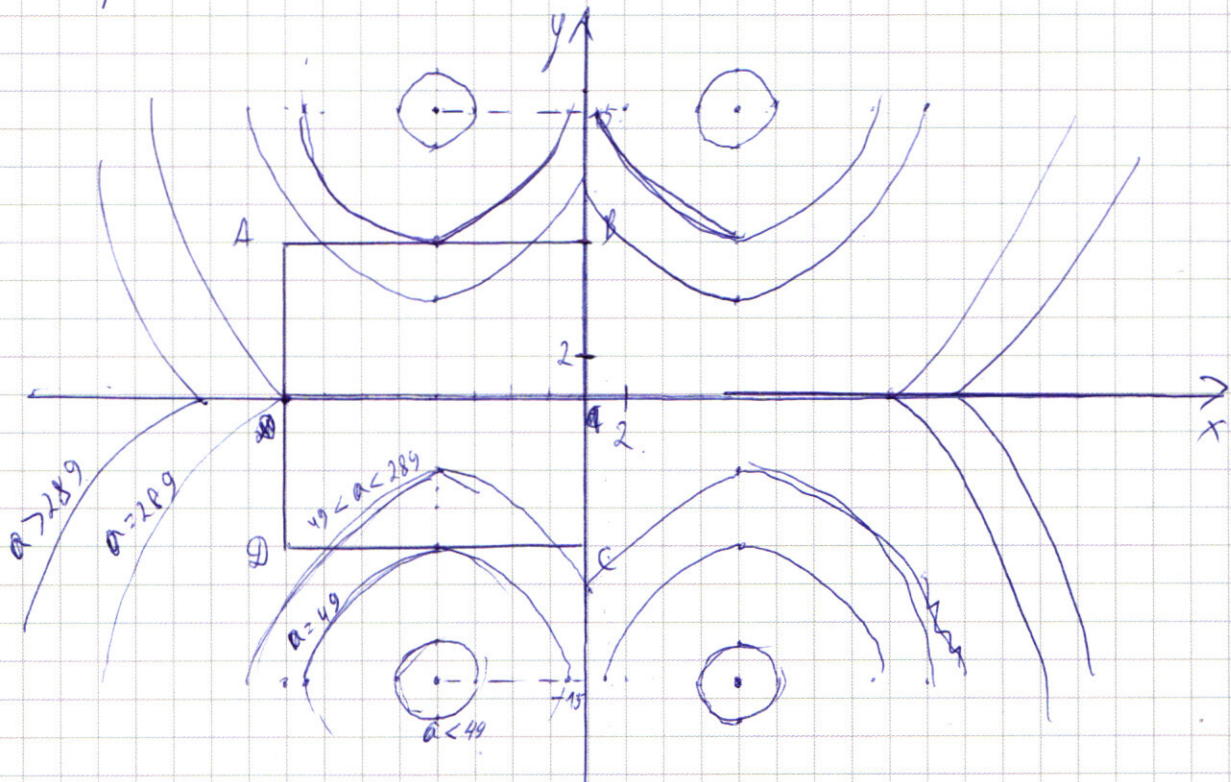
№5

$$\begin{cases} |x + y + 8| + |x - y + 8| = 16 \\ ((x) - 8)^2 + ((y) - 15)^2 = a \end{cases} \quad a \geq 0$$

$(x - 8)^2 + (y - 15)^2 = a$ - уравн окружн $(O(8; 15); \sqrt{a})$

$((x) - 8)^2 + ((y) - 15)^2 = a \xrightarrow{\text{сопоставляем}} ((x) - 8)^2 + ((y) - 15)^2 = a$
её сравнивать с графиком от Ox
сравнивать по оси Oy .

$|x+y+8| + |x-y+8| = 16$ - уравн. прямоугольника
с вершинами $A(-16; 8)$; $B(0; 8)$; $C(0; -8)$; $D(-16; -8)$



Тип $a \rightarrow 0$ $0 \leq a < 49$ система не имеет решений

Тип $a = 49$ $\sqrt{a} = 7$ система имеет 2 решения

Тип $49 < a < 289$ система имеет 4 решения

Тип $a = 289$ $\sqrt{a} = 17$ система имеет 2 решения

Тип $a > 289$ система не имеет решений

Ответ: 49; 289

№ 2.

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x - \cos 3x - \sin 4x - \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} y > 3^x + 4 - 3^{28} & (1) \\ y \leq 93 + 3(3^{27} - 1)x & (2) \end{cases}$$

Заметим, что при $x = 4$.

$$3^x + 4 - 3^{28} = 93 + 3(3^{27} - 1)x.$$

Посмотрим насколько увеличилось каждое выражение при ~~увелич~~ увелич x на 1.

$$(\#) 3^{x+1} + 4 - 3^{28} - 3^x + 4 - 3^{28} = 3^x \cdot 2.$$

$$(\#) 93 + 3(3^{27} - 1)(x+1) - 93 - 3(3^{27} - 1)x = 3^{27} - 3 = 3(3^{26} - 1)$$

Зададим прогрессию (размер) $b_1 = 3^5 \cdot 2$

$$q = 3.$$

S_n — насколько увеличилось выражение (1) при увелич x на n .

$$S_n = \frac{3^5 \cdot 2 (3^n - 1)}{3 - 1} = 3^5 (3^n - 1)$$

Посмотрим, когда верхняя граница y опустится ниже нижней

$$3^5 (3^n - 1) \geq n \cdot 3 \cdot (3^{27} - 1) \rightarrow n \geq 26$$

[5, 31]

При каждом $x \in [5; 26]$ ~~31~~ ~~26~~ есть множество y , удовл.
 условию и это множество для каждого x
 равно разности между верхней и нижней границы,
 т.е. всего решений при $x \in [5; 26]$ равно ~~31~~ ~~26~~

$$\sum_{n=1}^{26} (3(3^{2^x} - 1)n - 3^5(3^n - 1))$$

Для $x < 4$ ~~нет~~ ~~прот.~~

$$93 + 3(3^{2^x} - 1)x < 3^x + 9 \cdot 3^{2^x}$$

т.е. решений нет.

ответ: $\sum_{n=1}^{26} (3(3^{2^x} - 1)n - 3^5(3^n - 1))$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 64827 & 9 \\ 4203 & 3 \\ 2401 & 7 \\ 343 & 7^3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2$$

$$b_1 \cdot q^n - b_1 = S_n(q-1)$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1}$$

$$\begin{array}{r} 64827/9 \\ 63 \quad 1203/3 \\ 18 \quad 6 \\ 18 \quad 12 \\ 02412 \\ 24 \quad 03 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2401/7 \\ 21 \quad 343 \\ 30 \\ 28 \\ 21 \end{array}$$

$$3^5 - (3^n - 1) = n \cdot 3^{27} - 2$$

$$64827 = 3^3 \cdot 7^4$$

$$93 + 3(25 - 1)(7+1) - 93 \cdot 3(3-1)x$$

$$3^{20}(7+1) - 7(7+1) - 3^{20}x + x =$$

I 1 единица

$$8 \cdot C_7^3 = 8 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 8 \cdot 5 \cdot 7 = 40 \cdot 7 = 280. \quad = 3^{20} - 3 = 3^{20} \cdot 2 \quad 25 \rightarrow 5$$

II 2 единицы

$$C_8^2 \cdot C_7^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot C_6^2 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 280 \cdot 3 = 840$$

Ответ: 1120

$$3^{(x+1)} + 4 \cdot 3^{20} - 3^x - 4 \cdot 3^{28} = 3^x(3-1) = 2 \cdot 3^x$$

$$\cos 4x + \cos 3x + \sin 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 4x \cdot \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

I $\cos 4x = 0 \quad \cos 3x = 0$

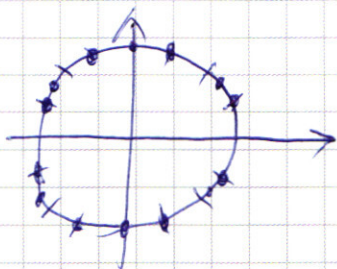
$$0 - \sin 4x \cdot \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot 0 - \sin 3x + 0 = 0$$

$$0 - \sin 4x \cdot \sin 3x + 0 + 0 + 0 - \sin 3x + 0 = 0$$

$$\sin 3x (\sin 4x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \\ x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \end{cases}$$



$$\text{II} \quad \cos 4x = 0 \quad \cos 3x \neq 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \quad x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

$$0 = \sin 4x \cdot \sin 3x + \cos 3x + \sin 4x \cdot \cos 3x + 0 - \sin 3x + 0 = 0$$

$$\sin 4x = \tan 3x + 1 + \sin 4x = \tan 3x = 0$$

$$\begin{cases} \tan 3x + 1 + 1 - \tan 3x = 0 \\ \sin 4x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan 3x + 1 - 1 - \tan 3x = 0 \\ \sin 4x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -2 \cdot \frac{3^5 \cdot 2 \cdot (3^n - 1)}{2} = h(3^{28} - 1) \\ \sin 4x = 1 \\ 2 \tan 3x = 0 \\ \sin 4x = -1 \end{cases}$$

9-23

$$\begin{cases} \tan 3x = 0 \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{3} \\ x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} \end{cases}$$

0



$$\text{III} \quad \cos 4x \neq 0 \quad \cos 3x = 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

$$0 = \sin 4x \cdot \sin 3x + 0 + 0 + \sin 3x \cdot \cos 4x - \sin 3x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 4x \cdot \tan 3x = \tan 4x \cdot \sin 3x + \sin 3x - \frac{\sin 3x}{\cos 4x} + \sqrt{2} = 0$$

$$\begin{cases} -\tan 4x + 1 - \frac{1}{\cos 4x} + \sqrt{2} = 0 \\ \sin 3x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan 4x - 1 + \frac{1}{\cos 4x} + \sqrt{2} = 0 \\ \sin 3x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin 4x + \cos 4x - 1 + \sqrt{2} \cos 4x = 0 \\ \cos 4x \end{cases}$$

$$3^{28} - 1 = 2 \cdot 3^x$$

$$\text{IV} \quad 1 - \tan 4x \cdot \tan 3x + \frac{1}{\cos 4x} + \tan 4x + \tan 3x - \frac{\tan 3x}{\cos 4x}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{x^4}{y}\right) \ln(-y) = \frac{1}{x^2} \ln(xy^2) \\ y^2 + 2xy - 3x^2 + 12x + 4y = 0 \end{cases}$$

Для I уравн системы
н.ч неотрицательна
и $x \neq 0$ и $y \neq 0$
и д.ч неотриц.

$$\left(-\frac{x}{y} \cdot x^6\right) \ln(-y) \geq 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -\frac{x}{y} > 0 \end{cases} \rightarrow -x > y \rightarrow \text{т.е. } x \text{ и } y \text{ разных знаков}$$

$$\ln\left(-\frac{x}{y}\right) \ln(-y) = \ln(x^2 \ln(xy^2)) \quad \ln(-y) \cdot \ln\left(-\frac{x}{y}\right) = \ln(xy^2) \cdot \ln x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{II} - 3x^2 + x(12+2y) + y^2 + 4y = 0$$

$$64 + 25 = 89 \quad 289$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 119 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$D = 144 + 48y + 4y^2 + 12(y^2 + 4y) = 16y^2 + 96y + 144 \geq 0$$

$$23^2 + 24^2$$

$$\begin{array}{r} 23^2 + 24^2 \\ 23^2 + 24^2 \\ \hline 529 + 576 \\ \hline 1105 \end{array}$$

$$16y^2 + 96y + 144 \geq 0$$

$$y^2 + 6y + 9 \geq 0$$

$$(y+3)^2 \geq 0$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{-12 - 2y \pm 4(y+3)}{-6}$$

$$x = \frac{-12 - 2y - 4(y+3)}{-6}$$

$$x = \frac{-6y - 24}{-6}$$

$$x = y + 4$$

$$\ln(-y) - \ln\left(-\frac{y^6}{3^2}\right) = \ln\left(-\frac{y^3}{3}\right) - \ln\left(\frac{y^2}{9}\right)$$

$$\ln(-y) - \ln\left(-\frac{y+4}{y}\right) = \ln((y+4)y^2) - \ln(y+4)^2$$

$$x+y+8 + x-y+8 = 16 \quad \rightarrow x=0 \quad -8 \leq y \leq 8$$

$$x+y+8 - x+y-8 = 16 \quad \rightarrow 2y=16 \quad y=8 \quad 64+$$

$$x > -8+8-16 \quad x < y-0$$

$$y = -8 \quad x < 8-8=0$$

$$x > y-8 = -16$$

$$-x-y-8 + x-y+8 = 16$$

$$-x-y-8 - x+y-8 = 16$$

$$-2x = 32$$

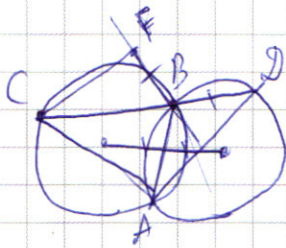
$$x = -16$$

$$-16+8+y < 0$$

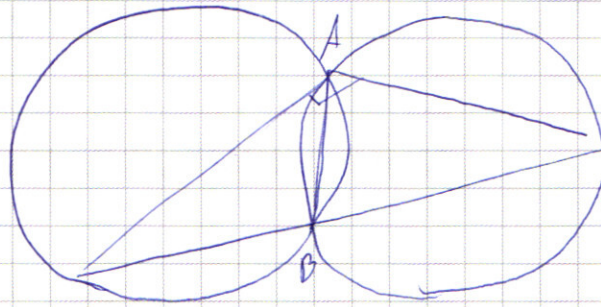
$$y < 8$$

$$-16+8-y < 0$$

$$y > -8$$



$$(2-\sqrt{3})/(2+\sqrt{3})$$



$$\begin{cases} y > 3^x + 4 - 3^{2x} \\ y \leq 93 + 3(3^{2x} - 1) \end{cases}$$

при $x \leq 4$

$$93 + 3^{2 \cdot 4} - 4 - 12 = 3^{2 \cdot 4} - 4 + 81$$

при $x < 3$

$$93 + 3^{2 \cdot 3} - 3 - 3 = 90 + 3^{2 \cdot 3}$$

$$3^x + 4 - 3^{2x} > 93 + 3(3^{2x} - 1)$$

$$3^x + 4 - 3^{2x} \geq 93 + 3(3^{2x} - 1)$$

$$3^x + 4 - 3^{2x} \geq 93 + 3^{2x}x - 3x$$

$$3^{2x}(x-4) + 93 - 3^x - 3x$$

$$243 + 4 \cdot 3^{28}$$

$$93 + 3^{28} \cdot 5 - 5$$

$$\begin{cases} -y = \frac{1}{y+4} \\ -y = \frac{1}{(y+4)^2} \end{cases} \begin{cases} \frac{y^2 + 4y + 1}{y+4} = 0 \\ \frac{y(y+4)^2 + 1}{y+4} = 0 \end{cases}$$

$$(y^2 + 8y + 16)(y+1) = 93 + 8y^2 + 16y + 1 = 0$$

$$(2-\sqrt{3})^2 + 8(2-\sqrt{3}) + 16 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 16 - 8\sqrt{3} + 16 = 39 - 12\sqrt{3}$$

$-x^4$

$$\begin{aligned} \ln(-y) \cdot (\ln(y+4) - \ln(-y)) &= \\ &= (\ln(y+4) + 2\ln(-y)) \cdot 2\ln(y+4) \end{aligned}$$

$$\ln(-y) = a \quad \ln(y+4) = b$$

$y < 0$ $y+4 > 0$
 $y \in (-4, 0)$

$$a(b-a) = (b+2a)2b$$

$$ab - a^2 = 2b^2 + 4ab$$

$$a^2 + 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(-a-b)^2 + ab + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$\begin{cases} a = \frac{-3b+b}{2} \\ a = \frac{-3b-2b}{2} \end{cases} \begin{cases} a = -b \\ a = -2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(-y) = -\ln(y+4) \\ \ln(-y) = -2\ln(y+4) \end{cases}$$

$$D = 16 - 4 = 12 > 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} \\ y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 + \sqrt{3} \\ y = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$y < 0$